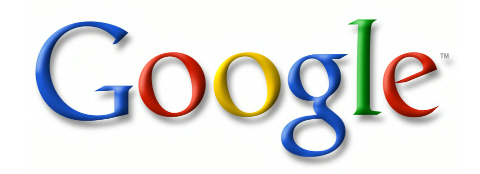
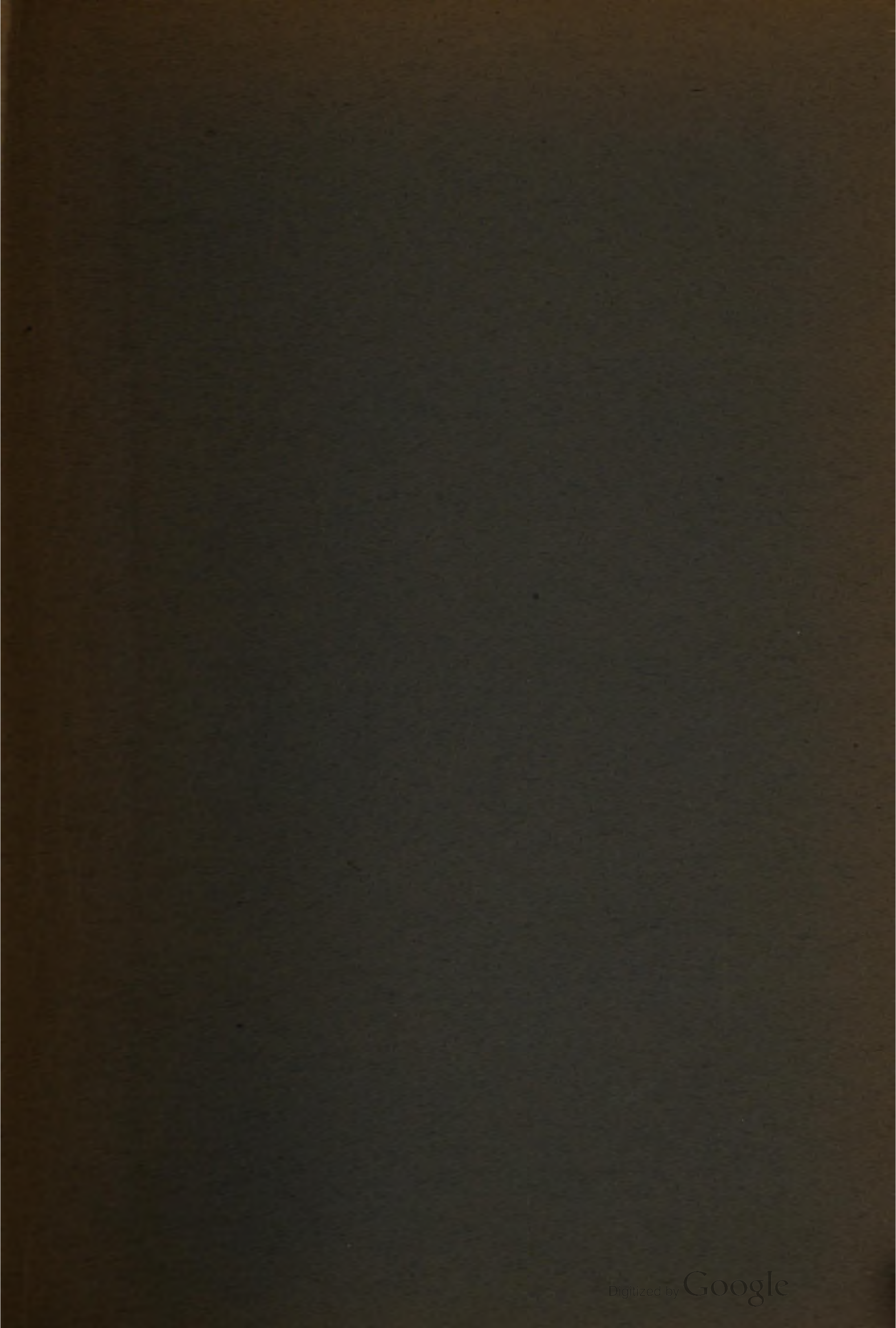
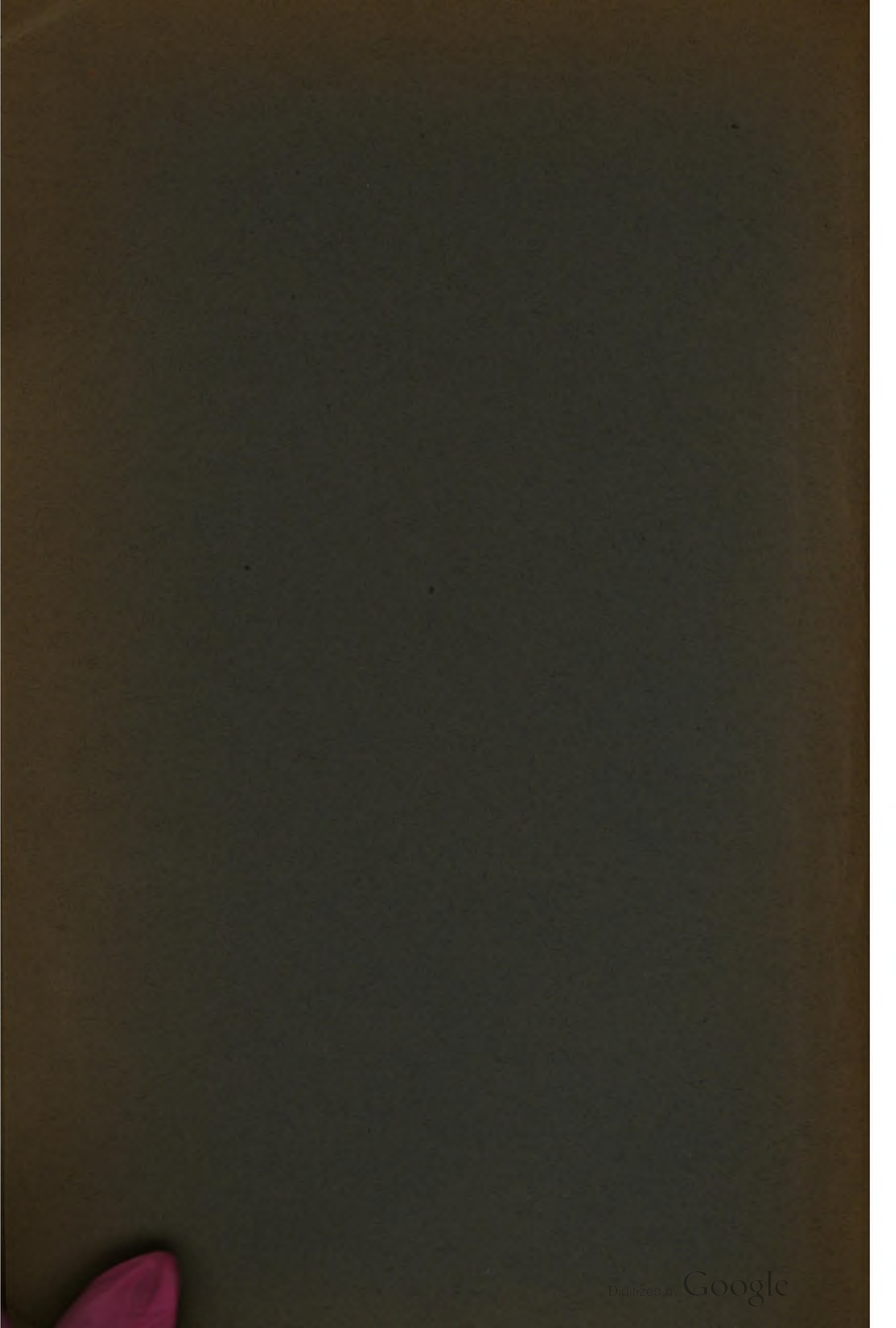



SEAL OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA
LET THERE BE LIGHT
1868





ENCYKLOPÄDIE
DER
ELEMENTAR-MATHEMATIK.

EIN HANDBUCH FÜR LEHRER UND STUDIERENDE.

VON

HEINRICH WEBER
PROFESSOR IN STRASSBURG
UND
JOSEF WELLSTEIN
PROFESSOR IN STRASSBURG.

IN DREI BÄNDEN.

DRITTER BAND.

ANGEWANDTE ELEMENTAR-MATHEMATIK.

ZWEITE AUFLAGE.

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1912

ANGEWANDTE ELEMENTAR-MATHEMATIK.

ZWEITER TEIL.

DARSTELLENDE GEOMETRIE, GRAPHISCHE STATIK, WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG, POLITISCHE ARITHMETIK UND ASTRONOMIE.

BEARBEITET VON

JOSEF WELLSTEIN, HEINRICH WEBER, HEINRICH BLEICHER UND JULIUS BAUSCHINGER.

ZWEITE AUFLAGE.

MIT 271 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1912

VORREDE.

Der hier vorliegende dritte Band der „Encyklopädie der Elementarmathematik" hat wesentlich den Zweck, aus Nachbarwissenschaften Anwendungen zu den arithmetischen und geometrischen Grundlagen zu liefern, die die beiden ersten Bände geschaffen haben.

Es darf deswegen von vornherein nicht in allen hier berührten Gebieten die Vollständigkeit erwartet werden, die in den ersten Bänden erstrebt ist. Das würde auch, besonders in den physikalischen Teilen, das Buch weit über den gewünschten Umfang erweitert haben.

Aber nicht nur als Anwendung ist der Inhalt dieses Buches gedacht, oder wenigstens nicht in dem Sinne, wie man Lehrbüchern etwa eine Aufgabensammlung als Anhang beifügt. Die Grundlagen, die zu den einzelnen Gebieten überführen, sollten ebenso logisch entwickelt werden, wie die Grundlagen der Arithmetik und der Geometrie selbst; es sollte dem systematischen Vorgehen, wie es im Schulunterricht unerläßlich ist, Rechnung getragen werden; und so ergab es sich von selbst, daß der Band aus wenigen, miteinander zwar in keinem oder nur losem Zusammenhang stehenden, aber je in sich zusammenhängend aufgebauten Abschnitten besteht.

Weder die Auswahl der Abschnitte noch der Gang ihrer Darstellung soll und kann von den Verfassern als Dogma hingestellt werden. Welche Anwendung sich im Unterricht als die zweckmäßigste erweist, wie die Darstellung den Schülern zu übermitteln ist, muß den praktischen Schulmännern überlassen werden.

Was den physikalischen Teil betrifft, so ist zunächst das aufgenommen, was längst Gegenstand des theoretischen Schulunterrichts war, die Mechanik; aber hier ist Wert gelegt auf eine Zuspitzung des ganzen Ganges nach dem wohl dem heutigen Schulunterricht immer noch nicht in seiner Allgemeingültigkeit recht zugänglichen Energieprinzip.

Ein anderer physikalischer Abschnitt richtet sich im wesentlichen an das geometrische Vorstellungsvermögen. Der reine Analytiker wird vielleicht nicht viel Freude an dem strengen Ausbau einer Kraftlinien-

theorie haben und ihren Zweck nicht recht verstehen; und doch ist sie im stande, dem geometrisch Veranlagten manche physikalische Erkenntnis weit leichter zugänglich zu machen, als es je dem Analytiker glücken wird.

Faraday, der Erfinder des Kraftlinienbegriffes, selbst in analytischer Behandlung physikalischer Probleme unbewandert, hat sich in ihnen eine eigene Mathematik geschaffen, die seiner intuitiven Denkweise näher lag, und die ihm und der Welt wunderbare Dinge eröffnete.

Freilich Vorsicht ist geboten. Auch falsche Vorstellungen faßt der geometrisch Denkende leichter. Darin ist die analytische Methode im Vorteil.

Auf eins sei hier noch hingewiesen. Man muß sich hüten, in den Kraftlinien etwas anderes zu sehen, als sie wirklich sind, ein mathematischer Hilfsbegriff ohne reelle Bedeutung, dessen Einführung nur durch die aus ihnen gewonnenen mathematischen Ergebnisse gerechtfertigt wird. Ein Wesensunterschied zwischen verschiedenen Kraftlinienkomponenten und ihren Resultierenden, wie er in dem Elektromagnetismus gefordert wird, ist sonst unverständlich.

Was die mathematische Durchführung der physikalischen Teile betrifft, so sei erwähnt, daß mit Bewußtsein „verkappte" Integrale eingeführt sind. Verkappte Integrationen aber sind vermieden, außer wo es sich um die Summierung von Linienelementen handelt. So ist z. B. im Carnotschen Kreisprozeß die Identität zweier Arbeitsintegrale gliedweise bewiesen, abweichend von den sonst gebräuchlichen und nicht elementaren Ableitungen dieses Problems.

Aus diesem Grunde ist nicht das sonst übliche Integralzeichen, in dem der unkundige Leser ein geheimnisvolles Symbol zu erblicken geneigt ist, sondern das Summenzeichen verwendet worden.

Zu dem Begriff der Arbeit stehen die vorkommenden Integrale immer in nächster Beziehung, was ihren Sinn leicht verständlich machen, ihre Einführung leicht vermitteln wird.

Geometrische und arithmetische Anwendungen liefern die folgenden Abschnitte (von H. Weber), die Einführung in die „Theorie der Maxima und Minima", und sie selbst findet eine Anwendung in der Theorie der Kapillarität.

Die „Wahrscheinlichkeitsrechnung" gebraucht als Grundlage eigenartige Vorstellungen; sie sind philosophischer, speziell logischer Art. Die Anwendung, die die Wahrscheinlichkeitsrechnung findet, ist dabei sehr reeller, ja praktischer Natur. Sie enthält die Kritik und Korrektion eines jeden quantitativen Urteils, sei es im alltäglichen Leben, sei es in irgend einer Wissenschaft.

Damit wendet sich der Inhalt des Bandes überhaupt mehr dem praktischen Bedarfe zu. Die „Graphik" ist für die Technik von Bedeutung. Ihr Unterricht wird nur da erfolgreich sein, wo er gleichzeitig mit zeichnerischen Übungen verknüpft werden kann. Das ist mit berücksichtigt, und z. B. in einem besonderen Paragraphen, die „Technik der darstellenden Geometrie", zum Ausdruck gebracht.

Den Inhalt dieser Abschnitte über „Graphik" bilden die darstellende Geometrie und die graphische Statik. Die darstellende Geometrie beginnt mit der schrägen Parallelprojektion, die unabhängig vom Zweitafelsystem behandelt ist. Andererseits ist das Zweitafelsystem möglichst mittels seiner eigenen Methoden begründet, weil die häufige Verwendung von Schrägbildern und Modellen leicht eine gewisse Scheu vor der Anstrengung des Anschauungsvermögens großzieht. Da der darstellenden Geometrie nur ein sehr beschränkter Platz eingeräumt werden konnte, so wurde der Stoff nicht nach Aufgaben, sondern nach Methoden gruppiert. Auf die Lehre von der Krümmung wurde besondere Sorgfalt verwendet.

Von der graphischen Statik ist der Teil, der die Zusammensetzung der Kräfte mittels des Seilecks behandelt, vorweg genommen und zur Einleitung in die Vektoranalysis an die Spitze des Bandes gestellt, um die Wichtigkeit dieses Verfahrens, das nicht bloß der Graphostatiker kennen sollte, mehr hervortreten zu lassen. Von der Einführung der Vektorprodukte wurde Abstand genommen, weil sie im folgenden keine Verwendung finden.

Die graphische Statik selbst mußte auf einige methodisch interessante Paragraphen beschränkt werden. Um die Möglichkeit einer innigen Verschmelzung der Statik mit der Geometrie zu zeigen und die Leser ein wenig auf die Geometrie der Dynamen von Study vorzubereiten, die in vielen Partien durchaus der Elementargeometrie angehört, wurde in die graphische Statik eine statische Ableitung der Grundformeln der Dreieckskoordinaten, unabhängig von rechtwinkligen, eingeflochten, ferner ein Paragraph über Astatik.

Den Beschluß dieses Buches macht ein Abschnitt über das ebene Fachwerk. Als eine einfache graphische Lösungsmethode linearer Gleichungssysteme gehört die Lehre vom Fachwerk zu den schönsten Teilen der Elementargeometrie. Dabei ist es durchaus nicht nötig, sich auf die rein äußerliche Erklärung der Konstruktionsverfahren zu beschränken; vielmehr wurde versucht, den Leser bis zu den Fragestellungen der höheren Fachwerktheorie heranzuführen. Die Arbeitsgleichung bei elastischer Deformation und der fundamentale Satz von Maxwell bilden den Höhepunkt der Theorie; sie sind ohne Benutzung des Prinzips der virtuellen Verrückungen abgeleitet, einzig auf Grund des Satzes von den statischen Momenten.

Im darstellend geometrischen Teile des vierten Buches konnte der Verfasser (Wellstein) Methoden und Gedanken verwerten, die er als Schüler und Assistent von F. Schur kennen gelernt, was hiermit mit dem Ausdruck des herzlichsten Dankes hervorgehoben sei.

Auch der Verlagsfirma sind wir für ihr großes Entgegenkommen und ihre nie versagende Geduld zu großem Danke verpflichtet. Sie hat keine Kosten gescheut, um das Werk mit einer Fülle von Figuren auszustatten, deren Herstellung eine außerordentliche Arbeit bereitete.

Heidelberg, im April 1907.

Rudolf H. Weber.

VORREDE ZUR ZWEITEN AUFLAGE.

Die bei der zweiten Auflage angekündigte Zweiteilung des dritten Bandes kommt mit dem vorliegenden Bande zum Abschluß. Er zerfällt in vier Bücher.

Das erste Buch: Graphik, von J. Wellstein verfaßt, enthält die darstellende Geometrie und die graphische Statik. Der Text konnte aus der ersten Auflage ohne erhebliche Änderungen herübergenommen werden; neu hinzugekommen sind ein Paragraph über die Schraubenlinie (§ 14) und der ganze dritte Abschnitt über orthogonale Axonometrie und über Perspektive. Damit wird ein von der Kritik ausgesprochener Wunsch erfüllt. Eine independente Entwickelung der Axonometrie, etwa in der Richtung des Werkes von R. Schüßler (Orthogonale Axonometrie, bei Teubner, 1905), hätte zuviel Raum beansprucht, während bei Zurückführung des Verfahrens auf das Zweitafelsystem zwei Paragraphen ausreichen. Dagegen ist der Perspektive etwa der doppelte Platz eingeräumt. Hier schien es mir im Interesse der Lehrer an technischen und an Kunstschulen notwendig, mich auf möglichst elementare Vorkenntnisse aus der Geometrie zu beschränken,

wobei freilich die eigentlich unterrichtliche Verarbeitung und Darbietung des Stoffes dem Lehrer überlassen bleibt. Beim Unterricht müßte natürlich ein langsameres Tempo gewählt und das Übungsmaterial erheblich vermehrt werden; an Stelle des § 17, Allgemeines über Perspektive, müßten Vorübungen im perspektivischen Sehen nach der Natur und nach guten Bildern treten. Meine Darstellung bringt nur das Wesentliche und Fruchtbare, ohne Benutzung der Kongruenzsätze und der Ähnlichkeitslehre; es ließe sich so die ganze „Freye Perspektive" von Lambert entwickeln.

Die graphische Statik ist gegen die erste Auflage um einen Paragraph über Dreiecksverwandtschaften (§ 31) vermehrt, der den § 30, Graphostatik und Dreieckskoordinaten, weiter ausführt. Da man diese Dinge in der graphischen Statik nicht suchen würde, so mache ich hier besonders darauf aufmerksam. Es gibt kaum einen Weg, der schneller zu den Grundlagen der projektiven Metrik führt, als der in § 30 eingeschlagene. — Die Theorie des ebenen Fachwerks hat nur geringfügige Änderungen erfahren.

Das zweite Buch: Wahrscheinlichkeitsrechnung, das im wesentlichen von Herrn H. Weber verfaßt ist, hat bei der neuen Auflage von Herrn J. Bauschinger einige Zusätze auf dem Gebiete der Ausgleichungsrechnung erhalten, so daß jetzt die Grundlegung wie die Anwendungen mit gleicher Sorgfalt und Ausführlichkeit behandelt sind.

Vollständig neu sind das dritte Buch „Aus der politischen Arithmetik" und das vierte „Astronomie".

Für das **dritte Buch,** das die allgemeine Theorie der Zinsrechnung und die Elemente der Versicherungsrechnung bringt, schien es den Herausgebern wünschenswert, nicht bloß den rein mathematischen Kern dieser Theorien herauszuschälen, der ja verhältnismäßig einfach ist, sondern zugleich in die eigenartige Denkweise einzuführen, mit der man im wirtschaftlichen Leben dieses den reinen Mathematiker etwas fremdartig anmutende Gebiet durchdringt und belebt. Das konnte nur ein Fachmann und zugleich Praktiker übernehmen. Es war uns daher angenehm, daß Herr Prof. Dr. Heinrich Bleicher in Frankfurt a. M. sich bereit fand, auf dem beschränkten Raum von etwa 70 Seiten eine Einführung in die politische Arithmetik zu verfassen. Beachtenswert ist, daß hier erstmals das Grundgesetz für die Zinseszinsrechnung aus einem wirtschaftlichen Postulate heraus (Vertretbarkeit von Kapital und Zins) logisch direkt entwickelt und damit die Frage ihrer ausschließlichen Berechtigung und Anwendbarkeit wissenschaftlich klar gestellt ist. In dem Abschnitt über Versicherungsrechnung sollen die kurzen Ausführungen über Gewinn und Verlust bei der Versicherung die wirtschaftlichen Grundgedanken dem Ver-

ständnisse des Mathematikers näher bringen. Im übrigen sind nur die wichtigsten Formeln der Lebensversicherungsmathematik entwickelt.

Das **vierte**, der Astronomie gewidmete Buch, verfaßt von Herrn Prof. J. Bauschinger in Straßburg, soll dem Mathematiker eine eingehendere Kenntnis ausgewählter Probleme aus der sphärischen und den Anfangsgründen der theoretischen Astronomie vermitteln, als es durch die für die Schule bestimmten Leitfäden geschieht. Auf nur dem Fachmann wichtige Einzelheiten wurde dabei nicht eingegangen, dagegen auf vollständige Durchführung der Theorien nicht verzichtet, wo nur diese gegenüber oberflächlichen Andeutungen und Erklärungen wahren Reiz und praktischen Nutzen gewähren kann. Bekanntere Dinge sind nur kurz berührt worden; manches, wie die Theorie der Finsternisse mußte ganz wegbleiben, da eine sachgemäße Behandlung zuviel Raum beansprucht hätte. Eine Anleitung zu astronomischen Messungen durfte nicht fehlen, da erfreulicherweise bereits manche Schulen mit kleinen Instrumenten für astronomische Beobachtungen ausgerüstet werden. Der Abschnitt über Bahnbestimmung geht vielleicht über die Elemente hinaus, wird aber manchem erwünscht sein, der sich auf kurzem Wege einen Einblick in dieses interessante und wichtige Problem verschaffen will.

Ein alphabetisches Register am Schlusse des Bandes weist alle wichtigen Definitionen und die benutzten Autoren nach; Adjektive mit Ausnahme der von Eigennamen abgeleiteten sind i. a. bei dem zugehörigen Substantiv gebucht.

Der Verlagsfirma sind wir für ihr Entgegenkommen, besonders bei der Herstellung der Figuren, auch bei dieser Auflage zu großem Dank verpflichtet.

Straßburg i. Els., Februar 1912.

Josef Wellstein.

INHALTSVERZEICHNIS.

Erstes Buch.

Graphik.

(Von Josef Wellstein.)

Erster Abschnitt.

Parallelprojektion auf eine Tafel.

Zweiter Abschnitt.

Das Grund- und Aufrißverfahren.

Dritter Abschnitt.

Orthogonale Axonometrie und Perspektive.



Vierter Abschnitt.

Graphische Statik.

Fünfter Abschnitt.

Das ebene Fachwerk.

Zweites Buch.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

(Von Heinrich Weber und J. Bauschinger).

Sechster Abschnitt.

Prinzipien der Wahrscheinlichkeit.

Siebenter Abschnitt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.



Achter Abschnitt.

Ausgleichung der Beobachtungsfehler.

Drittes Buch.

Aus der politischen Arithmetik.

(Von H. Bleicher.)

Neunter Abschnitt.

Allgemeine Theorie der Zinsrechnung.

Zehnter Abschnitt.

Elemente der Versicherungsrechnung.

Viertes Buch.

Astronomie.

(Von J. Bauschinger.)

Elfter Abschnitt.

Die astronomischen Koordinaten.

Zwölfter Abschnitt.

Die astronomische Zeitrechnung.

Dreizehnter Abschnitt.

Die Änderungen der Koordinaten der Gestirne.

Vierzehnter Abschnitt.

Astronomische Messungen.

Fünfzehnter Abschnitt.

Geographische Ortsbestimmung.

Sechzehnter Abschnitt.

Die Bahnbestimmung der Planeten und Kometen.

ERSTES BUCH

GRAPHIK

Erster Abschnitt.

Parallelprojektion auf eine Tafel.

---

§ 1. Aufgabe und Methode der darstellenden Geometrie. Zentral- und Parallelprojektion.

1. Die darstellende Geometrie stellt sich die Aufgabe, räumliche Figuren so auf eine Ebene, die Bildebene, abzubilden, daß i. a. den Punkten jeder Geraden des Raumes im Bilde wiederum Punkte einer Geraden entsprechen. Diese Abbildung wird durch Projektion bewirkt, d. h. man nimmt außerhalb der Bildebene η noch einen festen Punkt O, das Projektionszentrum, an, das auch in irgend einer Richtung im Unendlichen liegen kann, und weist jedem Punkte P des Raumes den Punkt P' der Bildebene als Bild zu, der mit O und P in einer Geraden liegt. Diese Gerade OP, die das Projektionszentrum mit dem darzustellenden Punkte P verbindet, heißt der Projektionsstrahl von P.

Fällt P mit O zusammen, so wird der Projektionsstrahl unbestimmt, und mit ihm das Bild des Projektionszentrums.

Jeder Strahl durch das Projektionszentrum projiziert die unendlich vielen Punkte, die auf ihm liegen; allen diesen Punkten entspricht also ein und derselbe Bildpunkt, nämlich der Schnitt- oder Spurpunkt des Projektionsstrahls mit der Bildebene. Jedem Punkte Q' der Bildebene entsprechen also umgekehrt im Raume die unendlich vielen Punkte der Geraden OQ' als Originale, deren Bild Q' ist.

2. Daß die Abbildung des Raumes auf eine Ebene nicht eindeutig sein kann, ließ sich voraussehen. Denn schreibt man einer Geraden ∞ viel Punkte zu, so hat eine Ebene deren $\infty \cdot \infty = \infty^2$, da man sie in den ∞ vielen Geraden dieser Ebene unterbringen kann, die auf einer Geraden dieser Ebene senkrecht stehen; der

Raum hat dann $\infty^2 \cdot \infty = \infty^3$ Punkte, die etwa durch die ∞ vielen Normalebenen einer Geraden erschöpft werden können. Folglich muß bei der Abbildung der ∞^3 Punkte des Raumes auf die ∞^2 Punkte einer Ebene jeder Punkt dieser Ebene ∞ viel Raumpunkte repräsentieren. Die darstellende Geometrie, so wie sie wenigstens zurzeit ausgebildet ist, erfüllt nun diese Forderung in der Weise, daß die # unendlich vielen Punkte, von denen ein beliebiger Punkt P' der Bildebene das Bild ist, den durch diesen Punkt gehenden Projektionsstrahl erfüllen.

3. Die Projektionsstrahlen sind übrigens die einzigen Geraden des Raumes, deren Abbildung je auf einen Punkt zusammenschrumpft. Denn verbindet man O mit den Punkten einer nicht durch O gehenden Geraden p, so liegen diese Strahlen in der durch O und p festgelegten Ebene, die die Bildebene auf alle Fälle in einer Geraden p', dem Bilde von p trifft; auf p' liegen die Bilder aller Punkte von p. Jede nicht durch das Projektionszentrum gehende Gerade p wird also durch eine Gerade p' abgebildet, und diese ist zugleich das Bild jeder der ∞^2 Geraden, die in der durch O und p gehenden Ebene (O, p) liegen; alle diese Geraden haben die Ebene (O, p) zur „projizierenden" Ebene[1]), d. h. die Projektionsstrahlen der Punkte jeder dieser Geraden liegen in dieser Ebene. Ganz allgemein läßt sich sagen: Eine beliebige Kurve k der Bildebene ist das Bild jeder der unendlich vielen Kurven, die auf dem Projektionskegel dieser Kurve k liegen, d. h. auf den Strahlen, die das Projektionszentrum mit den Punkten von k verbinden.

4. Aus der bloßen Angabe ihres Bildes ist demnach eine räumliche Figur nicht eindeutig rekonstruierbar; es müssen vielmehr, um die Beziehung von Bild und Original völlig eindeutig zu machen, noch andere Angaben hinzutreten, und nach der Art dieser Angaben unterscheidet man zahlreiche Projektionsverfahren, von denen wir nur die praktisch wichtigsten werden kennen lernen. Außerdem teilt man die Projektionen ein in Zentral- und Parallelprojektionen, je nachdem das Projektionszentrum im Endlichen oder im Unendlichen liegt. Sämtliche Projektionsmethoden machen Angaben, welche vor allem die Rekonstruktion des Projektionszentrums ermöglichen; die wechselseitig eindeutige Beziehung zwischen Original und Bild wird erreicht entweder, indem man zwei verschiedene Projek-

1) Der kürzere Ausdruck Projektionsebene ist nicht verfügbar, da er vielfach der Bildebene beigelegt wird; statt Projektionsstrahl müßte man eigentlich, aber unbequemer, projizierender Strahl sagen.

tionen desselben Gegenstandes angibt, oder die Projektionen dreier in einer Ecke aneinanderstoßender Kanten eines zum Vergleich dienenden Würfels. Das erste Verfahren wird bei zentraler Projektion als Photogrammetrie ausgebildet, d. h. als Lehre von der Rekonstruktion eines Raumgebildes aus mehreren Photographien; bei Parallelprojektion ergibt es die verschiedenen Zweitafelsysteme. Das zweite Verfahren liegt den verschiedenen axonometrischen Darstellungsweisen zugrunde.

5. Die Zentralprojektion oder Perspektive gibt die räumlichen Gegenstände im wesentlichen so wieder, wie wir sie mit einem starr gehaltenen Auge sehen; denn die vom Objekte durch die Pupille auf die Linse fallenden Sehstrahlen bilden angenähert ein Strahlenbündel, das durch die Linse mit ihren verschieden brechenden Schichten in eigentümlicher Weise umgewandelt wird, und zu unserem Bewußtsein gelangt schließlich das (umgekehrte) Bild, das dieses durch die Linse dringende Strahlenbündel auf der Netzhaut entwirft; bringt man nun das Sehstrahlenbündel, bevor es ins Auge dringt, mit einer Glasscheibe zum Schnitt, so erhält man auf dieser ein Bild des räumlichen Gegenstandes, wie es die Zentralprojektion liefert, und da man sich das ins Auge gelangende Strahlenbündel statt vom Raumgegenstand auch von diesem Bilde ausgehend denken kann, so muß das Bild (bei monokularem Sehen) auf das Auge dieselbe geometrische Wirkung hervorbringen wie der Gegenstand. Der Vorzug des projektiven Bildes ist also die Bildtreue; dagegen fehlt ihm die unmittelbare Maßtreue, d. h. die Gegenstände erscheinen nicht in ihren wirklichen Größenverhältnissen; ein dem Projektionszentrum, z. B. dem sehenden Auge, naher Mensch erscheint größer als ein sehr entferntes Haus. Mittelbar hat natürlich auch das projektive Bild Maßtreue, insofern man nämlich die wirklichen Maßverhältnisse der dargestellten Gegenstände aus den scheinbaren des Bildes in mehr oder minder einfacher Weise rekonstruieren kann.

6. Charakteristisch für die Zentralprojektion ist das Verhalten paralleler Geraden: diese werden nur dann auch im Bilde durch parallele Geraden dargestellt, wenn sie zur Bildebene parallel sind. Denn da die projizierenden Ebenen α und β zweier paralleler Geraden a und b den Punkt O, das Projektionszentrum, gemeinschaftlich haben, so treffen sie sich in einer durch O gehenden Geraden p, die den gemeinschaftlichen unendlich fernen Punkt von a und b projiziert, also zu a und b parallel ist; sie trifft die Bildebene im Fluchtpunkte, d. h. im Bilde des unendlich fernen Punktes von a und b, und dieser liegt selber nur dann im Unendlichen, wenn p und damit a, b zur Bildebene parallel ist.

7. Läßt man das Projektionszentrum in irgend einer Richtung ins Unendliche rücken, so werden die projizierenden Ebenen α und β einander parallel, treffen also die Bildebene in parallelen Geraden. Parallele Geraden werden also bei Parallelprojektion immer wieder durch parallele Geraden dargestellt, falls sie nicht zur Projektionsrichtung parallel sind, wo nach Nr. 1, 2, 3 die Bilder der Geraden in ihre Spurpunkte zusammenschrumpfen. Infolge dieser Tatsache hat die Parallelprojektion mehr unmittelbare Maßtreue als die Perspektive und erfüllt deshalb vorzugsweise die Anforderung, die der Architekt und Ingenieur an die ebene Abbildung räumlicher Gegenstände stellen, daß man Winkel und Strecken des Raumgegenstandes aus dem Bilde möglichst leicht entnehmen kann. Da die Bilder paralleler Geraden bei Parallelprojektion wieder parallele Gerade sind, so ist jede Parallelprojektion eines Parallelogramms wieder ein Parallelogramm, das in eine Strecke ausartet, wenn die Ebene desselben zur Projektionsrichtung parallel ist. Daraus folgt weiter, daß die Parallelprojektionen gleicher und gleich gerichteter Strecken wiederum gleiche und gleich gerichtete Strecken sind; denn liegen zwei solcher Strecken auf verschiedenen Geraden, so bestimmen ihre Endpunkte ein Parallelogramm, liegen sie auf derselben Geraden, so bestimmen sie mit einer dazu parallelen und gleichen Strecke auf einer anderen Geraden zwei Parallelogramme, die allemal als Parallelogramme projiziert werden.

8. Diese Tatsache folgt auch unmittelbar aus der Ähnlichkeitslehre und kann so verallgemeinert werden: Wenn ein Punkt eine

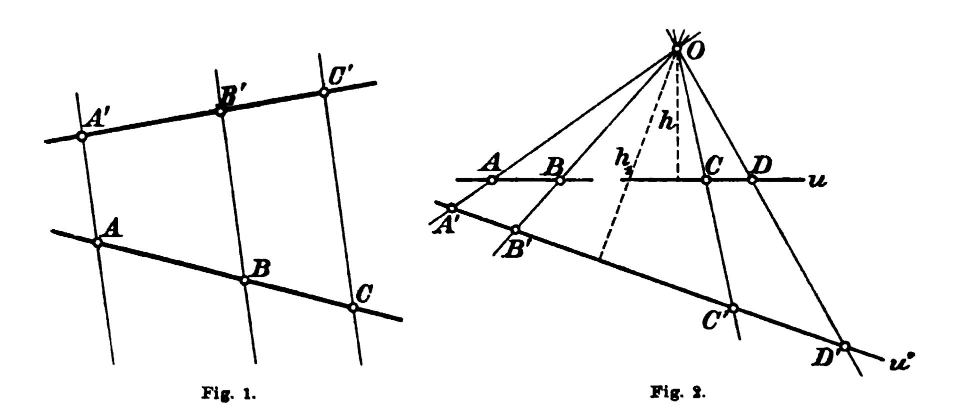


Fig. 1. Fig. 2.

Strecke in irgend einem Verhältnisse teilt, so teilt in jeder Parallelprojektion das Bild dieses Punktes das Bild der

Strecke in demselben Verhältnisse; denn aus Figur 1 entnimmt man, wenn $AA' \| BB' \| CC'$ ist:

$$AC : CB = A'C' : C'B'.$$

Bei Zentralprojektion bleibt dagegen das einfache Verhältnis zweier Strecken einer Geraden nicht ungeändert, wohl aber das Doppelverhältnis. Sind z. B. (Fig. 2) die Geraden u und u' durch ein Strahlenbüschel O aufeinander perspektiv bezogen, so daß den Punkten A, B, C, D von u die Punkte A', B', C', D' von u' entsprechen, und sind h, h_1 die von O auf u und u' gefällten Lote, so ist:

$$\begin{aligned}\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC} &= \frac{\frac{1}{2} AB \cdot h}{\frac{1}{2} BC \cdot h} : \frac{\frac{1}{2} AD \cdot h}{\frac{1}{2} DC \cdot h} = \frac{AOB}{BOC} : \frac{AOD}{DOC} \\ &= \frac{\frac{1}{2} OA \cdot OB \sin AOB}{\frac{1}{2} OB \cdot OC \sin BOC} : \frac{\frac{1}{2} OA \cdot OD \sin AOD}{\frac{1}{2} OD \cdot OC \sin DOC} \\ &= \frac{\sin AOB}{\sin BOC} : \frac{\sin AOD}{\sin DOC} = \frac{\sin A'OB'}{\sin B'OC'} : \frac{\sin A'OD'}{\sin D'OC'} \\ &= \frac{A'B'}{B'C'} : \frac{A'D'}{D'C'};\end{aligned}$$

also gilt ganz allgemein der Satz:

> Bei Zentralprojektion bleibt das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden ungeändert.

§ 2. Schräge, axonometrische Parallelprojektion.

1. Aus den Sätzen des § 1, Nr. 7, folgt unmittelbar das allgemeine Konstruktionsverfahren der axonometrischen Parallelprojektionen. Wir nehmen zunächst an, es sei uns bereits gelungen, die drei von einer Ecke O ausgehenden Kanten OX, OY, OZ eines Würfels durch Parallelprojektion auf eine Ebene abzubilden[1]), O^*X^*, O^*Y^*, O^*Z^* seien die Bilder. Es sei der Spezialfall vermieden, daß von den vier Punkten O^*, X^*, Y^*, Z^* drei in gerader Linie liegen.

Die drei Geraden OX, OY, OZ betrachten wir als Achsen eines rechtwinkligen Cartesischen Koordinatensystems. Um jetzt einen beliebigen Punkt P des Raumes in der vorliegenden Parallelprojektion darzustellen, fällen wir von P auf die drei Koordinaten-

1) Mit O wird in diesem Paragraphen, abweichend vom vorigen, der Anfangspunkt eines Koordinatensystems bezeichnet; in § 1 war O (oculus) das Projektionszentrum.

achsen die Lote PP_x, PP_y, PP_z. Dann sind $x = OP_x$, $y = OP_y$, $z = OP_z$ die Koordinaten von P. Es gilt jetzt, auf O^*X^*, O^*Y^*, OZ^* die Bilder P_x^*, P_y^*, P_z^* von P_x, P_y, P_z zu finden. Das geschieht auf Grund der Bemerkung, daß nach § 1, 8.

$$O^*P_x^* : O^*X^* = OP_x : OX, \quad O^*P_y^* : O^*Y^* = OP_y : OY,$$
$$O^*P_z^* : O^*Z^* = OP_z : OZ$$

sein muß, durch **Reduktion** der drei Koordinaten x, y, z.

Man zeichnet zu diesem Zwecke OX hin (Fig. 3), setzt in irgend

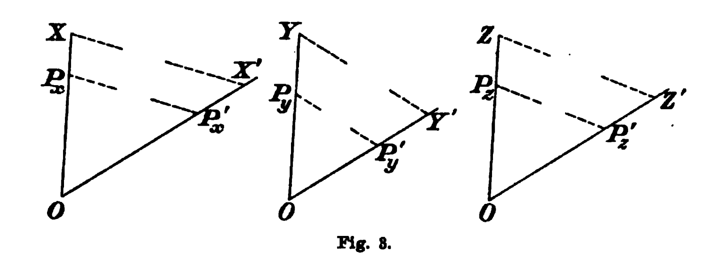


Fig. 3.

einer Richtung die Strecke $OX' = O^*X^*$ daran, trägt auf OX die Strecke OP_x ab und zieht $P_xP_x' \parallel XX'$. Dann heißt

$$x^* = OP_x'$$

und ebenso

$$y^* = OP_y', \quad z^* = OP_z'$$

die **reduzierte**[1]) Länge von x, y, z. Jetzt macht man (Fig. 4) auf den Bildern der drei Koordinatenachsen einfach $O^*P_x^* = x^*$, $O^*P_y^* = y^*$, $O^*P_z^* = z^*$, zieht $P_x^*P_3^*$ ⧣ (parallel und gleich) $O^*P_y^*$, $P_3^*P^*$ ⧣ $O^*P_z^*$, und P^* ist das gesuchte Bild von P.

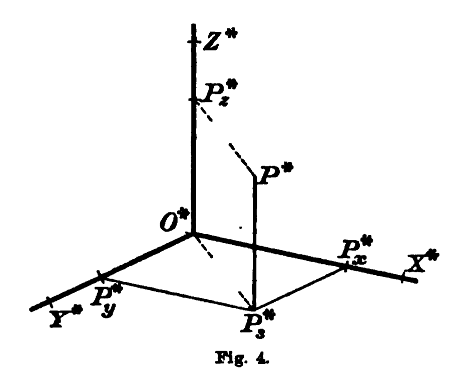


Fig. 4.

2. In dieser Weise wird man alle bestimmenden Punkte der vorgelegten Raumfigur darstellen. In dieser Form ist aber das Verfahren viel zu umständlich; es wird vor allen Dingen darauf ankommen, die Hilfskonstruktionen mit der endgültigen Figur in irgendeine Verbindung zu bringen, um Hilfslinien zu sparen. **Zunächst wollen wir die Vereinfachung vornehmen**, daß die Bildebene zur

1) Man projiziert in der Regel so, daß die sog. **reduzierten** Längen stets **kürzer** sind als die wirklichen. In der Figur sind, um auch den Fall des Gegenteils einmal zu illustrieren, die Bilder der Koordinaten **länger** als die Originale.

z-Achse parallel liegt. Dann ist (Fig. 5) $O^*Z^* \# OZ$, die Reduktion der z-Koordinate fällt also fort. Die vereinfachte Reduktion der anderen Koordinaten ist dann unmittelbar aus Fig. 5 ersichtlich, wo $O^*S = OX = OY = OZ$ ist. Dieses Verfahren ist von Beyel weiter ausgebildet worden (vgl. Archiv für Math. und Phys. (2), 4, S. 237).

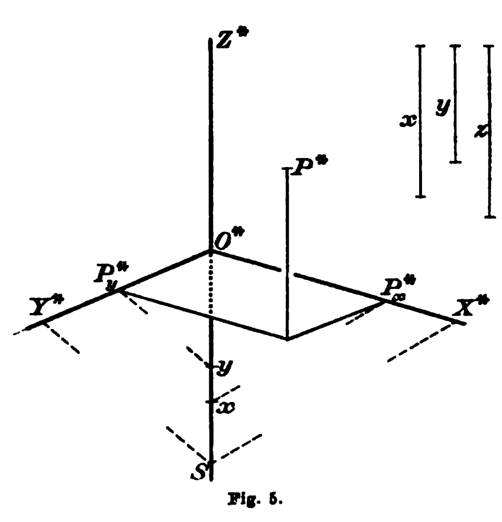


Fig. 5.

3. Wie man sieht, kommt bei diesen auf Koordinaten gestützten Parallelprojektionen, die deshalb axonometrische genannt werden, alles darauf an, die drei gleichen und aufeinander senkrechten Strecken OX, OY, OZ in Projektion zu setzen und umgekehrt aus ihren Bildern die Strecken zu rekonstruieren. Da gilt nun der Fundamentalsatz von Pohlke[1]): Drei von einem Punkte O^* ausgehende Strecken O^*X^*, O^*Y^*, O^*Z^* können immer als Parallelprojektion eines Systems von drei gleichen und aufeinander senkrechten Strecken OX, OY, OZ angesehen werden, wobei höchstens drei der Punkte O^*, X^*, Y^*, Z^* in einer Geraden liegen dürfen; und zwar gibt es im allgemeinen vier Systeme $OXYZ$, von denen $O^*X^*Y^*Z^*$ eine Parallelprojektion ist, und die durch Parallelverschiebung in der Richtung der Projektionsstrahlen nicht ineinander übergehen.

Dieser Satz hat bis jetzt nur theoretischen Wert gehabt, praktisch ist die Rekonstruktion von $OXYZ$ aus $O^*X^*Y^*Z^*$ im allgemeinen Falle zu verwickelt. Wir dürfen daher von einem Beweise absehen und werden uns auf Fälle beschränken, die der unmittelbaren Behandlung besonders zugänglich sind.

4. Die vorangehenden Ausführungen gelten für jede axonometrische Parallelprojektion; ausführlicher wollen wir jetzt das Verfahren der schrägen axonometrischen Parallelprojektion entwickeln.

---

1) Vgl. Fr. Schilling, Über den Pohlkeschen Satz, Ztschr. f. Math. u. Phys. 48 (1902), Seite 487 ff.

Das ist eine axonometrische Parallelprojektion, deren Projektionsstrahlen gegen die Bildebene schräg, nicht senkrecht stehen und deren Bildebene zu zwei Koordinatenachsen, etwa zur x- und zur z-Achse, parallel ist. Das Ergebnis dieser Projektion heiße kurz ein Schrägbild. Im Schrägbilde erscheinen daher alle zur x- und zur z-Achse parallelen Strecken in ihrer wahren Größe, nur die Strecken in der Richtung der y-Achse sind in demselben Verhältnisse verkürzt oder verlängert.[1])

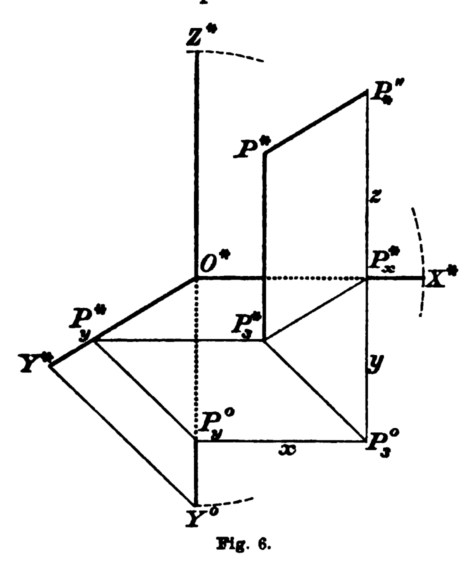


Fig. 6.

Die Figur 5 geht jetzt in Figur 6 über, wo $O^* X^* = OX$, $O^* Z^* = OZ$, $O^* P_x^* = x$, $P^* P_s^* = z$; auf $O^* Z^*$ ist nach unten $O^* Y^0 = OY$, $OP_y^0 = y$ abgetragen, und durch P_y^0 ist $P_y^0 P_y^* \parallel Y^0 Y^*$ gezogen. Dadurch ist P_y^* bestimmt. Eine andere Konstruktion des Punktes P^* geht von $O^* P_x^* = x$ aus, errichtet $P_x^* P_*'' = z$, $P_x^* P_s^0 = y$ und zieht durch P_x^* zu $O^* Y^*$ und durch P_s^0 zu $Y^* Y^0$ die Parallelen, diese treffen sich in P_s^*. Dann ist $P^* P_s^* \# P_*'' P_x^*$. Durch Angabe von O^*, Y^*, Y^0 ist also das Verfahren festgelegt.

5. Diese Ableitung des Schrägbildes führt zwar unmittelbar zum Mechanismus der Konstruktion, ist aber geometrisch zu wenig anschaulich. Um einen tieferen Einblick in die Bedeutung der Hilfslinien dieser Konstruktion zu bekommen, machen wir uns zunächst die Tatsache zunutze, daß die Parallelprojektion eines Gegenstandes sich nicht ändert, wenn man die Bildebene parallel zu sich selbst verschiebt. Wir dürfen daher die Bildebene mit der xz-Ebene einfach zusammenfallen lassen. Die Bilder der Punkte dieser Ebene sind daher mit ihren Originalen identisch, werden also ebenso bezeichnet. Dagegen sollen die Schrägbilder aller anderen Raumpunkte von nun an die Marke s erhalten (Fig. 7). Der Fußpunkt des von P auf die xz-Ebene gefällten Lotes, die Orthogonalprojektion von P, heiße P'', der Fußpunkt des Lotes von P auf die xy-Ebene wird, etwas umständlich, aber der Übereinstimmung mit dem folgenden Abschnitte wegen, mit $\underline{P}'$ bezeichnet, sein Schrägbild mit P_s'; ebenso sei $\underline{P}'''$ der Fußpunkt des Lotes von P auf die

---

1) Man wählt die Projektionsrichtung in der Regel so, daß keine Verlängerung eintritt; vgl. Anm. auf Seite 8.

zy-Ebene, P_s''' sein Bild. In der Figur ist OY' die wahre Länge von OY_s; ferner $OP_x = x$, $P_xP' = y$ und senkrecht auf der x-Achse, $P'P_s' \parallel Y'Y_s, P_xP_s' \parallel OY_s$, $P_s'P_s \# P_xP'' = z$.

Wie man sieht, kann jeder Punkt mittels seiner Koordinaten bildlich dargestellt werden, wenn nur die eine, auf der Bildebene senkrechte Strecke OY dargestellt ist. Da ist nun klar, daß je nach der Wahl der Projektionsrichtung jeder beliebige Punkt Y_s der Bildebene als Projektion von Y auftreten kann, man braucht nach willkürlicher Annahme von Y_s nur YY_s zur Projektionsrichtung zu machen. Das ist der wesentliche Inhalt

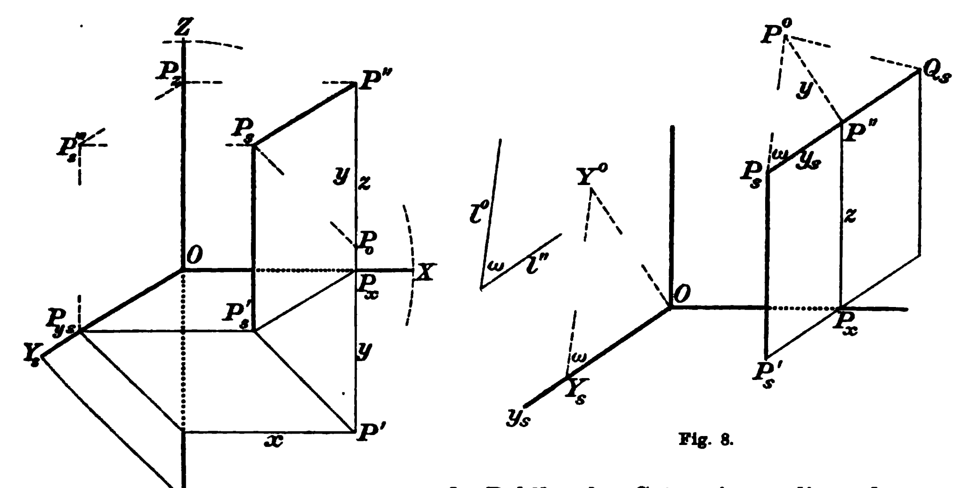


Fig. 7. Fig. 8.

des Pohlkeschen Satzes im vorliegenden Falle. Wir geben uns die Projektionsrichtung l, die nur nicht gerade auf der Bildebene senkrecht stehen soll, durch ihre kleinste Neigung ω zur Bildebene und durch die Orthogonalprojektion l'' eines Projektionsstrahls l; diese wird erhalten, wenn man alle Punkte von l senkrecht auf die Bildebene projiziert, und ω ist der kleinste Winkel zwischen l und l''. Die Orthogonalprojektionen aller Projektionsstrahlen sind zueinander parallel, also auch parallel zu l''. Das Schrägbild der auf der Bildebene senkrechten Geraden ist zu l'' parallel. Um jetzt OY zu projizieren, ziehen wir durch O die Parallele y_s zu l'' (siehe Fig. 8), errichten in O auf ihr das Lot $OY^0 = OY$ und ziehen durch Y^0 die Parallele zum freien Schenkel l^0 des irgendwo an l'' angetragenen Winkels ω; sie trifft y_s in Y_s. Die Figur 8 löst zugleich auch die Aufgabe, aus der Länge OY und der Projektion OY_s von OY die Projektionsrichtung zu rekonstruieren.

6. Jetzt können wir uns vom Koordinatensytem ganz frei machen, denn da OY jedes beliebige Lot auf der Bildebene sein kann, so kann das Verfahren der Figur 8 auf jeden Punkt Y angewandt werden. Sei also P ein beliebiger Punkt vor der Bildebene und P'' seine Orthogonalprojektion auf die Bildebene. Wir ziehen dann durch P'' die Parallele zur Richtung l'' und erhalten so einen geometrischen Ort für das Bild P_s von P. Auf dieser Geraden errichten wir in P'' das Lot $P''P^0 = y$ und ziehen dann durch P^0 die Parallele zu l^0; sie trifft die erste Parallele in P_s. In Figur 8 könnte der Punkt O, als Orthogonalprojektion von Y aufgefaßt, auch mit Y' bezeichnet werden. Stände die Projektionsrichtung des Schrägbildes, was wir ausgeschlossen hatten, auf der Bildebene senkrecht, so wäre P_s mit P'' identisch. Zeichnet man in Figur 8 zur Erhöhung der Plastik wieder das Koordinatensystem ein, so ist $P''P_s \| OY_s$, $P''P_x$ steht senkrecht auf der x-Achse, und es ist $P_sP_s' \# P''P_x$. — Figur 8 zeigt auch die Darstellung eines Punktes Q, der hinter der Bildebene liegt, und zwar haben wir Q zu P hinsichtlich der Bildebene symmetrisch angenommen. — Da im Unterrichte als Bildebene die Wandtafel benutzt zu werden pflegt, so wird der senkrechte Abstand eines Punktes von der Bildebene als Tafelabstand bezeichnet. Wir können nunmehr also einen Punkt P aus seiner Orthogonalprojektion P' und seinem Tafelabstande PP' darstellen; der Tafelabstand eines Punktes ist seine Ordinate y.

7. Wollte man in dieser Weise eine aus einer größeren Zahl bestimmender Punkte zusammengesetzte Figur darstellen, so wäre das Verfahren immer noch umständlich genug. Man könnte sich da in der Weise helfen, wie es in der Praxis oft geschieht, daß man (durch passende Wahl der Projektionsrichtung) dem Verhältnisse des wahren Tafelabstandes PP'' zum scheinbaren P_sP'' einen bequem zu konstruierenden Wert gibt, z. B. den Wert $\frac{1}{2}$. Denn da

$$PP'' : P_sP'' = P^0P'' : P_sP'' = \operatorname{tg} \omega$$

nur von dem Winkel ω abhängt, so ist dieses Reduktionsverhältnis r zwischen dem wahren und dem scheinbaren Tafelabstande für alle Punkte dasselbe, und wenn man etwa $r = \frac{1}{2}$ genommen hat, so hat man einfach $P''P_s$ parallel zu l'' und gleich $ry = r \cdot PP'' = \frac{1}{2} PP''$ anzutragen, was besonders dann von Nutzen sein wird, wenn alle Abstände in irgend einem Maßstabe gemessen werden, was jedoch im folgenden nicht vorausgesetzt werden soll.

8. Bei der Darstellung von Gegenständen der Architektur und Technik sind häufig die Orthogonalprojektionen der wichtigeren Punkte auf eine Horizontalebene, im vorliegenden Falle also etwa auf die xy-Ebene, gegeben. Um diese Projektion, den Grundriß, zu verwerten, stellen wir uns die allgemeinere Aufgabe, von einer geradlinigen Figur der xy-Ebene, etwa einem Quadrat, ein Schrägbild zu entwerfen. Zur Erhöhung der Anschaulichkeit nehmen wir in der xy-Ebene eine Gerade $u \parallel x$ an, welche die y-Achse in Y treffe, und fügen noch eine Parallele w zur y-Achse so hinzu, daß das darzustellende Quadrat von dem aus x, u, y, w gebildeten Rechteck eingeschlossen wird. Dann stellen wir zuerst Y dar (Fig. 9) und legen u_s durch Y_s parallel zu x. Ist T der Schnittpunkt von w mit x, so geht w_s durch T parallel zu OY_s. Jetzt klappen wir die xy-Ebene um die x-Achse herunter, bis sie mit der Bildebene xz zusammenfällt; Y', u', w' sind dann die neuen Lagen von Y, u, w. Die darzustellende Figur, etwa ein Quadrat $\underline{A}'\underline{B}'\underline{C}'\underline{D}'$, wird jetzt in ihrer richtigen Lage zu x und y in der Umklappung eingetragen, als $A'B'C'D'$.

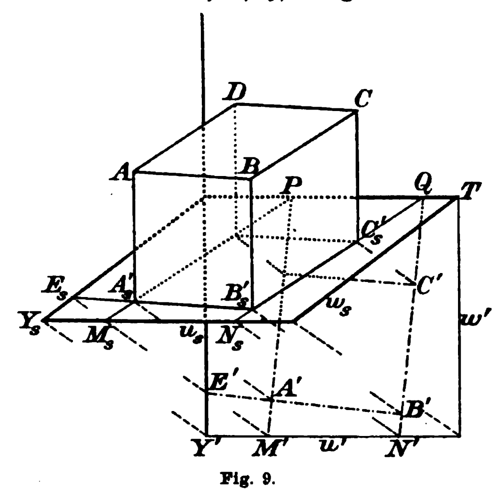


Fig. 9.

Sind $\underline{M}$ und $\underline{N}$ die Schnittpunkte von $\underline{A}'\underline{D}'$ und $\underline{B}'\underline{C}'$ mit u und M', N' ihre Umklappungen, so ist $\underline{M}M' \parallel \underline{N}N' \parallel \underline{Y}Y'$, also auch $M_sM' \parallel N_sN' \parallel Y_sY'$, wodurch M_s und N_s auf u_s bestimmt sind. Jetzt lassen sich die Geraden $\underline{A}'\underline{D}'$ und $\underline{B}'\underline{C}'$ unter Benutzung ihrer Schnittpunkte P, Q mit der x-Achse ohne weiteres darstellen, ihre Bilder sind PM_s und QN_s. Da ferner $\underline{A}'A' \parallel \underline{M}'M' \parallel \underline{B}'B' \parallel \underline{N}'N' \parallel \underline{C}'C' \parallel \underline{D}'D'$, indem alle diese Geraden unter 45^0 gegen die xy- und xz-Ebene geneigt sind, so ist auch $A_s'A' \parallel B_s'B' \parallel C_s'C' \parallel D_s'D' \parallel M_sM' \parallel Y_sY'$, wodurch A_s', B_s', C_s', D_s' auf PM_s bzw. QN_s bestimmt sind. Man hätte auch die Geraden $\underline{A}'\underline{B}'$ und $\underline{C}'\underline{D}'$ oder gar die Diagonalen des Quadrates ähnlich wie $\underline{A}'\underline{D}'$ und $\underline{B}'\underline{C}'$ abbilden können. Eine oder die andere dieser Konstruktionen wird man stets zur Kontrolle der Genauigkeit hinzufügen. Auch enthält dies Verfahren zur Festlegung von A_s', B_s', C_s', D_s' Angaben genug, um auch ohne Verwendung der Geraden u auszukommen. In Figur 9 ist $\underline{A}'\underline{B}'\underline{C}'\underline{D}'$ als Basis eines Würfels betrachtet worden, der ebenfalls dargestellt ist.

9. Da jede auf der Bildebene senkrechte Ebene die Rolle

der xy-Ebene übernehmen kann, so gilt das Verfahren von Nr. 8 für jede dieser Ebenen, z. B. auch für die yz-Ebene. Ist eine Figur der yz-Ebene darzustellen, etwa wiederum ein Quadrat $ABCD$, so klappt man diese Ebene um die z-Achse in die Bildebene, indem man sie wie ein Blatt eines Buches nach links wendet. Die Lage des Quadrates in der Bildebene sei $A'''B'''C'''D'''$; diese denken wir uns gegeben (Fig. 10). Da jetzt wiederum $AA''' \parallel BB''' \parallel CC''' \parallel DD'''$, so wird auch, wenn A_s, B_s, C_s, D_s die gesuchten Bilder von A, B, C, D sind, $A_sA''' \parallel B_sB''' \parallel C_sC''' \parallel D_sD'''$ sein. Diese Richtung ermitteln wir, indem wir noch eine Strecke OY der y-Achse mit umklappen, deren Endpunkt dann in die Lage Y''' auf der x-Achse übergehen wird, wo

$$OY''' = OY = OY'$$

ist, wenn Y' die Bedeutung der vorangehenden Figuren 7 und 9 hat. Jetzt ist also $A_sA''' \parallel Y_sY'''$, und die Darstellung kann nun in der mannigfachsten Weise erfolgen. In der Figur sind die Schnittpunkte V''', W''' der Geraden AB mit der umgelegten y-Achse und der Parallele durch Y''' zu z benutzt, $V_sV''' \parallel Y_sY'''$, $W_sW''' \parallel Y_sY'''$ gemacht und $A_sA''' \parallel B_sB''' \parallel Y_sY'''$ konstruiert. Ähnlich sind die übrigen Punkte übertragen. — Beim Studium dieser Beispiele wird dem Leser geraten, die Figur immer neu anzufertigen und die zahlreichen Proben der Richtigkeit zu beachten, die sich aus der Überbestimmtheit der Punkte ergeben.

Fig. 10.

10. Wie bereits gesagt, läßt sich dieser Gedankengang auf jede zur Bildebene senkrechte Ebene übertragen. Eine solche Ebene sei nun etwa durch ein Rechteck $MM''N''N$ plastisch gemacht, dessen Seite $M''N''$ in der Bildebene liegt und die Orthogonalprojektion von MN ist; klappt man dieses Rechteck um $M''N''$ in die Bildebene xz, so erhält man in dieser ein dem gegebenen Rechteck kongruentes Rechteck $\overline{M}\overline{N}N''M''$ (Fig. 11), das wir jetzt konstruieren wollen. Dazu brauchen wir nur die Länge von NN'' aus N_sN'' zu bestimmen, indem wir uns etwa das Rechteck durch sein Bild $M_sN_sN''M''$ und durch Y_s, Y' gegeben denken. Zu diesem Zwecke ziehen wir $N''N' \parallel OY'$, $N_sN' \parallel Y_sY'$; dann ist $N''N' = N'N$ nach Nr. 8. Also ist $N''\overline{N} = N''N'$ bestimmt, und damit die Umklappung des Rechtecks. Ist S irgend ein Punkt der Ebene dieses Rechtecks, ge-

geben durch sein Bild S_s, und $\bar{S}$ seine Umklappung, so ist $S\bar{S} \| M\bar{M} \| N\bar{N}$, also auch $S_s\bar{S} \| M_s\bar{M} \| N_s\bar{N}$. Macht man noch $S_sS'' \| N_sN''$, wo S'' auf $M''N''$ liegt und die Orthogonalprojektion von S auf die Bildebene ist, und zieht man $S''\bar{S} \| N''\bar{N}$, $S_s\bar{S} \| N_s\bar{N}$, so ist $\bar{S}$ aus S_s bestimmt; umgekehrt ergibt diese Figur S_s aus $\bar{S}$. Es läßt sich also jetzt jede Figur der Rechtecksebene aus ihrer Umklappung abbilden, und aus dem Bilde kann immer die wirkliche Gestalt, die ja die Umklappung zeigt, rekonstruiert werden.

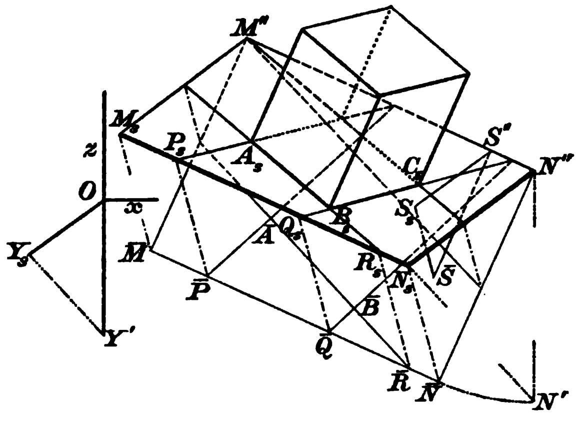


Fig. 11.

11. Auf diese Weise ist in Fig. 11 ein Rechteck $ABCD$ dargestellt worden, das in der Ebene $MNN''M''$ liegt. Zugleich ist dieses Rechteck als Basis eines auf jener Ebene stehenden Quaders aufgefaßt worden. Die vier auf dieser Ebene senkrechten Kanten sind zur Bildebene parallel, erscheinen dort also in ihrer wahren Größe, und zwar stehen die Bilder dieser Kanten auf $M''N''$ senkrecht, da sie parallel sind zu dem Lote der Ebene $MNN''M''$ im Punkte N'', das in die Bildebene fällt. Die ganze Figur ist absichtlich nicht mit der Mindestzahl von Hilfslinien ausgeführt, einmal, um auf nützliche Kontrollen aufmerksam zu machen, dann aber, weil es wünschenswert ist, mehrere Konstruktionen desselben Punktes zu kennen, da oft die eine oder die andere praktisch versagt.

12. Die Figuren 7 und 8 zeigen, wie das Schrägbild eines Punktes P aus seiner Orthogonalprojektion P'' gewonnen wird, wenn noch die Umlegung seines Tafelabstandes in der Richtung der z-Achse oder in der Richtung senkrecht zum Bilde der y-Achse gegeben ist. In Figur 11 ist dieses Verfahren in seiner allgemeinen Form zu erkennen: Von einem Punkte M ist das Bild M_s, die Orthogonalprojektion M'' und ihre Umlegung $M''\bar{M}$ in irgend einer Richtung gegeben; diese Angabe fixiert natürlich die Projektionsrichtung. Um dann einen beliebigen Punkt S von bekanntem Tafelabstande y und bekannter Orthogonalprojektion S'' darzustellen, zieht man $S''\bar{S}$ parallel zu $M''\bar{M}$ und gleich y; die Parallelen durch S'' und $\bar{S}$ zu $M''M_s$ und $\bar{M}M_s$ treffen sich dann in S_s.

§ 3. Affinität.

1. Das Gemeinsame in der Lösungsmethode der Aufgaben § 2, Nr. 7—11 tritt noch mehr hervor, wenn wir sie zusammenfassen und verallgemeinern durch folgende Aufgabe:

Eine beliebige Ebene η sei gegeben durch die Bilder U, V_s, W ihrer Schnittpunkte U, V, W mit den Koordinatenachsen; es sei entweder das Bild einer in η liegenden Figur aus ihrer wirklichen Gestalt abzuleiten, oder umgekehrt aus dem Bilde der Figur ihre wahre Gestalt zu ermitteln.

Der erste Schritt zur Lösung bei allen Aufgaben dieser Art besteht darin, daß man die Ebene um ihre Spur in die Bildebene dreht.

Unter Spur einer Ebene ohne näheren Zusatz verstehen wir ihre Schnittlinie mit der Bildebene, hier also die Gerade WU. Zur Umlegung des Dreiecks UVW eignen sich folgende beiden Konstruktionen:

I. Man legt V um (Fig. 12). Zu diesem Zwecke fällt man $OH \perp WU$ und zieht V_sH. Dann ist $VH \perp UW$. Nach der Drehung von η um UW wird also HV auf die Gerade OH zu liegen kommen. Der Endpunkt der umgelegten Strecke HV heiße V_0. Er liegt also auf OH, und zwar im Abstande $WV_0 = WV'''$ von W, wenn V''' bei Umklappung der yz-Ebene um z in die Bildebene die Endlage von V ist, also $OV''' = OV'$.

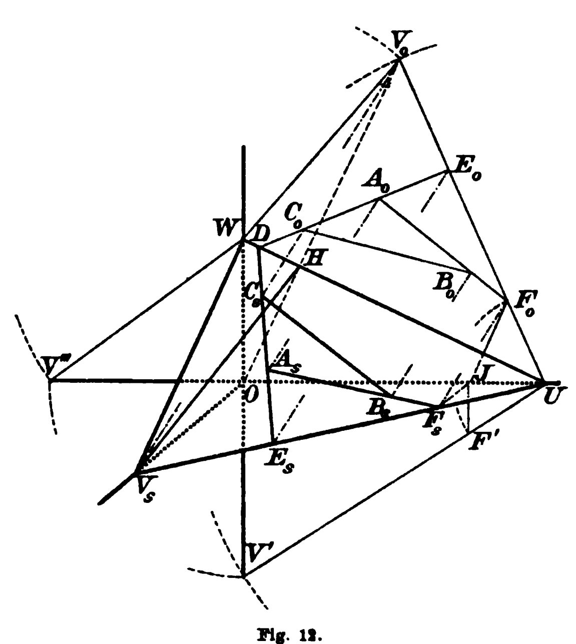


Fig. 12.

II. Man legt einen Punkt F von UV um (Fig. 12). Zu diesem Zwecke zieht man $F_sJ \parallel OV_s$, $JF' \perp OU$, $F_sF' \parallel V_sV'$, wodurch F' bestimmt ist,

$$JF_0 \perp WU, \quad UF_0 = UF',$$

wodurch F_0 als Umlegung von F festgelegt ist. Je näher F_s bei V_s liegt, umso genauer wird natürlich die ganze Figur.

2. Nach dieser Vorbereitung stützt sich die weitere Behandlung der Aufgabe auf die einfache Tatsache, daß jede Umklappung

sich durch eine Parallelprojektion ersetzen läßt. Ganz allgemein gilt nämlich der in der darstellenden Geometrie häufig angewandte Satz:

Werden zwei Ebenen α und β durch Umklappung aufeinander eindeutig bezogen, indem man die Punkte paarweise einander zuordnet, die nach Drehung einer dieser Ebenen um die gemeinsame Schnittgerade bis zum Zusammenfallen mit der anderen Ebene einander bedecken würden, so kann diese Beziehung auch durch Parallelprojektion jeder dieser Ebenen auf die andere vermittelt werden, und zwar steht die Projektionsrichtung senkrecht auf der Halbierungsebene des Ebenenwinkels, den α bei der Drehung durchläuft. Sind $A, B, C, \ldots$ irgendwelche Punkte von α, die nach der Umklappung auf die Punkte $A_0, B_0, C_0, \ldots$ von β fallen, so ist $AA_0 \parallel BB_0 \parallel CC_0 \parallel \ldots$, und diese Parallelen sind die Projektionsstrahlen.

3. Im vorliegenden Falle seien $A, B, C, \ldots$ Punkte der Ebene η; $A_s, B_s, C_s, \ldots$ ihre Bilder, $A_0, B_0, C_0, \ldots$ ihre Umklappungen. Da nun die Geraden $AA_0, BB_0, CC_0, \ldots$ parallel laufen und ihre Schrägbilder auch parallel sein müssen, so ist

$$A_sA_0 \parallel B_sB_0 \parallel C_sC_0 \parallel \ldots,$$

und diese Richtung ist durch V_sV_0 oder F_sF_0 gegeben. Daher können die Punkte $A_0, B_0, C_0, \ldots$ unmittelbar aus $A_s, B_s, C_s, \ldots$ abgeleitet werden, und umgekehrt. Dazu wird man möglichst ihre Verbindungsgeraden übertragen. In Figur 12 sind z. B. die Punkte A_s, B_s, C_s so angenommen, daß A_sC_s die Gerade WU in D, die Gerade UV_s in E_s trifft, während A_sB_s mit UV_s den Punkt F_s gemein hat. Bei der Umklappung bleibt D liegen, E_s geht, da $EE_0 \parallel AA_0 \parallel \ldots$ ist, in einen Punkt E_0 auf UV_0 über, für den $E_sE_0 \parallel A_sA_0 \parallel V_sV_0$ ist. Dadurch ist DE_0 bestimmt, und auf dieser Geraden werden A_0, C_0 mittels der Parallelen durch A_s, C_s zu V_sV_0 gefunden. Ebenso liegt B_0 auf der Geraden A_0F_0 und auf der Parallele durch B_s zu V_sV_0.

Betrachtet man umgekehrt $A_0, B_0, C_0, \ldots$ als die Punkte der gegebenen Figur, die also in ihrer wahren Gestalt vorliegt, so findet man nach dieser Verfahrungsweise die Bildpunkte $A_s, B_s, C_s, \ldots$ Unsere Aufgabe ist damit allgemein gelöst.

4. Die Beziehung zwischen den Punkten $A_s, B_s, C_s, \ldots$ und $A_0, B_0, C_0, \ldots$ der Bildebene ist ein Beispiel für eine wichtige eindeutige Punktverwandtschaft, die Affinität, die wir eingehender untersuchen wollen. Diese Verwandtschaft läßt sofort folgende Eigenschaften erkennen:

I. Jedem Punkte A_s der (Bild-) Ebene ist ein und nur ein Punkt A_0 dieser Ebene als affiner Punkt zugeordnet;

II. beschreibt A_s in der Ebene eine Gerade a_s, so durchläuft der affine Punkt ebenfalls eine Gerade, die zu a_s affine Gerade a_0;

III. die Verbindungsstrahlen der Punkte der Ebene mit ihren affinen Punkten sind parallel: $A_sA_0 \| B_sB_0 \| C_sC_0 \| \ldots$; diese Strahlen heißen Affinitätsstrahlen, ihre Richtung Affinitätsrichtung;

IV. es gibt Punkte, die zu sich selbst affin sind; diese erfüllen eine Gerade, die Affinitätsachse,

im vorliegenden Falle die Gerade UW. Die Eigenschaft IV ist eine Folge von I, II und III. Denn jedes Dreieck $A_sB_sC_s$ steht zu dem affinen $A_0B_0C_0$ in der Beziehung, daß die Geraden A_sA_0, B_sB_0, C_sC_0 (nach III) parallel sind; folglich schneiden sich die Geraden A_sB_s und A_0B_0, B_sC_s und B_0C_0, C_sA_s und C_0A_0 auf Grund des Satzes von Desargues in einer Geraden. Diese drei Punkte sind zu sich selbst affin und folglich auch die Gerade, auf der sie liegen. Andere zu sich selbst affine Punkte als die der Affinitätsachse kann es nicht geben, denn jede durch einen solchen Punkt gehende Gerade wäre, weil sie auch die Affinitätsachse in einem zu sich selbst affinen Punkte träfe, zu sich selbst affin; es entspräche daher jeder ihrer Punkte sich selbst, und das würde von allen Punkten der Ebene gelten. Wenn also eine Affinität nicht in der Identität der Ebene mit sich selbst besteht, liegen die zu sich selbst affinen Punkte auf einer Geraden, der Affinitätsachse; dabei soll die Affinität[1]) ganz allgemein als eine Punktverwandtschaft in der Ebene mit den Eigenschaften I, II, III definiert sein, aus denen wir alle bisherigen Schlüsse gezogen haben.

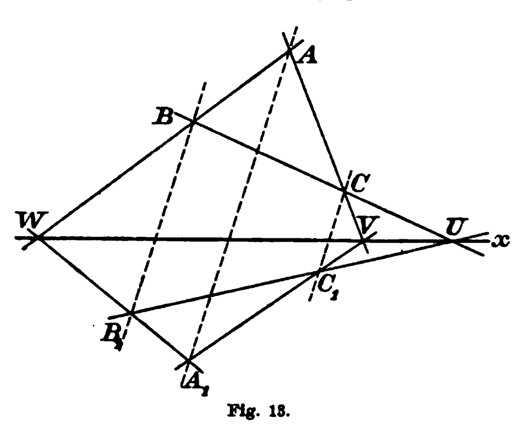


Fig. 13.

5. Durch Annahme der Affinitätsachse x und eines Paares entsprechender Punkte A und A_1 außerhalb dieser Achse ist eine Affinität vollkommen bestimmt. Die Affinitätsrichtung ist dann nämlich die von AA_1 (Fig. 13), und wenn B ein wei-

1) Genauer Affinität bei affiner Lage, da es eine noch umfassendere gibt als die des Textes, von der wir jedoch keinen Gebrauch machen werden.

terer Punkt der Ebene ist, so liegt der dazu affine Punkt B_1 erstens auf dem durch B (parallel zu AA_1) gehenden Affinitätsstrahle; zweitens auf der zu AB homologen Geraden durch A_1, welche die Affinitätsachse in demselben Punkte W trifft wie AB. Dadurch ist B_1 festgelegt. Von einem dritten Punkte C ausgehend haben wir für den affinen Punkt C_1 gleich drei geometrische Örter:

1. die Gerade A_1V, die zur Geraden AC affin ist und sie auf der Affinitätsachse x in V trifft; ebenso
2. die Gerade B_1U, die zur Geraden BC affin ist und sie auf der Affinitätsachse x in U trifft; schließlich
3. den durch C gehenden Affinitätsstrahl.

Durch 1. und 2. allein schon ist C_1 bestimmt, und durch diesen Punkt geht 3. von selbst, d. h. ohne einschränkende Annahme über x, A, A_1, B und C, auf Grund des Satzes von Desargues.

6. Bei der Affinität entspricht dem Schnittpunkte zweier Geraden (nach II.) der Schnittpunkt der affinen Geraden; zu parallelen Geraden sind also immer wieder parallele Geraden affin, zu einem Parallelogramm wieder ein Parallelogramm. Das kann zur Erleichterung des Konstruierens dienen: Sind zu einer größeren Anzahl von Punkten $A, B, C, \ldots$ die affinen zu konstruieren, so nimmt man eine oder zwei Geraden h, k zur Hilfe, die möglichst alle mit zu übertragenden Verbindungsgeraden dieser Punkte treffen, sucht h_1, k_1 und konstruiert zu jenen Schnittpunkten von h, k mit den Verbindungsgeraden die affinen Punkte auf h_1, k_1. Häufig genügt zu diesem Zwecke eine einzige Hilfsgerade h zusammen mit der Affinitätsachse, und mit Vorteil wird man h zur Achse parallel annehmen. Welche von allen diesen Methoden im einzelnen Falle sich am meisten empfiehlt, das zu entscheiden ist Sache des praktischen geometrischen Blicks, der durch viele Übung erworben werden kann.

7. Vor einem leicht möglichen Irrtum sei hier ausdrücklich gewarnt: die Affinität ordnet zwar jedem Punkte P der Ebene einen affinen Punkt P_1 zu (Fig. 14), ähnlich wie auch die Kreisverwandtschaft (Inversion) jedem Punkte einen inversen zuweist. Aber die Affinität ist keine wechselseitige Verwandtschaft wie die Inversion, zu P_1 ist nicht notwendig P affin.

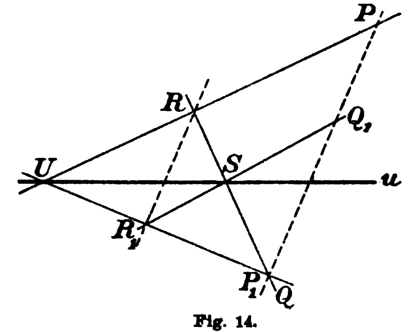


Fig. 14.

Ist etwa U ein Punkt der Affinitätsachse u, so ist zu UP die Gerade UP_1 affin, zu einem Punkte R von UP der Punkt R_1 von UP_1, der auf dem Affinitätsstrahle durch R liegt. Fassen wir jetzt P_1 als Punkt Q auf, dessen affiner Punkt Q_1 zu bestimmen ist, so braucht man nur QR mit der Affinitätsachse zum Schnitt zu bringen (in S) und den Schnittpunkt mit R_1 zu verbinden. Auf dieser Geraden sowie auf PP_1 liegt Q_1.

Wenn Q_1 mit P zusammenfällt, so halbiert die Affinitätsachse u (nach Bd. II, § 5, 1.) die Strecken RR_1 und PP_1. Die Affinität ist stets und nur dann wechselseitig, wenn die Affinitätsachse den Abstand zweier und damit aller zusammengehörigen Punkte halbiert.

Es ist zur Vermeidung des genannten Irrtums und zur Erhöhung der Anschaulichkeit zweckmäßig, sich die Ebene der Affinität η durch Aufeinanderlegung zweier verschiedener Ebenen entstanden zu denken, von denen eine die Punkte $P, Q, R, \ldots$, die andere die dazu affinen enthält. Man spricht dann von zwei in der Ebene η liegenden ebenen Systemen oder kurz Systemen Σ und Σ_1, die zueinander in der Beziehung der Affinität stehen, und sagt, zu den Punkten P, Q, R von Σ seien die Punkte P_1, Q_1, R_1 von Σ_1 affin. Faßt man aber (Fig. 14) P_1 als Punkt von Σ auf, so ist Q_1 zu ihm affin.

8. Bei der Affinität finden wichtige Beziehungen metrischer Natur statt, die in der darstellenden Geometrie oft mit Nutzen angewandt werden.

Sind (Fig. 15) A_1 und C_1 zu A und C affin, so treffen sich die Geraden AC und A_1C_1 in einem Punkte S der Affinitätsachse u, der auch im Unendlichen liegen kann; indem wir mit M und N die Schnittpunkte der Affinitätsachse u mit AA_1 und CC_1 bezeichnen, haben wir:

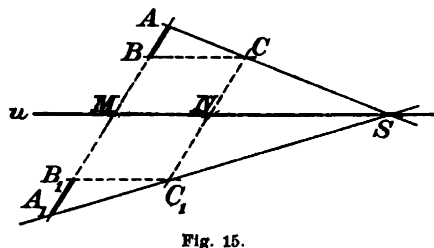


Fig. 15.

$$(1) \qquad AM : A_1M = CN : C_1N = r,$$

wo r eine Konstante der Affinität, und zwar die charakteristische Affinitätskonstante ist, da durch Angabe dieser Konstanten, der Achse und der Richtung die Affinität bestimmt ist. Auf AA_1 nehmen wir noch B und B_1 so an, daß $BC \parallel u \parallel B_1C_1$ wird; dann ist B_1 zu B affin und

$$AB : AM = BC : MS, \quad A_1B_1 : A_1M = B_1C_1 : MS = BC : MS,$$

daher:

$$(2) \qquad AB : A_1B_1 = AM : A_1M_1 = r.$$

Läßt man B mit M, also C mit S und auch B_1 mit M zusammenfallen, so geht Formel (2) in (1) über; beide Formeln beweisen also den Satz:

Bei der Affinität ist das Verhältnis einer Strecke eines Affinitätsstrahles zur affinen Strecke gleich der Affinitätskonstanten.

Die Affinität ist also immer nur dann eine wechselseitige (involutorische) Punktverwandtschaft, wenn ihre Konstante den Wert 1 hat (vgl. 7.).

9. Wir betrachten jetzt ein Dreieck ABC und das dazu affine $A_1B_1C_1$ (Fig. 16); ABC ergänzen wir zu einem Parallelogramm $ABCD$, worauf auch $A_1B_1C_1D_1$ ein solches ist. Die Parallelen BC und AD sowie B_1C_1 und A_1D_1 bestimmen im allgemeinen ein Parallelogramm $PQRS$, von dem die Ecken P und R auf der Affinitätsachse u liegen. Eine Ausnahme erleidet dieser Satz nur, wenn die genannten Parallelen auch zu u parallel sind. Jetzt finden zwischen den Inhalten der genannten Figuren folgende Beziehungen statt:

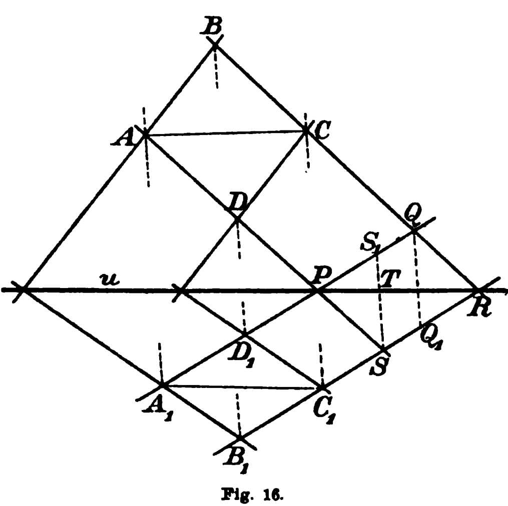


Fig. 16.

$$(3) \qquad ABCD : PQRS = AD : PS = A_1D_1 : PS_1,$$

$$(4) \qquad A_1B_1C_1D_1 : PQRS = A_1D_1 : PQ,$$

da Parallelogramme mit gleicher Höhe sich verhalten wie die Grundlinien. Aus (3) und (4) folgt:

$$ABCD : A_1B_1C_1D_1 = PQ : PS_1 = RS : PS_1,$$

und wenn T den Schnittpunkt von SS_1 mit u bezeichnet, ist:

$$RS : PS_1 = ST : S_1T,$$

mithin:

$$ABC : A_1B_1C_1 = ABCD : A_1B_1C_1D_1 = ST : S_1T,$$

d. h.: **Das Verhältnis einer Fläche zu ihrer affinen Fläche ist konstant, nämlich gleich der Affinitätskonstante.**

Das ist zunächst von Dreiecken bewiesen, wobei der oben erwähnte Ausnahmefall leicht noch zu erledigen ist, dann von allen geradlinig

begrenzten Figuren, da sie sich in Dreiecke zerlegen lassen, und endlich auch von krummlinig begrenzten Flächen, da sie sich durch umgeschriebene und eingeschriebene Polygone in unbegrenzter Annäherung ersetzen lassen.

10. Aus der Metrik des Winkels wollen wir nur die Frage nach denjenigen rechten Winkeln aufwerfen, deren affin entsprechende Winkel ebenfalls rechte sind. Ist UPV (Fig. 17) ein Winkel, dessen Schenkel die Affinitätsachse w in U und V treffen, so ist, wenn P_1 den zu P affinen Punkt bezeichnet, UP_1V der affine Winkel. Sind nun diese Winkel beide einem rechten gleich, so liegen die Punkte U, V, P, P_1 auf einem Kreise, der von w halbiert wird. Dieser

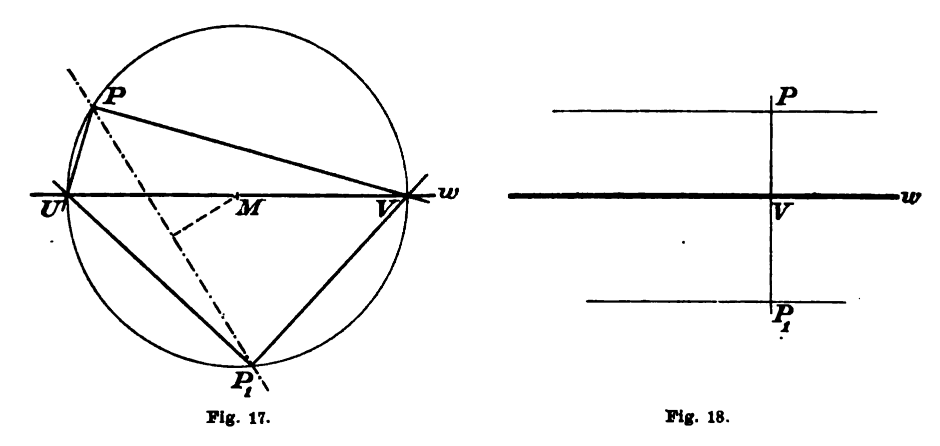


Fig. 17. Fig. 18.

Kreis ist aber durch w, P und P_1 bestimmt, da sein Zentrum M auf dem Mittellote von PP_1 liegen muß, und zwar eindeutig bestimmt, wenn dieses Lot nicht mit w identisch ist; in diesem Ausnahmefalle liegen P und P_1 zu w symmetrisch, und die Affinität ist dann eine axiale Symmetrie, bei der jeder Winkel dem entsprechenden gleich ist. Wenn hingegen PP_1 zwar auf w senkrecht steht, aber P und P_1 nicht zu w symmetrisch liegen (Fig. 18), so artet der Kreis der Figur 17 in die Gerade PP_1 aus, V ist der Schnittpunkt von PP_1 mit w, U ist der unendlich ferne Punkt von w, und der gesuchte rechte Winkel mit dem Scheitel P ist also derjenige, dessen einer Schenkel auf w senkrecht steht.

Alles zusammenfassend haben wir den Satz:

> Vom Falle der axialen Symmetrie abgesehen ist jeder Punkt der Ebene der Scheitel eines einzigen rechten Winkels, der dem affinen gleich ist,

und die Konstruktion dieses Winkels ist aus Figur 17 zu entnehmen.

Dieser Satz bedarf noch des Beweises für den Fall, daß P auf der Affinitätsachse w liegt, wo unsere Konstruktion versagt. Da aber parallelen Geraden immer wieder parallele Geraden entsprechen, so können wir feststellen:

Die rechten Winkel, die ihren affinen gleich sind, liegen zueinander parallel.

Daher gilt der vorige Satz auch in dem erwähnten Falle.

11. Bisher haben wir nur die affinen Bilder des Punktes und der Geraden untersucht. Um zu krummen Linien die affinen zu finden, nimmt man auf ihnen hinlänglich viel Punkte an und sucht die dazu affinen. Die Tangenten einer Kurve gehen durch Affinität in die Tangenten der affinen Kurve über. Diese punktweise Übertragung einer Kurve wird immer dann eintreten müssen, wenn ihr Bildungsgesetz unbekannt oder zu kompliziert ist, um für die Konstruktion daraus Nutzen zu ziehen. Dagegen lohnt es sich, das affine Bild des Kreises eingehender zu untersuchen, weil sich dabei einfache Konstruktionen ergeben. Diesem Gegenstande sei der nächste Paragraph gewidmet, dann kehren wir wieder zum Darstellungsproblem zurück, um die gewonnene Erkenntnis anzuwenden.

§ 4. Die Ellipse als affines Bild des Kreises.

1. Sehr viele Aufgaben der darstellenden Geometrie führen auf die Konstruktion der zu einem Kreise affinen Kurve. Diese Kurve ist, wie wir bereits verraten wollen, eine Ellipse. Um im folgenden jedoch möglichst elementar vorgehen zu können, wollen wir umgekehrt jenes affine Bild des Kreises als Ellipse definieren und bei der Herleitung konstruktiv wichtiger Eigenschaften der Ellipse ausschließlich diese Definition verwenden, bis sich ihre Gleichwertigkeit mit den bekannten Definitionen ergibt. Es sei also das affine Bild ε eines Kreises k zu untersuchen; bei der Affinität gehöre k zu dem ebenen Systeme Σ', dessen Punkte einen Akzent erhalten, ε dagegen zu dem Systeme Σ, dessen Punkte keine Marke bekommen. Die Affinitätsachse sei w. Da halbierte Strecken durch Affinität wieder in halbierte Strecken übergehen, so folgt:

Die Ellipse hat einen und nur einen Mittelpunkt, d. h. einen Punkt, der alle durch ihn gehenden Sehnen halbiert. Sie ist eine geschlossene Kurve, die von einer Geraden höchstens in zwei Punkten geschnitten wird und durch einen Punkt höchstens zwei Tangenten sendet. Durch jeden



Punkt der Kurve geht eine einzige Tangente derselben, nämlich die Tangente dieses Punktes.

Die Sehnen durch den Mittelpunkt heißen Durchmesser. Die zu zwei aufeinander senkrechten Kreisdurchmessern affinen Durchmesser der Ellipse heißen zueinander konjugiert. Die Mittelpunkte paralleler Sehnen liegen auf einem Durchmesser; dieser ist konjugiert zu dem unter jenen Sehnen enthaltenen Durchmesser. Die Eigenschaft zweier Durchmesser, zueinander konjugiert zu sein, hängt demnach nicht von der benutzten Affinität ab, da die Mittelpunkte jener Sehnen durch die Kurven selbst bestimmt sind. Von zwei konjugierten Durchmessern halbiert jeder die zum anderen parallelen Sehnen. Die Tangenten im Endpunkte eines Durchmessers sind zum konjugierten Durchmesser parallel.

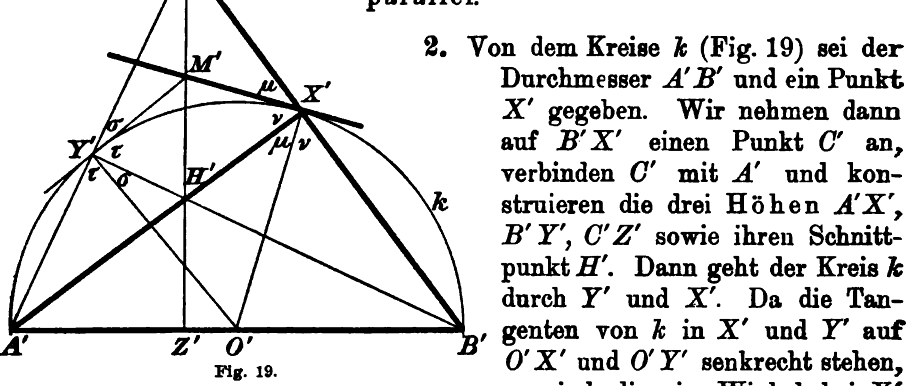


Fig. 19.

2. Von dem Kreise k (Fig. 19) sei der Durchmesser $A'B'$ und ein Punkt X' gegeben. Wir nehmen dann auf $B'X'$ einen Punkt C' an, verbinden C' mit A' und konstruieren die drei Höhen $A'X'$, $B'Y'$, $C'Z'$ sowie ihren Schnittpunkt H'. Dann geht der Kreis k durch Y' und X'. Da die Tangenten von k in X' und Y' auf $O'X'$ und $O'Y'$ senkrecht stehen, so sind die vier Winkel bei X' einander paarweise gleich, ebenso bei Y', was in der Figur ersichtlich gemacht ist, und in den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken

$A'X'B'$ und $C'X'H'$ sind die Gerade $O'X'$ und die Tangente in X' homolog,

$A'Y'B'$ und $H'Y'C'$ sind die Gerade $O'Y'$ und die Tangente in Y' homolog.

Da aber $O'X'$ bzw. $O'Y'$ die Gerade $A'B'$ halbiert, so müssen jene Tangenten durch den Mittelpunkt M' von $C'H'$ gehen. Daraus ergibt sich eine auf die Ellipse leicht zu übertragende Linealkonstruktion des Kreises:

Wenn der Durchmesser $A'B'$ und ein weiterer Punkt X' eines Kreises k gegeben sind, so nehme man auf $B'X'$ einen Punkt C' an, fälle $C'Z' \perp A'B'$ und bestimme den Schnittpunkt H' von $C'Z'$ und $A'X'$. Ist M' die Mitte von $H'C'$, so ist $M'X'$ die Tangente von k

in X'. Ferner schneiden sich die Geraden $B'H'$ und $A'C'$ in einem Kreispunkte Y', von dem $Y'M'$ die Tangente ist. Die bei dieser Konstruktion nicht variierenden Geraden sind in der Figur kräftig ausgezogen.

Bei dieser Konstruktion ist nur einmal ein Lot gefällt worden: $C'Z' \perp A'B'$. Dafür kann man auch sagen, $C'Z'$ habe die Richtung des zu $A'B'$ konjugierten Durchmessers. So ausgesprochen überträgt sich diese Konstruktion durch Affinität auf die Ellipse und ergibt uns folgende

3. **Fundamentalkonstruktion der Ellipse**; fundamental ist gemeint vom Standpunkte unserer Theorie aus.

Von einer Ellipse ε seien gegeben: ein Durchmesser AB, die Richtung r des dazu konjugierten Durchmessers sowie ein dritter Ellipsenpunkt X.

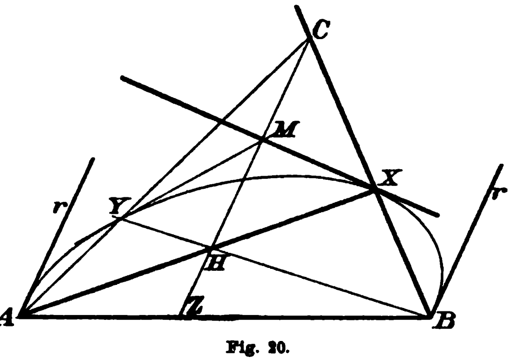


Fig. 20.

1. Konstruktion der Tangente in X (Fig 20): Man nimmt auf BX einen Punkt C an, zieht $CZ \parallel r$ und bringt diese Gerade mit AX (in H) zum Schnitt; ist M die Mitte von HC, so ist MX die Tangente.
2. Konstruktion weiterer Ellipsenpunkte samt ihren Tangenten. Die Geraden BH und AC treffen sich in einem Punkte Y der Ellipse, dessen Tangente YM ist. Die bei dieser Konstruktion nicht variierenden Geraden sind in der Figur kräftig ausgezogen.

Läßt man C auf BX wandern, so bewegt sich M auf der Tangente von X, der Punkt H auf AX und Y durchläuft die Ellipse; diese ist also durch die als gegeben angenommenen Stücke vollkommen bestimmt. Daher gilt der Satz:

> Wenn von einer Ellipse zwei konjugierte Durchmesser der Größe und Lage nach gegeben sind, so ist die Ellipse eindeutig bestimmt.

Denn damit sind ein Durchmesser, die konjugierte Durchmesserrichtung und ein weiterer Punkt der Ellipse gegeben, nämlich einer der Endpunkte des konjugierten Durchmessers.

Jede Parallelprojektion einer Ellipse und jede zu ihr affine Kurve ist wieder eine Ellipse.

Denn jene abgeleitete Kurve ε kann durch die Fundamentalkonstruktion bestimmt werden, weil diese sich durch Parallelprojektion oder Affinität von der Ellipse ε_1 auf die abgeleitete Kurve ε überträgt; jede durch diese Konstruktion erhaltene Kurve ist aber eine Ellipse, d. h. als affines Bild eines Kreises auffaßbar, denn man braucht in Figur 20 nur AB als Affinitätsachse aufzufassen, auf dem Mittellote von AB einen Punkt X' so anzunehmen, daß $OX' = OA$ ist, und dem Punkte X den Punkt X' zuzuordnen. Die zur Ellipse ε affine Kurve wird dann ebenfalls durch die Fundamentalkonstruktion erhalten und ist ein Kreis, wie sich leicht aus Figur 19 ergibt.

4. Aus dem letzten Hauptsatze ergibt sich eine **zweite Konstruktion einer Ellipse** ε, **von der zwei konjugierte Durchmesser** AB **und** CD **nach Lage und Größe gegeben sind** (Fig. 21).

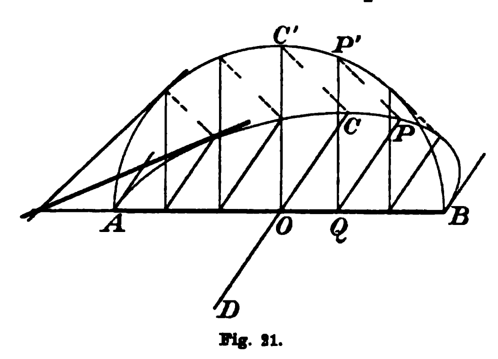


Fig. 21.

Ist O der Mittelpunkt, so errichtet man $OC' \perp OA$, macht $OC' = OA$ und ordnet in einer Affinität mit der Achse AB dem Punkte C den Punkt C' zu. Die zu ε affine Ellipse ist dann der Kreis mit dem Mittelpunkte O und dem Radius OA. Zu jedem Punkte P' des Kreises gehört dann ein Punkt P der Ellipse, der auf dem durch P' (parallel zu $C'C$) gehenden Affinitätsstrahle durch die Gerade PQ bestimmt wird, die durch den Fußpunkt des von P' auf AB gefällten Lotes parallel zu OC gezogen wird.

Unter den Paaren konjugierter Durchmesser einer Ellipse, die kein Kreis ist, befindet sich nach dem Satze über die rechten Winkel § 3, 10. ein einziges, dessen Durchmesser aufeinander senkrecht stehen; sie werden die **Achsen** der Ellipse genannt. Nach 1. ist **die Ellipse zu jeder der beiden Achsen symmetrisch.** Sind die Achsen einer Ellipse einander gleich, so liefert die Fundamentalkonstruktion einen Kreis; wenn also die Ellipse kein Kreis ist, so ist eine der zwei Achsen größer als die andere und wird **Hauptachse** genannt, während die kleinere als **Nebenachse** bezeichnet wird.

Ist eine Ellipse kein Kreis, so sind die Achsen ihre einzigen Symmetrieachsen.

Denn ist die Gerade u eine Symmetrieachse der Ellipse, so halbiert u die auf u senkrechten Sehnen, darunter auch den zu u senkrechten

Durchmesser v, ist also ein Durchmesser und zu v konjugiert. Es gibt aber nur ein Paar konjugierter Durchmesser, die aufeinander senkrecht stehen.

5. Durch Anwendung der soeben angegebenen Ellipsenkonstruktion auf die beiden Achsen findet man eine neue besonders einfache Konstruktion der Ellipse (Fig. 22).

Es seien OB und OA die beiden Halbachsen, OA die größere; um O konstruieren wir die Kreise k' und k'' mit den Radien OA und OB. Dann ist die Ellipse ε

affin zu dem Kreise k' in der Affinität mit der Achse AO, wobei B zu B' affin ist,

affin zu dem Kreise k'' in der Affinität mit der Achse BO, wobei A zu A'' affin ist,

wenn A'' den Schnittpunkt von k'' mit OA bezeichnet. Zu einem Punkte P der Ellipse sei in der ersten Affinität der Punkt P' von k' affin, in der zweiten der Punkt P'' von k''. Dann ist also $P'P$ zu $B'B$ parallel, zu OA senkrecht; der Fußpunkt dieses Lotes sei Q. Dann ist nach § 3, 8.:

$$PP' : PQ = BB' : BO = P''P' : P''O,$$

indem $BB' = P''P'$, $BO = P''O$ ist.

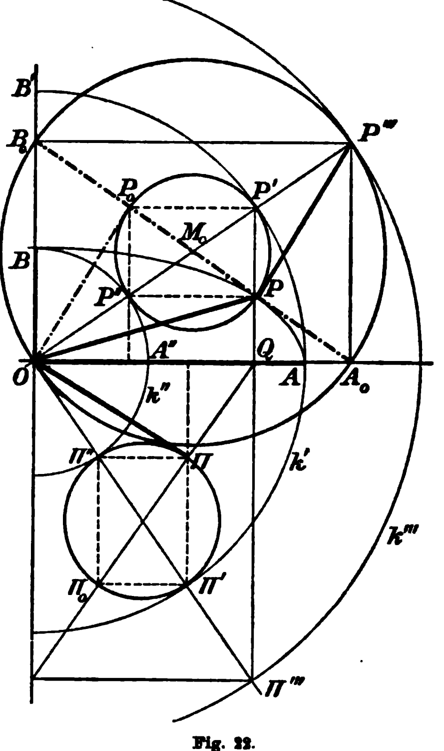


Fig. 22.

Daher liegt P'' auf OP'.

Um also eine Ellipse aus den beiden Halbachsen OA und OB zu bestimmen, konstruiert man die Kreise k' und k'' um das Ellipsenzentrum O mit diesen Halbachsen als Radien, bringt eine Gerade durch O mit den Kreisen in P' und P'' zum Schnitt und zieht durch P' die Parallele zu OB, durch P'' die zu OA. Der Schnittpunkt P dieser Parallelen ist ein Ellipsenpunkt. Eine zu jener Geraden OP' senkrechte Gerade $O\Pi'$ liefert entsprechend auf k', k'' und ε die Punkte Π', Π'' und Π, und es ist dann $O\Pi$ konjugiert zu OP. Sind P''' und Π''' die Schnittpunkte der Halbstrahlen OP' und $O\Pi'$ mit dem Kreise k''', der O zum Mittelpunkte und die Summe $OA + OB$ zum Radius hat, so ist $P'''P$ die Nor-

male der Ellipse in P, $\Pi'''\Pi$ die Normale in Π, und es ist $P'''P = O\Pi$, $\Pi'''\Pi = OP$.

Der letzte Satz wird so bewiesen: Wegen $P'P'' = \Pi''\Pi'$ und Übereinstimmung in den Winkeln ist $P'PP'' \simeq \Pi''\Pi\Pi'$, also $\sphericalangle PP''O = \Pi'''\Pi'\Pi$, $PP'' = \Pi'\Pi$ und ferner ist $\Pi'''\Pi' = OP''$. Daher ist $OP''P \cong \Pi'''\Pi\Pi'$, also ist $\Pi'''\Pi$ gleich der Strecke OP und steht, da $O\Pi''' \perp OP'$ ist, auf ihr senkrecht; $\Pi\Pi'''$ steht daher in Π auf der Tangentenrichtung OP dieses Punktes senkrecht, ist also in der Tat die Normale.

6. Wir können jetzt beweisen, daß die als affines Bild des Kreises definierte Ellipse die Brennpunkteigenschaften hat, durch die man meist die Ellipse definiert. Ist uns eine Ellipse ε als affines Bild eines Kreises gegeben, so konstruieren wir vor allem die Achsen. Ihre halben Längen seien a und b, $b < a$. Durch diese ist die Ellipse der Gestalt nach vollkommen bestimmt. Mit b als Radius konstruieren wir einen Rotationszylinder (Fig. 23), so daß also eine zur Rotationsachse senkrechte Ebene den Zylinder in einem Kreise $\varkappa$ vom Radius b trifft. Auf der Rotationsachse nehmen wir einen Punkt O an, legen durch die Achse eine Ebene η, die den Zylinder in zwei Erzeugenden p, q trifft und bestimmen auf p einen Punkt A, so daß $OA = a$ ist. Die durch OA gehende Normalebene auf η trifft dann den Zylinder in einer Kurve ε', die (durch die Erzeugenden des Zylinders) als Parallelprojektion des Kreises $\varkappa$ erscheint. Nach 2. ist ε' also eine Ellipse (die durch die Fundamentalkonstruktion erhalten werden kann), und da sie zur Ebene η symmetrisch liegt, so ist die Gerade OA eine Symmetrieachse und damit Achse der Ellipse, OA ihre halbe Länge. Die zu OA senkrechte Halbachse ist daher, als Normale von η, gleich dem Radius b des Zylinders. Die Ellipse ε' hat also dieselben Achsen wie ε, ist also zu ε kongruent. Eine mit ε kongruente Ellipse ist somit als Schnitt eines Rotationszylinders dargestellt.

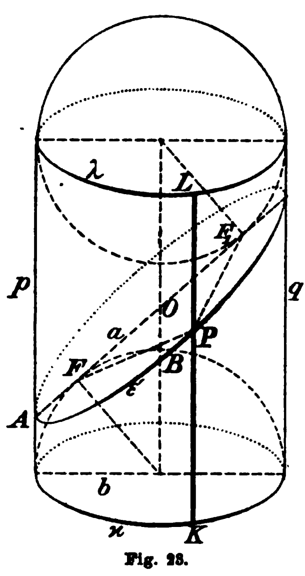


Fig. 23.

Jetzt legen wir in den Zylinder die beiden Dandelinschen[1]) Kugeln, d. h. Kugeln mit dem Radius b, die die Ebene der Ellipse in F und F_1 auf OA berühren. Diese Kugeln berühren den Zylinder

1) Dandelin, 1794—1847, lebte in Lüttich und Namur, zuletzt belgischer Ingenieuroberst.

in zwei Kreisen $\varkappa$ und λ. Ist P irgend ein Punkt von ε', so verbinden wir ihn mit F und F_1 und ziehen die durch ihn gehende Erzeugende des Zylinders, die $\varkappa$ und λ in K und L treffe. Dann sind PF und PK als Tangenten an die eine Kugel einander gleich, ebenso PF_1 und PL; daher:

$$PF + PF_1 = PK + PL = KL = \text{const.},$$

wo KL der von P unabhängige Abstand der Mittelpunkte von $\varkappa$ und λ ist. Damit sind F und F_1 als Brennpunkte von ε' erwiesen, die Definition der Ellipse als affines Bild des Kreises ist also mit der bekannten Definition äquivalent, wonach die Ellipse der Ort der Punkte ist, deren Abstände von zwei festen Punkten eine konstante Summe haben.

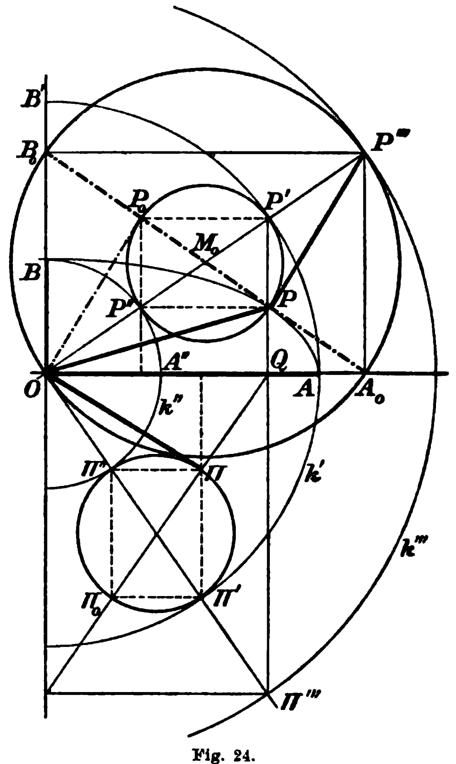


Fig. 24.

7. Aus der Figur 22 sind leicht noch fruchtbare Gedanken herauszuholen, weshalb wir sie noch einmal vornehmen wollen (Fig. 24 a. f. S.). Es war bereits festgestellt worden, daß

$$P'''P \perp O\Pi$$

ist. Sei jetzt M_0 der Mittelpunkt von $P'P''$ und damit von OP'''. Auf M_0P tragen wir $M_0P_0 = M_0P$ so ab, daß M_0 in der Mitte zwischen P_0 und P liegt. Dann sind die Dreiecke PM_0P''' und P_0M_0O nach dem 1 Kongruenzsatze kongruent, daher

$$OP_0 \mathrel{\#} PP''',$$

also

$$OP_0 \perp O\Pi \quad \text{und} \quad = O\Pi.$$

Die Gerade P_0P treffe OB und OA in B_0 und A_0. Da die Strecken PP_0 und $P'P''$ einander halbieren und $P''P \perp PP'$, so ist $P_0P'PP''$ ein Rechteck. Dieses ist zu $B_0P'''A_0O$ ähnlich gelegen, daher ist auch $B_0P'''A_0O$ ein Rechteck,

$$A_0B_0 = OP''' = OA + OB,$$
$$B_0P_0 = OP'' = OB,$$
$$P_0A_0 = OA.$$

Das kann man verwerten zu folgender

Achsenkonstruktion, wenn zwei konjugierte Halbmesser $O\Pi$ und OP nach Größe und Lage gegeben sind:

Man errichtet in O auf $O\Pi$ das Lot und trägt darauf $OP_0 = O\Pi$ ab. Um den Mittelpunkt M_0 von PP_0 als Zentrum lege man den Kreis, der durch O geht; sind A_0 und B_0 seine Schnittpunkte mit PP_0, so sind OA_0 und OB_0 die Achsen der Ellipse der Lage nach. Auf OA_0 trage man $OA = P_0A_0$ ab, auf OB_0 ebenso $OB = P_0B_0$. Dann sind OA und OB die Halbachsen nach Lage und Größe.

Die zu dieser Konstruktion nötigen Geraden und Kreise sind in der Figur durch kräftigeren Strich hervorgehoben. Muß eine Ellipse aus anderen Gründen als affines Bild eines Kreises konstruiert werden, so wird man die Achsen mittels dieser Affinität (nach § 3, 10.) oft schneller finden.

§ 5. Anwendungen.

1. Der Neunpunktekreis. Die Fundamentalkonstruktion in § 4 stützt sich auf eine Eigenschaft des Dreiecks, die wir um ihres planimetrischen Interesses wegen noch etwas weiter verfolgen wollen. Im Anschluß an Figur 19 war festgestellt worden, daß der Kreis mit der Dreiecksseite $A'B'$ als Durchmesser die beiden anderen Seiten in zwei Punkten X' und Y' trifft, deren Tangenten durch den Mittelpunkt M' des „oberen Abschnittes" der zu $A'B'$ gehörigen Höhe $C'Z'$ gehen. Dabei soll als oberer Höhenabschnitt immer die Strecke zwischen dem Höhenpunkte und der Ecke des Dreiecks gelten. Da nun, wenn O' den Mittelpunkt von $A'B'$ bezeichnet, die Winkel $O'X'M'$, $O'Y'M'$ und $O'Z'M'$ rechte sind, so liegen die Punkte O', X', Y', Z' auf einem Kreise; dieser ist aber durch die drei Höhenpunkte X', Y', Z' schon bestimmt und muß, wie er durch die Mitte einer Seite und eines oberen Höhenabschnittes geht, so auch durch die anderen gehen. Daraus folgt:

Satz 1. Die drei Höhenfußpunkte eines Dreiecks, die drei Mitten seiner Seiten und die drei Mitten seiner oberen Höhenabschnitte liegen auf einem Kreise, dem Feuerbachschen[1]) oder Neunpunktekreise.

2. Metrische Eigenschaften der Ellipse. Die Affinität ist ein wichtiges Übertragungsprinzip der darstellenden Geometrie. Wir wollen, um die Art seiner Anwendung zu zeigen, noch einige

1) Karl Wilhelm Feuerbach, 1800—1834, Sohn des berühmten Kriminalisten Anselm F., Bruder des Philosophen Ludwig und des Archäologen Anselm F., Oheim des Malers Anselm F.

metrische Eigenschaften der Ellipse vom Kreis her herübernehmen. (Vgl. Bd. II, § 80.)

Sind a und b die große und die kleine Halbachse der Ellipse ε in Figur 24, so verhält sich ihr Flächeninhalt ε zu dem des Kreises k', zu dem sie affin ist, wie die Strecke OB des Affinitätsstrahles BB' zu der affinen Strecke OB' (§ 3, 9.):

$$\varepsilon : k' = OB : OB' = b : a, \quad \varepsilon = \frac{k' b}{a} = \frac{a^2 \pi b}{a} = ab\pi.$$

Satz 2. Die Fläche einer Ellipse mit den Halbachsen a und b ist $ab\pi$.

Von dem Satze über die Flächeninhalte affiner Figuren wollen wir noch eine Anwendung auf die Parallelogramme machen, die eine Ellipse in den Endpunkten konjugierter Durchmesser berühren. Ihnen entsprechen am Kreise die umgeschriebenen Quadrate; diese sind einander gleich. Das Verhältnis jedes solchen Quadrates zu dem affinen Parallelogramm ist gleich der Affinitätskonstante: also sind auch die Parallelogramme einander gleich.

Satz 3. Die Parallelogramme, deren Seiten eine Ellipse in den Endpunkten konjugierter Durchmesser berühren, sind inhaltsgleich.

In Figur 24 ist das aus $\Pi O P$ zu ergänzende Parallelogramm ein Viertel eines jener umgeschriebenen, also gleich dem aus den Halbachsen $OA = a$ und $OB = b$ zu ergänzenden Rechteck ab, also

$$OP \cdot O\Pi \sin PO\Pi = ab.$$

In dem Dreieck OPP''' ist andererseits $OP''' = a + b$, $PP''' = O\Pi$, $\sphericalangle\, OPP''' = \sphericalangle\, PO\Pi + 90^0$, also nach dem Kosinussatze:

$$(a + b)^2 = OP^2 + O\Pi^2 - 2\,OP \cdot O\Pi \cos (PO\Pi + 90^0),$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = OP^2 + O\Pi^2 + 2\,OP \cdot O\Pi \sin PO\Pi = OP^2 + O\Pi^2 + 2ab,$$

$$a^2 + b^2 = OP^2 + O\Pi^2,$$

woraus folgt:

Satz 4. Die Summe der Quadrate konjugierter Halbmesser ist konstant, nämlich gleich der Summe der Quadrate der Halbachsen.

Analytisch sind diese Sätze in § 80 des II. Bandes bewiesen. Auch der Satz in Nr. 2 ebenda kann mittels der Affinität leicht vom Kreise auf die Ellipse übertragen werden, wenn man in Figur 226 l. c. den Kreis über AA' als Durchmesser anlegt, in O auf OA' das Lot

$OB_0 = OA'$ errichtet und in einer Affinität mit der Achse AA' dem Punkte B den Punkt B_0 zuordnet. —

Die Tangenten u^0, v^0 in den Endpunkten U^0, V^0 (Fig. 25)[1]) des Durchmessers eines Kreises k mögen von einer dritten Tangente dieses Kreises in A_1^0 und B_1^0 getroffen werden; der Berührungspunkt sei C_1^0, das Zentrum M^0. Da

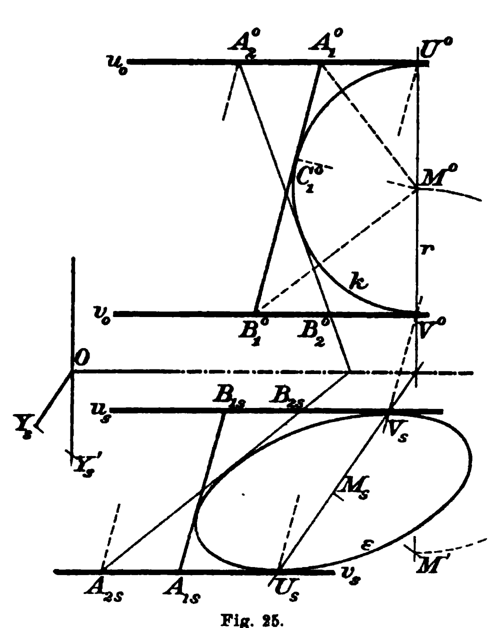


Fig. 25.

$$\sphericalangle\, U^0M^0A_1^0 = \sphericalangle\, A_1^0M^0C_1^0,$$
$$\sphericalangle\, C_1^0M^0B_1^0 = \sphericalangle\, B_1^0M^0V^0$$

ist, so ist $A_1^0M^0B_1^0$ ein rechtwinkliges Dreieck. Daher:

$$C_1^0A_1^0 \cdot C_1^0B_1^0 = M^0C_1^{0\,2} = r^2,$$

also:

$$U^0A_1^0 \cdot V^0B_1^0 = r^2.$$

Sind A_2^0 und B_2^0 die Schnittpunkte einer anderen Tangente mit u^0 und v^0, so ist ebenso:

$$U^0A_2^0 \cdot V^0B_2^0 = r^2,$$

also:

$$\frac{U^0A_1^0}{U^0A_2^0} \cdot \frac{V^0B_1^0}{V^0B_2^0} = 1.$$

Dem Kreise entspricht affin eine Ellipse ε mit zwei (parallelen) Tangenten u_s, v_s in den Endpunkten eines Durchmessers U_sV_s, die von einer dritten und vierten Tangente in A_{1s} und B_{1s} bezw. A_{2s}, B_{2s} getroffen werden. Da

$$U^0A_1^0 : U^0A_2^0 = U_sA_{1s} : U_sA_{2s},$$

$$V^0B_1^0 : V^0B_2^0 = V_sB_{1s} : V_sB_{2s},$$

so ist

$$\frac{U_sA_{1s}}{U_sA_{2s}} \cdot \frac{V_sB_{1s}}{V_sB_{2s}} = 1,$$

also

$$U_sA_{1s} \cdot V_sB_{1s} = U_sA_{2s} \cdot V_sB_{2s}.$$

Daher der Satz:

Satz 5. Auf je zwei parallelen Tangenten einer Ellipse werden durch die Berührungspunkte und durch die Schnittpunkte mit einer dritten Tangente zwei Strecken

1) Die Bezeichnungen der Figur sind so gewählt, daß sie noch einem anderen Zwecke dienen können.

begrenzt, deren Produkt bei allen Lagen der dritten Tangente konstant ist.

Ein schöner Satz über die Ellipse läßt sich aus der Figur des Ankreises der Seite AB eines Dreiecks ABC ableiten, wenn man im Mittelpunkte O dieses Ankreises auf OC die Senkrechte errichtet und mit CA und CB in U und V zum Schnitt bringt (Fig. 26). Da die Dreiecke AOU und OBV wegen Übereinstimmung in den Winkeln einander ähnlich sind, so ist:

$$UA : UO = OV : BV,$$
$$UA \cdot VB = OU \cdot OV = OU^2;$$

also ist das Produkt $UA \cdot VB$ für alle Lagen der Tangente AB dasselbe. Wir konstruieren jetzt zu A, B, C die zentrisch symmetrischen Punkte A_0, B_0, C_0 bezüglich O als Symmetriezentrum. Dann ist $A_0B_0 \| AB$, $UB_0 = VB$, also:

$$UA \cdot UB_0 = OU^2 = \text{const.}$$

bei allen Lagen der Tangenten AB und A_0B_0. Daher der

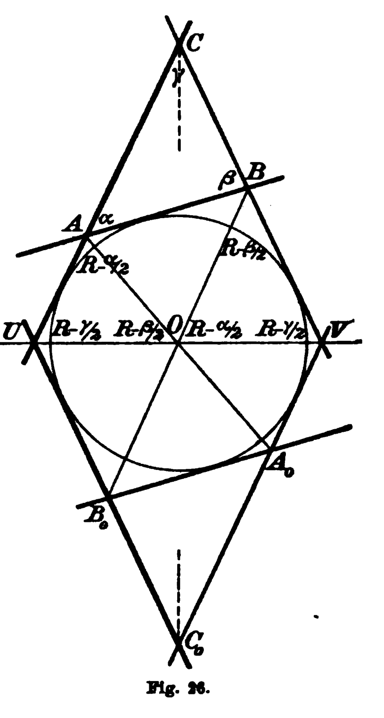


Fig. 26.

Satz 6. Auf den zwei von einem Punkte ausgehenden Tangenten einer Ellipse werden durch diesen Punkt und durch zwei veränderliche parallele Tangenten zwei Strecken begrenzt, deren Produkt für alle Lagen der parallelen Tangenten dasselbe ist;

wiederum ist nämlich das Verhältnis zweier solcher Produkte gleich 1. Aus $UA \cdot VB = OU^2$ folgt ebenso:

Satz 7. Wenn man von einem Punkte C an eine Ellipse die Tangenten legt und mit dem zu OC konjugierten Durchmesser in U und V zum Schnitt bringt, so werden auf ihnen durch U und V sowie durch eine veränderliche Tangente zwei Strecken UA und VB begrenzt, deren Produkt für alle Lagen der veränderlichen Tangente dasselbe ist.

3. Die wahre Länge einer durch Schrägbild und Orthogonalprojektion (auf die Bildebene) gegebenen Strecke.

Die Schrägbilder der Endpunkte seien A_s, B_s (Fig. 27), ihre Orthogonalprojektionen auf die xz-Ebene A'', B''. Man wird die Ebene $ABB''A''$ um $A''B''$ in die Bildebene umlegen, oder, was noch etwas kürzer ist, durch B die Gerade $BC \# A''B''$ ziehen und das rechtwinklige Dreieck ACB um BC drehen, bis es zur Bildebene parallel wird. Das Schrägbild der so umgelegten Strecke gibt dann ihre wahre Länge an. Es ist $C_s B_s \# A''B''$. Sei wieder, wie in Figur 25, zur Festlegung der Projektionsrichtung ein Punkt Y der y-Achse durch Bild Y_s und Umlegung OY' von OY auf die z-Achse gegeben. Die Parallelen durch C_s und A_s zu OY' und $Y_s Y'$ treffen sich in einem Punkte A^* derart, daß $C_s A^*$ die wahre Länge von $C_s A_s$ ist. Jetzt hat man nur noch auf $B_s C_s$ in C_s das Lot $C_s \bar{A} = C_s A^*$ zu errichten. Dann ist $B_s \bar{A}$, als Bild der zur xz-Ebene parallel gedrehten Strecke $B_s A_s$, die wahre Länge von BA.

Fig. 27.

4. Von einem Punkte P auf eine Ebene η das Lot zu fällen. P sei gegeben durch sein Bild P_s und seine Orthogonalprojektion P'' auf die Bildebene xz; die Ebene η durch die Bilder e_2 und e_{1s} ihrer Schnittlinien e_2 und e_1 mit der xy-Ebene (Fig. 28). Das gesuchte Lot liegt in jeder durch P gehenden Normalebene von η, also auch in derjenigen, die auf η und xz zugleich senkrecht steht. Diese Ebene ν steht dann senkrecht auf der Schnittlinie e_2 von η und xz und enthält die Gerade PP'', da diese auf xz normal steht. Daher schneidet ν die xz-Ebene in einer durch P'' gehenden Geraden, die auf e_2 senkrecht steht. Der erste Schritt zur Konstruktion wird also

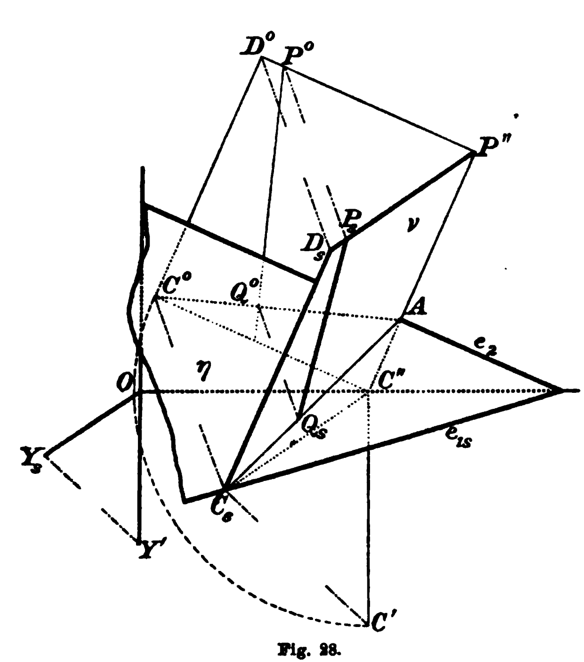


Fig. 28.

der sein, von P'' auf e_2 das Lot zu fällen; seine Schnittpunkte mit e_2 und mit der x-Achse seien A und C''. Durch die Geraden PP'' und $P''C''$ ist die Ebene ν festgelegt; zur Erhöhung der Anschaulichkeit haben wir sie in Figur 28 durch ein Rechteck $DP''C''C$ begrenzt dargestellt, dessen Ecke C auf e_1 liegt; $C''C_s$ ist parallel zu D_sP'', also zu OY_s. Die Gerade D_sC_s ist also zur Konstruktion nicht notwendig. Diese Ebene ν legen wir nun um die Gerade $P''C''$ auf die Bildebene. Dabei kommt CC'' in die Lage $C^0C'' \perp C''P''$, wo C^0C'' die wahre Länge von $C''C_s$ ist. Man zieht also durch C'' und C_s die Parallelen zu OY' und Y_sY', die sich in C' treffen, und trägt auf dem in C'' auf $C''P''$ errichteten Lote $C''C^0 = C''C'$ ab. Diese Umlegung von ν kann aber nach § 3, 2. durch eine Parallelprojektion in der Richtung C^0C ersetzt werden; zwischen den Bildern der Punkte von ν und ihren Umlegungen besteht also eine Affinität mit $C''P''$ als Achse und C_s, C^0 als homologen Punkten. Daher findet man die Umlegung $P''P^0$ von $P''P$, indem man durch P'' zu $C''C^0$, sowie durch P_s zu C_sC^0 die Parallele zieht; der Schnittpunkt ist P^0. Die Gerade AC^0 ist die Umlegung der Schnittlinie von ν mit η. Fällt man also $P^0Q^0 \perp C^0A$, so ist P^0Q^0 das umgelegte Lot auf ν. Daher ist Q_s der Schnittpunkt von AC_s mit der durch Q^0 zu C^0C_s gezogenen Parallele, und P_sQ_s ist das Bild des gesuchten Lotes, P^0Q^0 seine wahre Länge. Der gesperrt gedruckte Teil des Textes enthält die endgültige Konstruktion.

5. Einen Kreis der xy-Ebene darzustellen (Fig. 25). Der Mittelpunkt M ist gegeben durch sein Bild M_s, der Radius sei r. In Figur 25 ist die xy-Ebene um die x-Achse nach oben gedreht, bis zum Zusammenfallen mit der Bildebene; man könnte natürlich auch nach unten drehen, wie in Figur 9. Der weitere Verlauf der Konstruktion ist aus der Figur hinreichend zu ersehen, die übrigens, zu anderen Zwecken entworfen, viel mehr Hilfslinien aufweist, als nötig sind; die zu den beiden Koordinatenachsen parallelen konjugierten Durchmesser hätte man direkt bestimmen und aus ihnen die Achsen konstruieren können.

Neu gegen die Figuren 9, 10 ist in Figur 25 die Umklappung der xy-Ebene nach oben, die ersichtlich den Vorzug hat, den für das Bild dienenden Raum nicht mit zuviel Hilfslinien zu überdecken. Ein anderes ebenso praktisches wie anschauliches Drehungsverfahren werden wir in der folgenden Aufgabe kennen lernen, das allerdings schon in Figur 27 verwendet worden ist, dort aber nicht so recht hervortritt.

6. Darstellung eines ebenflächigen Körpers (Fig. 29). Die bestimmenden Eckpunkte sind auf die xy-Ebene gelotet und die Ge-

samtheit dieser Projektionen — wir werden sie im nächsten Abschnitte als **Grundriß** kennen lernen — ist gegeben. Um den für das Bild dienenden Raum von den Hilfslinien frei zu halten, ist die xy-Ebene quadratisch begrenzt und um die vordere, zur x-Achse parallele Quadratseite u gedreht, bis sie zur Bildebene parallel wird. Die gedrehte xy-Ebene erscheint dann bildlich in ihrer wahren Gestalt. Im übrigen spricht die Figur 29 für sich. Zwischen dem Bilde der xy-Ebene und dem der Umdrehung besteht Affinität mit u_s als Achse und B^0, B_s als zugeordneten Punkten.

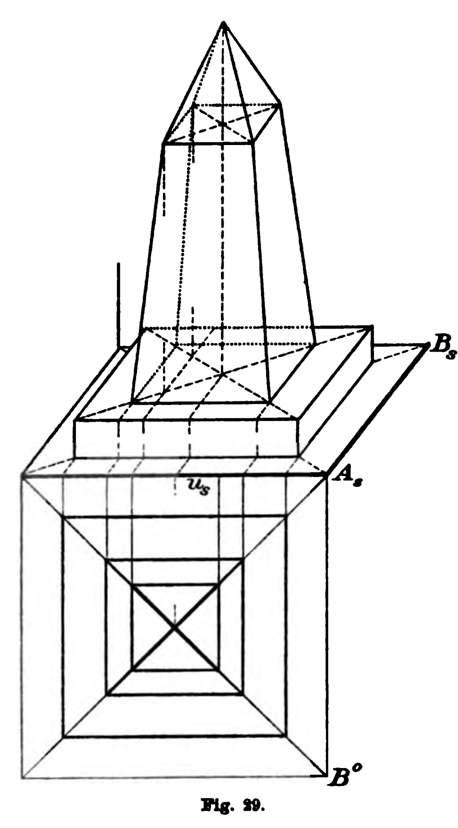


Fig. 29.

7. Darstellung der Kugel. Während das Schrägbild eines ebenflächigen Körpers einfach seine Kanten und Ecken wiedergibt, zwischen die man seine Ebenen sich hineindenkt, muß bei einem krummflächigen Körper, z. B. bei der Kugel, erst schärfer definiert werden, was ihr Bild eigentlich leisten soll. Bezüglich eines solchen Körpers, z. B. einer Kugel k, zerfallen die Projektionsstrahlen (deren Richtung wir fest angenommen denken) in drei Gruppen: in schneidende, berührende und nichtschneidende. Die berührenden bilden die Grenze zwischen den schneidenden und nichtschneidenden, ihr Schnitt mit der Bildebene wird also dort die Punkte, welche Kugelpunkte projizieren, von denen trennen, die es nicht tun. Könnte ein Auge aus dem unendlich fernen Punkte der Projektionsstrahlen längs diesen blicken, so würden die schneidenden Projektionsstrahlen ihm Seheindrücke vom Körper vermitteln, die nichtschneidenden nicht, und die berührenden würden die Grenze bilden, sie würden die vom Körper herrührenden Seheindrücke von denen der Umgebung scheiden. Diese berührenden Strahlen folgen aufeinander stetig (wenn der Körper es ist, was wir voraussetzen) und berühren den Körper längs einer Kurve oder mehrerer Kurven u, deren Gesamtheit der **Umriß** des Körpers für den gewählten Sehpunkt genannt wird. Der Umriß

scheidet also für das Auge die vom Körper herrührenden Seheindrücke von denen der Umgebung. Die Projektion dieses wahren Umrisses heißt der scheinbare, immer in bezug auf den gewählten Sehpunkt verstanden.

Die Kugel k möge den Nullpunkt O des Koordinatensystems zum Zentrum haben; die Projektionsrichtung YY_s sei durch Y_s und die Umlegung OY' von OY auf die z-Achse gegeben wie in Fig. 27; in Fig. 30 sind der Deutlichkeit halber diese Bestimmungsstücke weggelassen. Die den Umriß erzeugenden Projektionsstrahlen umhüllen die Kugel längs des auf der Projektionsrichtung YY_s senkrechten Großkreises, bilden also einen zur Bildebene schräg stehenden Rotationszylinder mit der Achse YY_s. Der scheinbare Umriß der Kugel, nämlich der im Bilde, ist die Schnittkurve dieses Zylinders mit der Bildebene, also eine Ellipse (was z. B. die Figur der Dandelinschen Kugeln im Zylinder, Fig. 23, beweist). Diese soll jetzt dargestellt werden. Die Schnittpunkte der Kugel mit den Achsen x, y, z seien A, B, C, und B_s das Bild von B. Dieses kann bereits konstruiert werden. Dann ist auch BB_s ein Projektionsstrahl, der von dem zu BB_s senkrechten Großkreise in einem Punkte U getroffen werde. Wir legen die Ebene BOB_s mitsamt allen in ihr liegenden Projektionsstrahlen um OB_s in die Bildebene. Dazu ziehen wir $OB^0 \perp OB_s$ und machen OB^0 gleich dem Radius r der Kugel. Der in der Ebene BOB_s liegende Kugelkreis α geht durch die Umlegung in einen Kreis α^0 mit O als Zentrum und r als Radius über, den wir konstruieren. Zieht man eine zu B^0B_s parallele Tangente p_0 an diesen Kreis α^0, und ist U^0 ihr Berührungspunkt, so ist p_0 die Umlegung eines die Kugel berührenden Projektionsstrahles p mit dem Berührungspunkte U, von dem U_0 die Umlegung ist. Der Schnittpunkt U_s von p und also auch von p^0 mit OB_s ist daher ein Punkt der (scheinbaren) Umrißellipse u_s. Diese ist die Projektion des Großkreises u, dessen Ebene durch OB^0 und durch U geht, wobei α^0 samt B^0 als Schnittkreis und Schnittpunkt der Kugel mit der Bildebene aufzufassen sind. Da nun durch Parallelprojektion aufeinander senkrechte Durchmesser von u in konjugierte Durchmesser von u_s übergehen, so sind OB^0 und OB_s konjugierte Halbmesser von u_s, und, weil sie aufeinander senkrecht stehen, die Halbachsen. Dadurch ist u_s bestimmt.

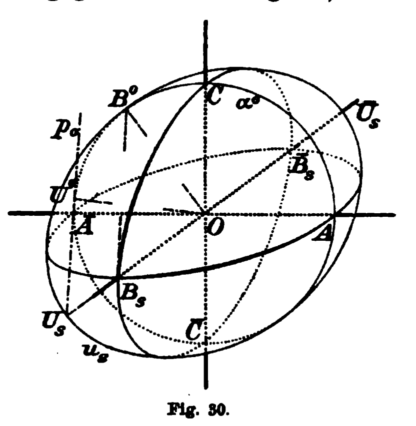


Fig. 30.

Von Interesse ist noch, daß B_s ein Brennpunkt der Ellipse u_s ist. Denn es ist $OU^0U_s \cong B^0OB_s$, daher $B^0B_s = OU_s$ (vgl. Bd. II, § 66).

8. Zur Erhöhung der Anschaulichkeit sind in Figur 30 noch die drei Schnittkreise der Kugel mit den Koordinatenebenen abgebildet. Davon erscheint der in der xz-Ebene liegende in seiner wahren Gestalt, die beiden anderen stellen sich als Ellipsen dar, die zu jenem Kreise affin sind; für die Bildellipse des Kreises in der xy-Ebene ist OA die Affinitätsachse, OA und OB_s sind konjugierte Halbmesser, aus denen in Figur 30 durch Konstruktion der Achsen und der Krümmungskreise in ihren Endpunkten (vgl. Bd. II, § 81) die Ellipse erhalten wurde; doch sind diese Nebenkonstruktionen in die Figur nicht aufgenommen worden. Ebenso sind OC und OB_s konjugierte Halbmesser der Ellipse, die den Kreis in der xz-Ebene abbildet. In Figur 31 sind von diesen Ellipsen die Tangenten in A, B_s und C sowie in dazwischen liegenden Punkten konstruiert unter Benutzung der Affinität. Solche leicht zu ziehende Tangenten wird man auch bei der Konstruktion der Ellipse aus den Hauptachsen gern mit verwerten.

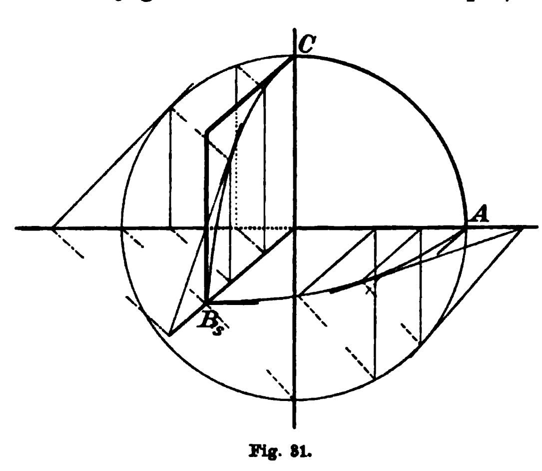


Fig. 31.

9. Der erste Eindruck der Figur 30 ist befremdend und zeigt eine Schattenseite aller streng mathematisch konstruierten Bilder: nämlich ihre Abhängigkeit vom gewählten Projektionszentrum. Man lege die Figur flach hin auf den Tisch, errichte in O auf dem Blatte in Gedanken das Lot $OB = OB_s$, halte einen Bleistift in der Richtung B_sB und blicke allein mit dem rechten Auge aus etwa 60—80 cm Entfernung in der Richtung dieses Stiftes so, daß er in seine obere Begrenzung zusammengeschrumpft erscheint, und sofort wird die Figur mit täuschender Plastik eine Kugel darzustellen scheinen. Die Umrißellipse erscheint dabei bereits als Kreis, obwohl sie auf den Anblick aus viel größerer Entfernung berechnet ist. Diese Vorschrift gilt für alle Schrägbilder.

Will man sich dieser kleinen Mühe nicht unterziehen, so kann man sich mit dem ungewohnten Anblick der Figur auch durch die Erwägung aussöhnen, daß ein Schrägbild als Schattenbild bei direkter

Sonnenbeleuchtung aufgefaßt werden kann: die von der Sonne ankommenden Lichtstrahlen sind praktisch so gut wie parallel, erzeugen also einen zylindrischen Schattenraum hinter der Kugel, dessen Schnitt mit einer zur Lichtrichtung geneigten Ebene eine Ellipse ist.

§ 6. Technik der darstellenden Geometrie.

1. Während die zeichnerischen Konstruktionen der Planimetrie meist nur zur Verifizierung begrifflich als möglich erkannter Konstruktionen dienen, und die stereometrischen Konstruktionen fast nur in der Anschauung ausgeführt werden, ist die zeichnende Konstruktion in der darstellenden Geometrie Selbstzweck. Die begriffliche Konstruktion ist in mancher Beziehung genauer, vielfach aber ungenauer als die praktische. Genauer ist sie, wenn sie eine Ellipse, deren Halbachsen 5 cm und 5,001 cm betragen, noch von einem Kreise unterscheidet, während die genaueste Zeichnung die Kurve nur als Kreis wiedergibt; ein mit dem Zirkel gezeichneter sogenannter Kreis stellt nicht nur begriffliche Kreise, sondern auch begriffliche Ellipsen, deren Achsenverhältnis nahezu Eins ist, dar. Eine Sinuslinie von 0,001 mm Wellenhöhe ist begrifflich durchaus keine gerade Linie, zeichnerisch ist sie von einer solchen schlechterdings nicht zu unterscheiden. Aus diesem Versagen begrifflicher Unterscheidungen entspringt für die praktisch-zeichnerische Geometrie der große Vorteil, Kurven mit komplizierten Bildungsgesetzen aus Kurvenstücken einfacherer Erzeugung zusammensetzen zu können, vor allem aus Kreisbögen. Wie man die Krümmungskreise einer Ellipse an den vier Scheiteln findet, ist in Bd. II, § 81, 11. gezeigt worden. Wenn man in die zwischen diesen Kreisbögen bestehenden Lücken noch je einen Punkt mit Tangente einschaltet, so läßt sich die Ellipse meist bequem herstellen. Häufig findet man zu diesen Krümmungskreisbögen und den eingeschalteten Punkten einen passenden Ellipsenquadranten auf einem Kurvenlineal. Zu empfehlen sind die Burmesterschen Kurvenlineale, weil diese aus Stücken häufig vorkommender Kurven zusammengesetzt sind, während viele andere Kurvenlineale aus Phantasiekurven hergestellt sind. Allzusehr darf man sich von Kurvenlinealen nicht abhängig machen, mit dem Zirkel gelingt nach einiger Übung eine Ellipse ebenso rasch.

2. Genauer ist die praktische Geometrie als die begriffliche überall, wo es sich um das exakte Festlegen von Punkten und Linien handelt. Begrifflich ist eine Gerade durch zwei ihrer Punkte bestimmt, praktisch nur, wenn diese Punkte nicht gar zu nahe beieinander oder zu weit entfernt liegen.



I. Liegen die zu verbindenden Punkte X und Y zu nahe beieinander und sind sie als Schnittpunkte von Geraden a, a_1 und b, b_1 gegeben, so erweist sich oft der Desarguessche Satz als nützlich (Fig. 32). Man fügt noch eine Gerade c hinzu, die nicht durch die Punkte X, Y oder den Schnittpunkt C von a und b, noch durch den Schnittpunkt C_1 von a_1 und b_1 geht und die die gesuchte Gerade XY (nach Augenmaß) in einem zur Konstruktion bequemen Punkte Z trifft. Die drei Geraden a, b, c bestimmen dann ein Dreieck A, B, C; die Parallelen durch A und B zu CC_1 treffen dann a_1 und b_1 in zwei Punkten A_1 und B_1, so daß die Geraden A_1B_1 und AB sich auf XY in Z treffen.

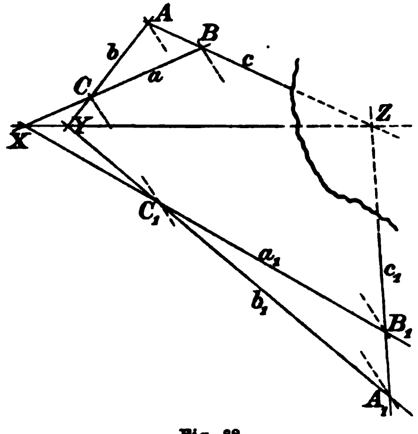


Fig. 32.

II. Sind umgekehrt X und Z zu verbinden und fällt Z außerhalb des Zeichenblattes, so zeigt dieselbe Figur, wie ein dritter Punkt Y der Geraden einzuschalten ist, falls X und Z als Schnittpunkte von a, a_1 und c, c_1 gegeben sind.

III. Wiederum seien X und Z als Schnittpunkte von a, a_1 und von c, c_1 gegeben; beide Punkte mögen aber außerhalb des Zeichenblattes liegen (Fig. 33). Sind die Schnittpunkte B und B_1 von a, c und von a_1, c_1 zugänglich, so ziehe man BB_1, nehme darauf B_0 so an, daß — nach Augenmaß beurteilt — die Parallelen durch B_0 zu a und zu c die Geraden a_1 bzw. c_1 in den Punkten X_0 und Z_0 treffen, die zugänglich sind. Dann ist X_0Z_0 zu XZ parallel, da $X_0B_0Z_0B_1$ zu $XBZB_1$ ähnlich und ähnlich gelegen ist. Es gilt jetzt nur, den zum Schnittpunkt D_0 von X_0Z_0 mit B_1B_0 homologen Punkt D zu finden.

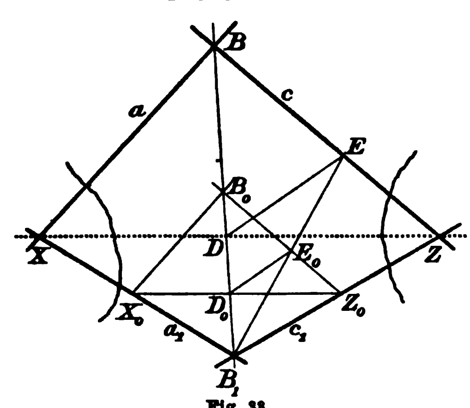


Fig. 33.

Zu diesem Zwecke ziehen wir durch B_1 irgendeine Gerade, die B_0Z_0 und BZ in zugänglichen Punkten E_0 und E treffe, und ziehen $ED \parallel E_0D_0$. Diese Gerade trifft BB_1 in D, und die Parallele durch D zu X_0Z_0 ist dann die gesuchte Verbindungslinie zu X und Y.

Wäre wenigstens X zugänglich gewesen, so hätte man $XZ \parallel X_0 Z_0$ ohne Benutzung von D finden können.

Die Figur 32 des Desarguesschen Satzes kann natürlich auch auf den Fall der Unzugänglichkeit von X und Z angewandt werden, wenn für die Wahl von A noch außerhalb $XBZB_1$ passender Platz vorhanden ist; in Figur 33 ist angenommen, daß außerhalb des Vierecks $XBZB_1$ kein Platz mehr ist.

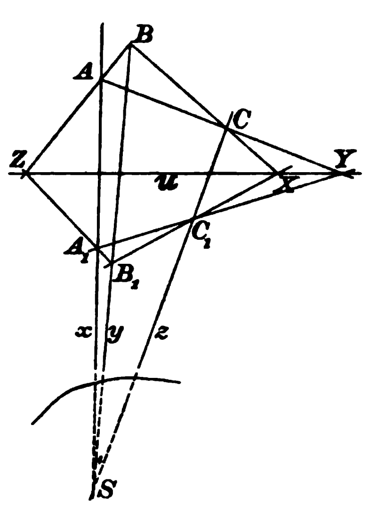


Fig. 34.

3. I. Wenn zwei Geraden x und y sich unter zu spitzem Winkel schneiden, ist der Schnittpunkt S praktisch nicht hinreichend bestimmt. Auch hier führt der Desarguessche Satz zum Ziel (Fig. 34): Man nimmt auf x zwei Punkte A und A_1, auf y ebenso B und B_1 an, bringt AB mit A_1B_1 in Z zum Schnitt, legt durch Z eine Gerade u, nimmt darauf X und Y an, bringt AY mit BX in C, sowie A_1Y mit B_1X in C_1 zum Schnitt. Dann geht auch CC_1 durch S.

II. Diese Konstruktion löst auch die Aufgabe, nach dem unzugänglichen Schnittpunkte S zweier Geraden x, y eine dritte Gerade z durch einen Punkt C zu legen. Bequem ist es dabei, die Gerade XYZ ins Unendliche fallen zu lassen, man erhält dann zwei ähnliche und ähnlich gelegene Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ (Fig. 35).[1]

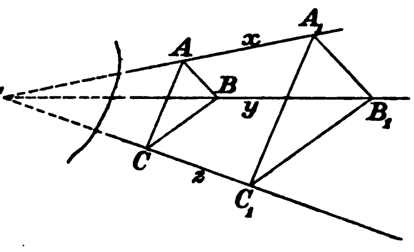


Fig. 35.

4. Diese Hilfskonstruktionen mögen als Beispiele genügen. In vielen Fällen wird man die Spezialfälle der Sätze von Pascal in Bd. II, § 17, 2. verwerten können. Wichtiger sind aber häufig die Aushilfen, die sich aus der speziellen Natur der Aufgabe selber ableiten lassen, weshalb es gut ist, sich immer mit mehreren Lösungen derselben Aufgabe vertraut zu machen. Außerdem ist es beim praktischen Zeichnen infolge der unvermeidlichen Ungenauigkeiten nötig, leicht

1) Vgl. das schätzenswerte Büchlein von P. Zühlke, „Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen" (Leipzig 1906), das auch die Literatur zusammenstellt; ferner E. Haentzschel, Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. V, 3 (1906), und K. Nitz, Zs. f. Math. u. Phys. 53 (1906), beide mit Literaturangaben.

auszuführende Kontrollen sich nicht entgehen zu lassen. — Eine Konstruktion wird um so genauer ausfallen, je einfacher sie ist. Es hat sich in der letzten Zeit unter Anregung von Lemoine ein gewisser Sport, die sog. Geometrographie, herausgebildet, bekannte geometrische Aufgaben mit der geringsten möglichen Zahl von Hilfslinien zu lösen. Abgesehen davon, daß diese Methode auf praktisch bequeme Lage der Punkte und Geraden keine Rücksicht nimmt, leidet sie an dem Nachteil, an leichter Verständlichkeit so viel einzubüßen, als sie an Kürze gewinnt. Kürze ist nicht Einfachheit. Der praktische Zeichner wird mit einer durchsichtigen, aber umständlichen Konstruktion, die er rein mechanisch, ohne viel Nachdenken ausführt, häufig schneller und sicherer zum Ziele kommen, als mit einer kurzen, die mehr Nachdenken erfordert und sich nicht bequem dem Gedächtnis einprägt. Auch scheint die Geometrographie für die Bedürfnisse des praktischen Zeichnens von ihrem Erfinder überhaupt nicht bestimmt zu sein, da sie nicht berücksichtigt, daß, wie wir gleich sehen werden, das Ziehen von Parallelen und Loten in der darstellenden Geometrie infolge der Benutzung der Winkellineale zu den Elementaroperationen gehört, ähnlich wie das Ziehen von Kreisen. Aus diesen Gründen hat die Geometrographie in unserem Buche keine Aufnahme gefunden, obwohl ihre Konstruktionen sehr interessant sind.

5. Einige Angaben über die Technik des geometrischen Zeichnens werden nicht unerwünscht sein. Als allgemeiner Grundsatz möge gelten:

Der Mann, der recht zu wirken denkt,
Muß auf das beste Werkzeug halten.

Ganz besonders muß das Reißzeug gut sein. Schlechte Ziehfedern erschöpfen durch ihr häufiges Versagen schließlich die größte Geduld und sind außerdem sehr zeitraubend. Unbedingt erforderlich sind: Ein guter, nicht zu großer (etwa 10 cm) Einsatzzirkel mit Nadelspitzen, Bleistift- und Reißfedereinsatz; der Zirkel darf nicht federn, d. h. er muß jede ihm erteilte Sperrung beibehalten, ohne nachzugeben. Ferner eine Handreißfeder mit dünnen, elastischen Wangen, nicht allzu schwer. Sehr erwünscht ist noch ein Halter zum Einstecken der Reißfeder des Zirkels, wodurch man eine zweite Handreißfeder erhält. Nächstdem empfiehlt sich die Anschaffung eines größeren (etwa 14 cm) Zirkels mit Nadelspitzen, Bleistift- und Reißfedereinsatz und Verlängerungsstange, wobei ebenfalls ein Halter zum Anstecken der Reißfeder zweckmäßig ist, indem er den Bestand der verfügbaren Handreißfedern auf drei erhöht; dann eines Greifzirkels

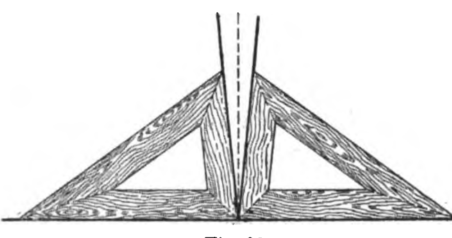
(etwa 10 cm lang ohne Einsätze). Seltener braucht man den Nullzirkel. Wird noch eine feinere Reißfeder zugefügt, so ist weitgehenden Bedürfnissen Rechnung getragen. Punktierrädchen und dergleichen sind dem Anfänger mehr schädlich als nützlich, weil sie ziemlich grob arbeiten, leicht schmieren und eine gewisse Scheu großziehen, mit der Ziehfeder in der Hand zu punktieren, was bei Kurven ohnehin immer geschehen muß. — Empfehlenswerte Fabrikate sind die von Riefler und von Otto Richter.[1])

6. Zu größeren Zeichnungen braucht man ein Reißbrett. Ist es nicht allzu groß, so läßt es sich auf eine halb ausgezogene Tischschublade aufsetzen und leicht geneigt hinlegen, was die große Annehmlichkeit bietet, daß man beim Zeichnen gerade sitzen kann und sich nicht allzu sehr über das Brett beugen muß. Zur Befestigung des Zeichenpapiers, das hart sein muß und die Tuschstriche nicht darf auslaufen lassen, dienen Reißstifte. Das nasse Aufziehen des Bogens hat den Nachteil, daß er nachher, beim Abschneiden, oft mit hörbarem Ruck zusammenschrumpft und sich merklich verzerrt; als Vorzug wird von vielen Zeichnern aber das glatte, straffe Aufliegen des Blattes und das Fehlen der Reißstifte empfunden, die beim Gebrauch der Reißschiene stören können; notwendig ist das Aufziehen nur, wenn man mit Tusche oder Aquarellfarben kolorieren will. Das Verfahren des Aufziehens besteht darin, daß man den Bogen mittels eines sauberen, nur zu diesem Zwecke dienenden Schwammes auf der Rückseite gleichmäßig mit kaltem Wasser befeuchtet bis auf den Rand, den Rand des Reißbrettes etwa 1—2 cm breit mit Gummi arabicum bestreicht und den Bogen auflegt. Beim Trocknen gehen alle Falten heraus. — Für kleinere Zeichnungen genügt ein Zeichenblock oder ein loses Blatt auf passender Unterlage; nur muß man dann auf die Reißschiene verzichten. Unbedingt erforderlich ist diese bei Zeichnungen der darstellenden Geometrie im engeren Sinne, d. h. beim Grund- oder Aufrißverfahren, das wir im nächsten Abschnitt werden kennen lernen. Um sich nicht auf die „rechten" Winkel der Reißbrettecken und der Reißschiene verlassen zu müssen, empfiehlt es sich, die Reißschiene ausschließlich zum Zeichnen von „Horizontalen" (quer vor dem Zeichner) zu verwenden, wobei der Stützarm der Schiene links am Brett liegt; das hat den Vorteil, daß die unbeschäftigte linke Hand in jedem Augenblick die Stütze fest andrücken kann, während die rechte ungestört zeichnet.

1) Das ist so gemeint, daß der Verfasser Reißzeuge dieser Firmen seit Jahren benutzt und damit sehr zufrieden ist; anderen, ihm unbekannten Fabrikaten, deren es gewiß viele geben wird, soll damit nicht zu nahe getreten werden.



7. Notwendiger wie die Reißschiene sind zwei Winkellineale, d. h. zwei hölzerne rechtwinkelige Dreiecke, von denen eines, das leichtere, zweckmäßigerweise gleichschenkelig ist. Bei einem von ihnen, etwa dem leichteren, kleineren, muß man sich auf die Rechtwinkeligkeit verlassen können; zu diesem Zwecke wird es geprüft nach einem Verfahren, das aus der (absichtlich übertriebenen) Figur 36 wohl unmittelbar verständlich ist und das den etwa vorhandenen Fehler verdoppelt, also um so besser erkennen läßt.


Fig. 36.

Die zum Konstruieren dienenden Bleistifte sollen recht hart sein, sie geben dann schärfere Striche und bleiben auch länger spitz. Das Spitzen des Holzes erfolgt mit dem Messer, der Graphitstift selbst wird am bequemsten mit einer kleinen Feile geschärft, die man sich zu diesem Zwecke hält; sehr praktisch und für Zeichensäle empfehlenswert sind die Bleistift-Spitzmaschinen von Guhl und Harbeck in Hamburg.

8. Zum Ausziehen der Zeichnung sich chinesische Tusche erst anzureiben, ist wohl nicht nötig. Die käufliche flüssige Tusche genügt vernünftigen Ansprüchen, während die angeriebene oft beim Überfahren mit dem nassen Pinsel ausläuft. Sie ist allerdings außerordentlich leichtflüssig; dafür hat die flüssige Tusche des Handels den Vorzug größeren Glanzes.

Zum Ausradieren von Bleistiftstrichen darf nur ganz weiches Gummi benutzt werden, das das Papier nicht angreift. Tuschstriche werden mittels des schärferen Tuschgummis beseitigt. Gute harte Zeichenpapiere können in dieser Hinsicht viel vertragen, ohne an Ansehnlichkeit zu verlieren, auf schlechtem Papier laufen nach dem Radieren die Striche der Ziehfedern aus. Vorsichtshalber wird man über radierte Stellen immer erst dünne Striche führen, sie trocknen lassen und ihnen erst dann die gewünschte Dicke geben. Das Radiermesser ist im allgemeinen nicht zu empfehlen. Einem geübten Zeichner gelingt es freilich, von einem zu dick geratenen Striche das überflüssige mittels des Messers abzuspalten und zu beseitigen, besonders wenn die Tusche etwas gummihaltig ist und sich infolgedessen krustenartig abheben läßt. — Ist eine Linie, die punktiert werden sollte, versehentlich ausgezogen worden, so läßt man sie gut trocknen und kratzt mit einer harten Radiernadel (Zirkelspitze) in die Linie feine Lücken im Abstand der beabsichtigten Punkte und

radiert mit weichem Gummi nach. Dabei ist es nicht etwa nötig, mit der Nadel selbst schon die Punkte zu gestalten, das angeritzte Papier wird durch das Gummi stärker angegriffen und es entsteht eine ganz gute Punktkette, wenn man die Lücken recht klein nimmt. Andernfalls muß die Linie lieber ganz beseitigt werden.

9. Nun noch einige Bemerkungen über den Gebrauch der Zeichengeräte. Die beiden Dreieckslineale dienen zum Ziehen von Parallelen und Loten.

I. Soll zu einer Geraden v durch einen Punkt F die Parallele u gezogen werden, so legt man eine Kathete k des (kleineren) Dreiecks II genau an die Gerade v an (in Fig. 37 mit II′ bezeichnet), während das schwerere Dreieck I mit seiner Hypotenuse an der von II liegt; nun hält man I fest und schiebt II an I entlang, bis k durch F geht, und zieht längs k die Gerade u. Das ist die Parallele.

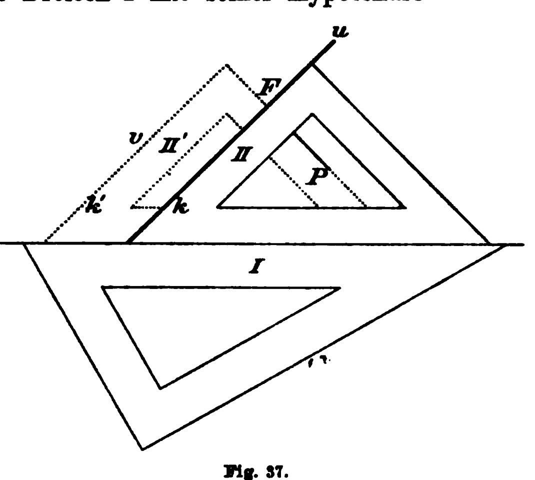


Fig. 37.

II. Um von einem Punkte P auf eine Gerade u das Lot zu fällen, legt man die Kathete von II an u an (Fig. 37), während die Hypotenuse von II fest an die von I gedrückt ist; nun schiebt man II längs I, bis die andere Kathete von II durch P geht; ihr entlang läuft dann das gesuchte Lot.

Mit zwei Linealen umzugehen, ist für den Anfang etwas unbequem; man muß sich aber daran gewöhnen, bei jeder Geraden, die man zieht, mit beiden Linealen vorzugehen — die dabei mit den Hypotenusen aneinander ruhen —, damit man jederzeit Parallelen und Lote zu diesen Geraden ohne weitere Vorbereitung ziehen kann. Damit das bei diesen Konstruktionen ruhende Lineal I sich nicht zu leicht verschiebt, ist es gut, II möglichst leicht zu wählen, und zwar möglichst gleichschenkelig, damit man gerade so lange Lote wie Parallelen ziehen kann.

Die Konstruktion des Lotes durch P gilt auch noch, wenn P auf der Geraden u liegt. Nicht zu empfehlen ist es in diesem Falle, die eine Kathete von II einfach an u zu legen, die andere durch P, und so das Lot ohne Verschiebung von II zu bestimmen; dieses Verfahren leidet an dem Nachteil, daß man beim Ausziehen mit der

Reißfeder nicht bequem bei P herankommt. Außerdem sind die Ecken der Winkellineale durch den Gebrauch abgestumpft und ungenau.

10. Die erste Anlage einer Zeichnung erfolgt mit hartem, feingespitztem Bleistift in dünnen Strichen. Die Zirkelspitzen dürfen nicht zu tief eingestochen werden, das Ausweiten der Löcher ist zu vermeiden, weshalb man, so weit es geht, immer mit dem kleinsten, leichtesten Zirkel arbeitet. Ist diese Aufgabe fertig, so radiert man alles Unnötige mit weichem Gummi möglichst weg, die übrigen Linien werden so weit radiert, daß man sie eben noch sieht. Dann wird das Blatt sorgfältig gereinigt, wie denn die Reinlichkeit die wichtigste technische Vorbedingung für das Gelingen einer Zeichnung ist; aus diesem Grunde ist es auch gut, besonders beim Ausziehen mit der Reißfeder, unter die Hand ein Löschblatt zu legen, das dann auch bei Unfällen sofort zur Hand ist. Unter einer warmen, feuchten Hand wölbt sich leicht das Papier und läßt die Tuschstriche auslaufen. Beim Ausziehen mit der Reißfeder kommen die dünnen Striche zuerst an die Reihe, weil die dicken leicht Ungenauigkeiten veranlassen, sie aber auch verdecken können. Überhaupt wird man mit den Linien, die sich am leichtesten anpassen lassen, am längsten warten. Kommen Versehen vor, so radiert man erst, wenn die Striche vollkommen trocken sind, weil dann das Papier am wenigsten angegriffen wird. Beim Füllen der Reißfeder muß die größte Reinlichkeit walten; das Tuschglas darf nie offen stehen. Enthält es nicht am Stöpsel ein Glasstäbchen zum Füllen der Feder, so tun kleine Streifchen aus Zeichenpapier denselben Dienst, bei jeder Füllung ein neues. Die Feder muß öfters gereinigt werden, besonders am Schluß der Arbeit. Beachtet man diese einfachen Regeln und ist die Reißfeder gut abgeschliffen, was ein Mechaniker zu besorgen hat, so wird das lästige Versagen der Feder kaum eintreten. Zieht man zum Füllen der Reißfeder eine Schreibfeder vor, so darf diese nicht in Tinte getaucht gewesen sein, weil sich sonst sofort Schmutz bildet.

Zweiter Abschnitt.

Das Grund- und Aufrißverfahren.

§ 7. Erklärung des Verfahrens.

1. Die schräge Parallelprojektion ist zur unmittelbaren graphischen Festlegung räumlicher Objekte noch nicht einfach genug. Ganz von selbst haben sich uns in den vorangehenden Aufgaben zur primären Bestimmung eines Punktes P seine zwei Orthogonalprojektionen P' und P'' auf die xy-Ebene und auf die xz-Ebene aufgedrängt, während das Schrägbild erst sekundär aus diesen Angaben gewonnen wurde. Diese zwei Orthogonalprojektionen liefern unmittelbar die rechtwinkeligen Koordinaten von P, und wie bei rein metrischen Untersuchungen das Cartesische Koordinatensystem von allen das einfachste und ursprünglichste ist, so liegt die Orthogonalprojektion auf zwei Tafeln, der wir uns nun zuwenden, der ganzen darstellenden Geometrie zu grunde. Diese Darstellungsweise läßt sich durchaus elementar begründen. Dennoch bereitet sie dem Anfänger Schwierigkeiten, und zwar hauptsächlich wegen der Fülle von Einzelheiten und Kleinigkeiten, die man gründlich beherrschen muß, um mit Vorteil arbeiten zu können. Dieser Stoffülle wird man um so selbständiger gegenüberstehen, je schärfer man sich die allgemeinen Methoden klar macht, aus denen sie gewonnen wird. Diese sind: Bewegung des Objektes und Verlegung der Projektionstafeln, Umklappung der Geraden und Ebenen, sowie in regelmäßiger Verbindung damit die Affinität. Merkt man sich die Drehungen und Verschiebungen, die zur Lösung einer Aufgabe nötig sind, so kann man sich die Einzelheiten meistens selber ableiten. Dabei ist es gut, zunächst immer auf die allgemeinste Lösung auszugehen und sich hinterher erst zu fragen, welche spezielle Annahmen die Lösung am sparsamsten machen. Ferner ist es empfehlenswert, alle Figuren, auf die sich der Text stützt, von neuem zu zeichnen, weil die entstehende Figur sich

besser einprägt und weniger verwirrt als die fertige mit ihren vielen Hilfslinien. Auch ist es notwendig, weniger vorteilhafte Lagen der gegebenen Elemente anzunehmen, als die Demonstrationsfiguren aus didaktischen Gründen häufig enthalten; und vor allem muß man sich die Fundamentalaufgaben denkend, nicht mechanisch aneignen. Das Übrige tut reichliche Übung im praktischen Darstellen, womit das Studium ausführlicher Lehrbücher verknüpft werden kann.

Über die Literatur der darstellenden Geometrie orientiert der soeben erschienene Bericht von E. Papperitz in der Encyklopädie der math. Wiss., Band III_1, Heft 4.

Reich an Übungsmaterial aus allen Gebieten der Naturwissenschaften ist der Leitfaden der Projektionslehre von Müller und Preßler.

2. Die Orthogonalprojektion auf zwei Tafeln setzt zwei Bildebenen oder Tafeln Π_1 und Π_2 voraus, von denen die erste meist horizontal liegt und Grundrißebene genannt wird, während die zweite dazu senkrecht, also vertikal steht und den Aufriß enthält. Die Orthogonalprojektion auf eine Bildebene ist eine Parallelprojektion, deren Richtung auf dieser Ebene senkrecht ist. Den zwei Bildebenen Π_1 und Π_2 entsprechen also zwei Projektionsrichtungen, eine senkrechte zu Π_1 und daher parallel zu Π_2, eine senkrecht zu Π_2 und damit parallel zu Π_1. Festgelegt wird ein Punkt P durch Angabe seiner Orthogonalprojektionen P' und P'' auf Π_1 und Π_2 (Fig. 38a); das sind die Fußpunkte der Lote PP' und PP'', die von P auf die Tafeln Π_1 und Π_2 gefällt werden können. Aus diesen Projektionen, von denen P' der Grundriß oder die erste Projektion, P'' der Aufriß oder die zweite Projektion von P heißt, findet man rückwärts wieder P als Schnittpunkt des Lotes in P' auf Π_1 mit dem Lote in P'' auf Π_2. Daher heißt diese Darstellungsmethode auch Grund- und Aufrißverfahren.

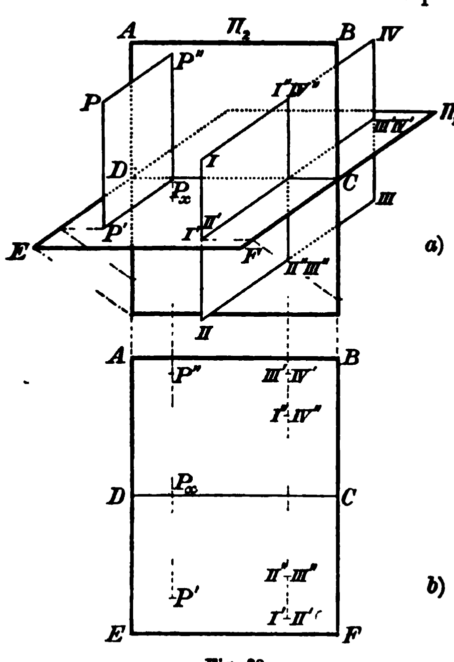


Fig. 38.

Eine Gerade ist festgelegt durch Angabe der Grund-

risse und Aufrisse von zweien ihrer Punkte; zur Fixierung einer Ebene muß man irgend drei ihrer Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, durch ihre Grundrisse und Aufrisse geben.

Betrachtet man Π_2 als xz-Ebene, Π_1 als xy-Ebene eines Koordinatensystems, so ersetzt P'' offenbar die Angabe der Koordinaten x und z, während P' die Koordinate y, sowie überflüssigerweise noch einmal x festlegt.

3. Das sind die Grundgedanken des Grund- und Aufrißverfahrens. Zu ihrer praktischen Ausführung sind noch einige Abänderungen und Vereinbarungen notwendig. Man will vor allem die ganze Konstruktion in einer einzigen Ebene vornehmen. Zu diesem Zwecke wird eine der beiden Ebenen um die gemeinsame Schnittlinie x von Π_1 und Π_2, die trennende Achse des Zweitafelsystems, auf die andere geklappt. Vorher muß bei jeder der beiden Ebenen willkürlich festgesetzt sein, welche ihrer beiden Seiten als Oberseite, die allein zum Zeichnen dient, gelten soll, und welche als Rückseite. Durch beide Ebenen wird der ganze Raum in vier Winkelräume oder Quadranten zerlegt, die folgendermaßen begrenzt sind:

I. Quadrant:	Oberseite	von	Π_1	und	Oberseite	von	Π_2,
II. „	Rückseite	„	Π_1	„	Oberseite	„	Π_2,
III. „	Rückseite	„	Π_1	„	Rückseite	„	Π_2,
IV. „	Oberseite	„	Π_1	„	Rückseite	„	Π_2.

Alle Urteile über vorn und hinten, oben und unten sind stets aufzufassen vom Standpunkte eines Beobachters im ersten Quadranten, der auf Π_1 steht und die Oberseite von Π_2 anblickt.

Die Ausbreitung von Π_1 und Π_2 in eine einzige Ebene, die des Zeichenblattes oder Zeichenbrettes, erfolgt nun in der Weise, daß man entweder Π_2 festhält und die vordere Hälfte von Π_1 senkt, also die andere Hälfte hebt bis zum Zusammenfall beider Ebenen, oder indem man Π_1 festhält und die obere Hälfte von Π_2 nach hinten fallen, die untere also nach vorn steigen läßt. Das Ergebnis beider Verfahren ist dasselbe. Im allgemeinen sorgt man dafür, daß die darzustellenden Objekte in den ersten Quadranten zu liegen kommen, doch ist das Hinübergreifen in andere Quadranten nicht zu vermeiden. Dabei gilt zur Erhöhung der Deutlichkeit des Zeichnens die Regel, daß die beiden Zeichenebenen wie durchscheinende Flächen behandelt werden; dort, wo eine Ebene von der anderen überdeckt wird, zeichnet man alle der ersten Ebene angehörigen Linien so, als schimmerten sie unter dem darüber gedachten Blatte durch.

Die Figur 38a zeigt die Projektionen eines Punktes P sowie von vier Punkten I, II, III, IV im Schrägbild, die auseinander durch

Spiegelung an den beiden Tafeln hervorgehen; Figur 38b gibt das Endergebnis der Umklappung an. Ebenso ist in Figur 39a eine Gerade g dargestellt, und auf ihr drei Punkte A, B, C, die dem II., I. und IV. Quadranten angehören; Fig. 39b ist die Figur nach vollzogener Umklappung.

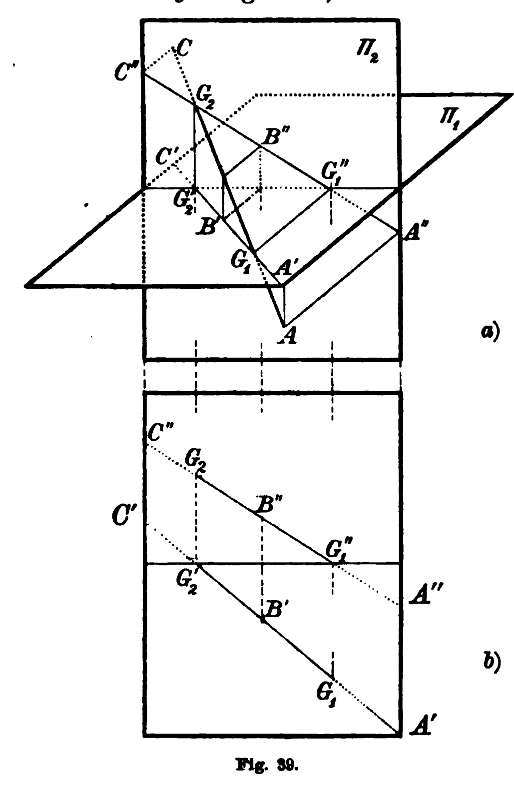


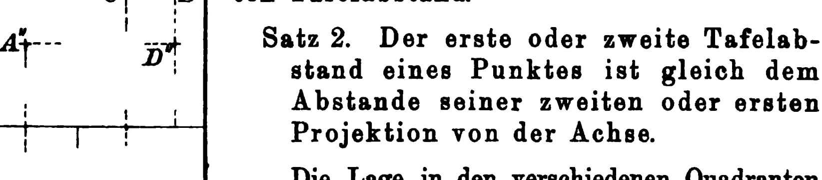
Fig. 39.

4. Die Normalebene durch P auf die Achse x trifft diese in einem Punkte P_x und enthält die Geraden $P''P_x$, $P'P_x$, die auf der Achse x senkrecht stehen und bei der Umklappung auf x senkrecht bleiben (Fig. 38a); daher:

Satz 1. Grund- und Aufriß eines Punktes liegen auf einem Lote zur x-Achse.

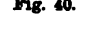
Umgekehrt können zwei Punkte P', P'' auf einem Lote zur x-Achse stets als Grundriß und Aufriß eines und nur eines Punktes P betrachtet werden,

den man als Schnittpunkt der Lote in P' und P'' auf Π_1 und Π_2 erhält, wenn man die Tafeln in ihre ursprüngliche Lage zurückdreht. Die Strecke $P''P_x$ (Fig. 38) ist gleich und parallel zu PP' und mißt daher den Abstand des Punktes P von der ersten Tafel, den sog. ersten Tafelabstand; ebenso ist $P'P_x \# PP''$ und mißt den zweiten Tafelabstand.



Satz 2. Der erste oder zweite Tafelabstand eines Punktes ist gleich dem Abstande seiner zweiten oder ersten Projektion von der Achse.

Die Lage in den verschiedenen Quadranten zeigt Figur 40; es liegt A im ersten, B im zweiten, C im dritten, D im vierten. Wieder ist, wie in Figur 38 angenommen, daß die entsprechenden Tafelabstände dieser Punkte absolut genommen


Fig. 40.

gleich sind, nur liegen sie nicht in derselben Normalebene zu x, wie in Figur 38.

Satz 3. Die Punkte der Aufrißebene haben ihren Grundriß, die Punkte der Grundrißebene ihren Aufriß auf der trennenden Achse.

5. Diese Sätze reichen aus, um von einfachen Körpern den Grund- und Aufriß aufzunehmen. Besonders eignen sich dazu architektonische Gegenstände. Dabei gilt der Grundsatz, unsichtbare Linien entweder gar nicht oder nur punktiert wiederzugeben.

Satz 4. Hinsichtlich der Sichtbarkeit gilt die Regel, daß bei der Anlage des Grundrisses der Beschauer sich über der Ebene Π_1 und über dem Objekt befindet; beim Betrachten des Aufrisses soll man soweit zurücktreten, daß man nicht nur Π_2, sondern auch den Gegenstand vor sich hat.

Dieser Grundsatz war schon bei den Schrägbildern stillschweigend benutzt worden (vgl. Figur 29). Als Beispiele für das Grund- und Aufrißverfahren können etwa Figur 43 und 44 gelten.

Zur Erleichterung des Konstruierens dienen folgende Sätze:

Satz 5. Strecken und ebene Figuren, die zu einer Tafel parallel sind, erscheinen auf diese projiziert in ihrer wirklichen Größe und Gestalt.

Satz 6. Strecken auf derselben oder auf parallelen Geraden erscheinen in der Orthogonalprojektion in demselben Verhältnisse wie in Wirklichkeit,

mit Ausnahme des Falles, daß sie auf der betreffenden Tafel senkrecht stehen, wobei alle Punkte der Strecke sich in einen Punkt projizieren.

Satz 7. Parallele Geraden haben in jeder Tafel, auf der sie nicht senkrecht stehen, parallele Projektionen.

Die Schnittgeraden e_1, e_2 einer Ebene η mit den Tafeln Π_1 und Π_2 heißen ihre Spuren, e_1 die erste, e_2 die zweite Spur.

Satz 8. Parallele Ebenen haben in jeder der Tafeln, zu der sie nicht parallel sind, parallele Spuren.

Wir werden noch darauf zurückkommen.

6. Während wir ähnliche Sätze schon bei der schrägen Axonometrie kennen gelernt haben, ist Satz 9 für die Orthogonalprojektionen charakteristisch:

Satz 9. Wenn der eine Schenkel eines rechten Winkels zu einer Tafel parallel, der andere zu ihr nicht gerade senkrecht ist, so ist die Orthogonalprojektion des rechten Winkels auf diese Tafel wieder ein rechter Winkel.

Zur Erleichterung des Beweises bemerken wir erst:

Satz 10a. Die Orthogonalprojektion eines Gegenstandes auf eine Tafel ändert sich weder in Lage noch Gestalt, wenn man den Gegenstand in der Richtung der Projektionsstrahlen parallel zu sich verschiebt; die Orthogonalprojektion auf die andere Tafel dagegen erleidet nur eine Verschiebung, keine Formänderung.

In § 2, 5 hatten wir diesen Satz so formuliert:

Satz 10b. Die Projektion eines Gegenstandes ändert sich nicht, wenn man die betreffende Projektionsebene parallel zu sich verschiebt,

was dann auch für Orthogonalprojektionen gilt.

Zu Satz 9 zurückkehrend dürfen wir den rechten Winkel parallel zu sich und in der Richtung der Projektionsstrahlen verschieben, bis der eine Schenkel a in der betreffenden Tafel liegt. Die den anderen Schenkel b projizierenden Strahlen liegen dann in einer zur Tafel senkrechten Ebene, die auch auf a senkrecht ist und daher die Tafel in einer zu a senkrechten Geraden trifft; diese ist die Projektion von b.

Wegen Satz 7 läßt sich Satz 9 so verallgemeinern:

Satz 11. Wenn die eine von zwei sich rechtwinkelig schneidenden oder kreuzenden Geraden zu einer Tafel parallel ist, und die andere zu dieser Tafel nicht senkrecht steht, so sind auch die Orthogonalprojektionen der Geraden auf diese Tafel zueinander senkrecht.

Eine Normale einer Ebene η ist zu allen Geraden dieser Ebene senkrecht, also auch zu jeder Spur dieser Ebene. Daraus folgt:

Satz 12. Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so steht der Grundriß der Geraden auf der ersten, der Aufriß auf der zweiten Spur der Ebene senkrecht,

vorausgesetzt natürlich, daß die Gerade nicht auf der betreffenden Tafel senkrecht steht oder die Ebene zu der Tafel parallel ist, wo der Satz dann nur für die andere Tafel gilt.



§ 8. Bewegung parallel zu einer Tafel.

1. Um die Darstellung des Punktes gründlich einzuüben, wollen wir die Gerade und Ebene zunächst nicht durch Spurpunkte oder Spurlinien festlegen, sondern allgemein durch Punkte, die auf ihnen liegen. Da ein Punkt durch seine beiden Orthogonalprojektionen stets eindeutig bestimmt ist, so wird auch eine Gerade durch die Projektion zweier ihrer Punkte, eine Ebene durch die Aufrisse und Grundrisse dreier ihrer Punkte, die nicht einer Geraden angehören, stets unzweideutig festgelegt. — Man wird nun mit dem Gedankenkreise und der Methode des Zweitafelsystems sehr rasch vertraut, wenn man einen leicht darstellbaren Körper, wie Würfel, Tetraeder, Pyramide, zuerst in möglichst bequemer Stellung zu den beiden Tafeln aufnimmt, darauf diesen Körper oder die Tafeln den verschiedenartigsten Bewegungen unterwirft und zusieht, wie sich Grund- und Aufriß dabei ändern. So sei denn unsere erste Aufgabe, einen auf Π_1 stehenden Würfel, von dem zwei Flächen parallel zu Π_2 sind, darzustellen. Die Eckpunkte der Grundfläche sind, da sie in der Bildebene Π_1 liegen, in diesen ihre eigenen Projektionen; sie mögen A', B', C', D' heißen. Auf sie fallen die Grundrisse A_0', B_0', C_0', D_0' der oberen Grenzfläche A_0, B_0, C_0, D_0 des Würfels, wie in Figur 41a aus der Bezeichnung hervorgeht. Die Aufrisse aller Punkte der Grundrißebene liegen (nach § 7, Satz 3) auf der trennenden Achse; daher fallen A'', B'', C'', D'' auf diese, und ist D'' mit A'' und C'' mit B'' identisch. Entsprechend verhalten sich die Aufrisse der vier oberen Ecken.

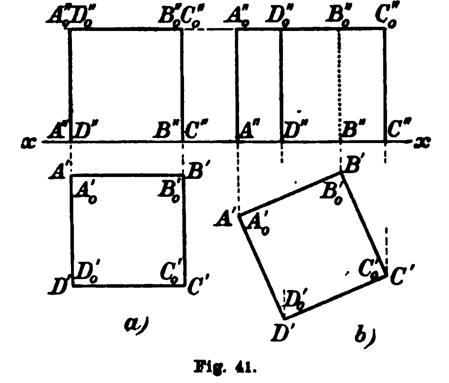


Fig. 41.

2. Verschiebung parallel zu einer Tafel. Die erste einfache Bewegung, die wir jetzt vornehmen wollen, soll in einer Verschiebung des Würfels auf seiner Unterlage Π_1 bestehen. Seine Grundfläche $A'B'C'D'$ möge aus der Lage Figur 41a in die Lage Figur 41b übergehen, wodurch natürlich der ganze Grundriß des Würfels in der neuen Lage gegeben ist. Allgemein läßt sich sagen:

Satz 1. Wenn man einen Körper parallel zu einer Tafel verschiebt, ändert seine Orthogonalprojektion auf diese Tafel höchstens die Lage in ihr, nicht aber die Gestalt.

Die Frage ist nun: Was geschieht mit dem Aufriß? Wenn ein Körper $\mathfrak{K}$ von irgend einer Lage $\mathfrak{K}_0$ aus sich auf alle erdenkliche

Weisen so bewegt, daß die Abstände aller seiner Punkte von einer Tafel ihre Größe beibehalten, wenn er sich also parallel zu dieser Tafel bewegt, so bewegt sich jeder seiner Punkte P in einer zu dieser Tafel parallelen Ebene η. Lotet man also diesen Punkt in allen diesen Lagen immer auf die andere Projektionstafel Π, die zu jener senkrecht steht, so liegen alle diese Lote in der Ebene η, ihre Fußpunkte also in der Schnittlinie von η mit der Tafel Π, die zur trennenden Achse parallel ist. Es folgt:

Satz 2. Wenn man einen Körper parallel zu einer Tafel verschiebt, so beschreibt die Orthogonalprojektion jedes seiner Punkte auf die andere Tafel eine Parallele zur trennenden Achse.

Zu dem Grundriß in Figur 41b ist daher der Aufriß leicht zu finden. Es liegt nämlich z. B. der Punkt A_0'' der Figur 41b auf der Parallelen durch den Punkt A_0'' der Figur 41a zur trennenden Achse (Satz 2), und zugleich auf dem Lote von A_0'' auf diese Achse (§ 7, Satz 1). Damit ist dieses Beispiel erledigt.

3. Die gewonnene Methode wenden wir sofort auf ein Dreieck ABC an, dessen Grund- und Aufriß wir uns, unter Berücksichtigung des Satzes 1 in § 7, willkürlich geben (Fig. 42). Das Dreieck werde parallel zu Π_1 so verschoben, daß sein Grundriß aus der Lage $A'B'C'$ in die Lage $A_1'B_1'C_1'$ übergeht, wo $A_1'B_1'C_1' \cong A'B'C'$. Man kann sich das etwa so denken, daß die Lote AA', BB', CC' auf der aus Karton ausgeschnittenen Bodenfläche $A'B'C'$ starr befestigt sind, so daß man diese aus der einen Lage in die andere auf Π_1 verschieben kann, wobei dann das Dreieck ABC selber mitgeht. Gesucht ist wieder der Aufriß. Für A_1'' hat man jetzt zwei Örter: erstens das Lot A_1' auf die trennende Achse x (§ 7, Satz 1), zweitens die Parallele durch A'' zu dieser Achse (§ 8, Satz 2). So ist $A_1''B_1''C_1''$ bestimmt.

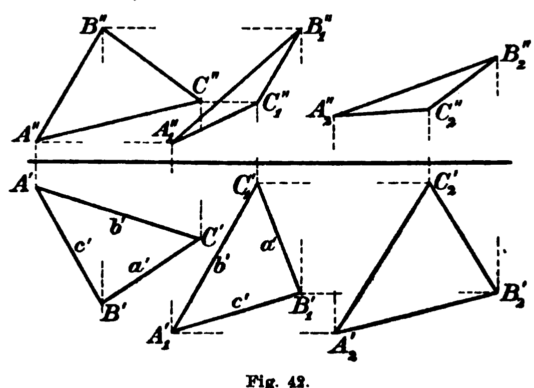


Fig. 42.

4. Dasselbe Dreieck soll auch einmal parallel zur zweiten Tafel verschoben werden und zwar von der Lage $A_1B_1C_1$ aus. Es sei etwa aus Karton ausgeschnitten, desgleichen das Dreieck $A_1''B_1''C_1''$, und es sollen Stützen von A_1, B_1, C_1 senkrecht auf $A_1''B_1''C_1''$ nach

A_1'', B_1'', C_1'' gehen; wir verschieben dann $A_1''B_1''C_1''$ auf Π_2 in die Lage $A_2''B_2''C_2''$ (Fig. 42). Gesucht ist jetzt der Grundriß $A_2'B_2{}'C$ Diesmal haben sich die Grundrisse auf Parallelen zu x bewegt (Satz 2), also liegt z. B. der Punkt A_2' auf der Parallelen durch A_1' zu x und auf dem Lote aus A_2'' auf x. Ebenso findet man B_2', C_2'.

Ganz allgemein können wir demnach die Aufgabe lösen: Ein Körper, der durch Grund- und Aufriß gegeben ist, wird parallel zu einer Tafel so verschoben, daß seine Orthogonalprojektion auf dieselbe in eine neue, gegebene Lage übergeht; man soll dazu die Orthogonalprojektion auf die andere Tafel finden.

Ohne uns auf die Entstehung der Figur 43b aus 43a jetzt einzulassen, können wir z. B. den dort dargestellten Körper (einen Würfel) parallel zu Π_1 so verschieben, daß der Grundriß aus der Lage b in die Lage c übergeht — beide Grundrisse sind also kongruent — und nach dem Aufriß zu dem Grundriß c fragen. Es genügt, diesen für eine Ecke A_0'' entstehen zu lassen. Diese liegt auf der Parallelen zur Achse x durch den Punkt A_0'' der Lage b — nach Satz 2 — und auf dem Lote aus dem Punkte A_0' der Lage c auf die Achse x.

Ebenso ist in Figur 45, die wir später noch einmal vornehmen werden, ein Dreieck ABC durch Grundriß und Aufriß $A'B'C'$, $A''B''C''$ gegeben und parallel zur Tafel Π_1 verschoben, bis der Grundriß in die Lage $A_1'B_1'C_1'$ übergeht; man soll den Aufriß finden. Es liegt C_1'' auf dem Lote aus C_1' auf x und auf der Parallelen durch C'' zu x.

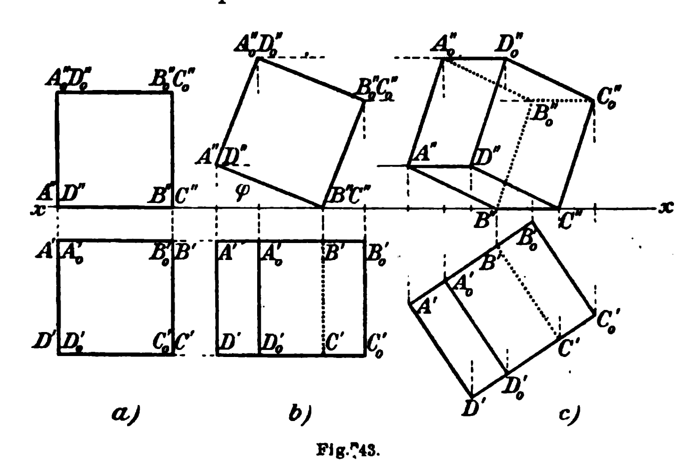


Fig. 43.

Diese Beispiele zur Illustrierung des Verfahrens der Verschiebung parallel zu einer Tafel mögen genügen; weitere Anwendungen finden sich in vielen der folgenden Aufgaben.

5. Drehung um ein Tafellot. Ein wichtiger besonderer Fall der Parallelverschiebung eines Körpers zu einer Tafel ist seine Drehung um eine Gerade, die zu einer Tafel senkrecht steht, um ein Tafellot. In Figur 43a ist ein Würfel aufgenommen, der auf der Tafel Π_1 liegt und zwei Flächen parallel zu Π_2 hat. Dieser Würfel ist auf Π_1 und parallel zu Π_2 so verschoben worden, daß seine Kante $B'C'$ in die Lage $B'C'$ der Figur 43b gekommen ist, und nun hat man ihn um diese in Π_1 liegende, auf Π_2 senkrechte Kante $B'C'$ der Figur 43b gedreht, und zwar um einen Winkel φ.

Da der Körper bei dieser Verschiebung und auch bei der Drehung sich immer parallel zu Π_2 bewegt hat, so folgt aus Satz 1, daß sich sein Aufriß nur der Lage nach geändert haben kann, und diesen wollen wir zuerst ermitteln. Die Bodenfläche des Würfels geht durch die Gerade $B'C'$ der Figur 43b und bildet mit Π_1 den Winkel φ; da aber Π_2 zu Π_1 und der Bodenfläche senkrecht ist, so bilden auch die Schnittgeraden von Π_2 mit beiden Flächen miteinander diesen Winkel φ. Es ist also $A''B''$ (Fig. 43b) gegen x um den Winkel φ geneigt. Dadurch ist der Aufriß b festgelegt.

Vor der Drehung war der Grundriß in Figur 43b kongruent zu dem von Figur 43a an die Drehachse $B'C'$ der Figur 43b gelagert. Bei der Drehung nun beschreibt jeder Punkt des Würfels einen Kreis, dessen Ebene ε auf der Drehachse und daher auf Π_1 senkrecht sowie zu Π_2 parallel ist. Lotet man einen in Drehung befindlichen Punkt immer auf Π_1, so liegt dieses Lot immer in dieser Ebene ε, der Grundriß des Punktes beschreibt also eine Parallele zu x (Satz 2). Also liegt z. B. der Punkt A' der Figur 43b auf der Parallelen zu x durch den Punkt A' der Figur 43a, sowie auf dem Lot aus A'' auf die Achse x. Jetzt kann man den Grundriß in Figur 43b fertigstellen. Den Übergang von 43b in 43c haben wir schon in Nr. 4 besprochen.

6. Wenn sich ein Körper um ein Tafellot l dreht, so dreht sich seine Orthogonalprojektion ebenfalls um dieses Lot, wir können sie ja mit zu dem Körper rechnen, und sie bleibt dann bei der Drehung in der Tafel, da diese auf l senkrecht steht. Durchläuft dabei ein Punkt des Körpers den Drehwinkel φ, so beschreibt jeder Punkt des Körpers und der Orthogonalprojektion diesen Winkel; man sagt dann, der Körper und seine Projektion hätten diesen Winkel φ durchlaufen. Die Projektion insbesondere dreht sich um den Schnittpunkt von l mit der Tafel, also um den Spurpunkt von l.

Bei dieser Drehung verschiebt sich jeder Punkt des Körpers immer parallel zur Tafel; seine Projektion auf die andere Tafel ist daher nach Satz 2 zu beurteilen. Alles zusammenfassend läßt sich also über diese Drehung sagen:

Satz 3. Wenn sich ein Körper um ein Lot l zu einer Tafel dreht mit dem Drehwinkel φ, so dreht sich die Orthogonalprojektion des Körpers auf diese Tafel um den Spurpunkt des Lotes in ihr, und zwar ebenfalls um den Winkel φ. Die Orthogonalprojektion jedes Punktes des Körpers auf die andere Tafel bewegt sich dagegen auf einer Parallelen zur trennenden Achse.

Zur Anwendung dieses allgemeinen Satzes nehmen wir noch einmal den Würfel der Figur 43c vor. Wir geben uns eine in Π_1 auf Π_2 senkrechte Drehachse u (Figur 44) und einen Drehwinkel ψ. Der Körper wird erst aus der Lage Fig. 43c, die in Fig. 44 als c wiederholt ist, parallel zu Π_2 und Π_1 verschoben, bis die Ecke C' auf u fällt, und dann um u durch den Winkel ψ gedreht. Dabei dreht sich der Aufriß, der bis dahin parallel zu dem von c gelegen war, um den Spurpunkt U_2 von u in der Tafel Π_2; in diesen Spurpunkt fällt auch C''. Der Aufriß des gedrehten Körpers ist also dem Aufrisse 44c kongruent, nur ist er um C' um den Winkel ψ gedreht. Während der Parallelverschiebung des Körpers bewegten sich die Punkte des Grundrisses auf Parallelen zu x, während der Drehung ebenfalls, also auch während des ganzen Bewegungsvorganges. Daher liegt z. B. der Punkt A' in Figur 44d auf der Parallelen zur x-Achse durch den entsprechenden Punkt der Figur 44c und zugleich auf dem Lote aus A'' (Fig. 44d) auf x.

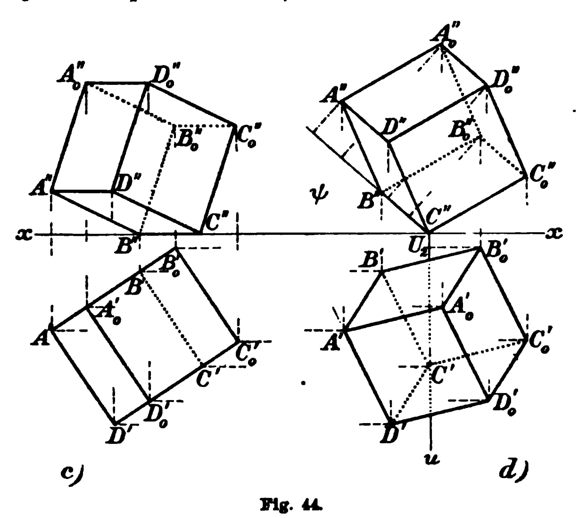


Fig. 44.

7. In Figur 45 gehen wir von einem Dreieck $A_0B_0C_0$ aus, dessen Ebene parallel zu Π_1 ist. Sein Grundriß $A_0'B_0'C_0'$ ist daher ein zu $A_0B_0C_0$ kongruentes Dreieck, sein Aufriß dagegen artet in drei Strecken einer Geraden aus: $A_0''B_0''C_0''$. In seiner Ebene, die also zu Π_2 senkrecht steht, ist eine Gerade u angenommen, die auf Π_2 senkrecht steht und diese Ebene in einem Punkte U_2 trifft. Um diese Gerade, deren Grundriß u' auf x senkrecht ist und durch U_2 geht, soll das Dreieck gedreht werden um einen gegebenen Winkel φ. Nach Satz 3 dreht sich dann einfach $A_0''B_0''C_0''$ um U_2 um diesen

Drehwinkel. Die neue Lage $A''B''C''$ des Aufrisses kann daher unmittelbar angegeben werden. Die Punkte des Grundrisses bewegen sich nach Satz 3 auf Parallelen zu x, können also aus dem Aufriß abgeleitet werden (Satz 1, § 7).

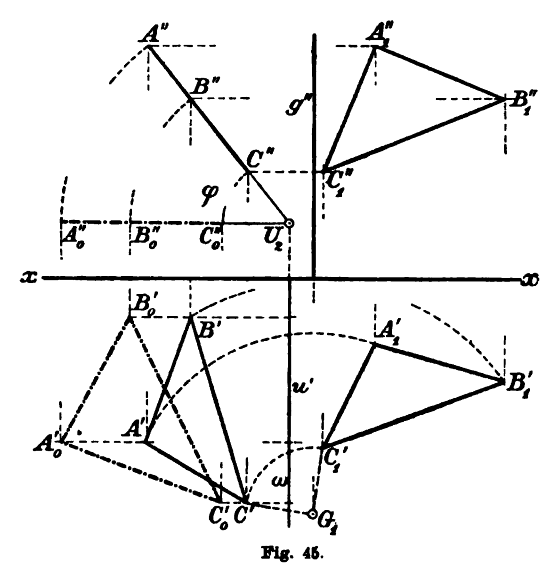


Fig. 45.

Jetzt nehmen wir eine neue Drehung vor, nämlich um eine Gerade g, die in G_1 auf Π_1 senkrecht steht. Der Drehwinkel ω sei gegeben. Dann erfährt einfach das Dreieck $A'B'C'$ eine Drehung um G_1 mit dem Drehwinkel ω. Die Endlage $A_1'B_1'C_1'$ des Grundrisses ist dadurch unmittelbar bestimmt. Die Punkte A_1'', B_1'', C_1' im Aufrisse liegen dann auf den Parallelen zu x durch A'', B'', C'' (Satz 2) sowie auf den Loten aus A_1', B_1', C_1' auf x.

8. **Länge und Tafelneigung einer Strecke.** Eine nützliche Anwendung der Drehung um ein Tafellot machen wir auf eine Strecke AB, die durch die Grundrisse A', B' und die Aufrisse A'', B'' ihrer Endpunkte festgelegt ist (Fig. 46). Um nämlich die wahre Länge dieser Strecke zu finden, wird man die Strecke mitsamt der sie auf Π_2 projizierenden Ebene $ABB''A''$ auf Π_2 verschieben, bis diese Ebene zu Π_1 parallel ist: der Grundriß der verschobenen Strecke, die nun zu Π_1 parallel liegt, ist dann ihrer Länge gleich. Diese Verschiebung kann etwa als Drehung um AA'' ausgeführt werden. AA'' ist ein Lot auf Π_2 in der Ebene $ABB''A''$; es kann aber auch jedes andere in dieser Ebene enthaltene zweite Tafellot verwandt werden. Bei der Drehung um AA'' dreht sich der Aufriß der Strecke um A'', bis er parallel zur trennenden Achse x wird: siehe $A''B_0''$ in Figur 46. Hingegen bewegt sich B' auf einer Parallelen zu x.

9. In Figur 47 ist dieselbe Aufgabe durch Drehung um das erste Tafellot AA' gelöst: Man macht $A'B_*' \| x$ und $= A'B'$, legt durch B'' die Parallele, durch B_*' das Lot zur Achse x und verbindet den Schnittpunkt B_*'' beider Geraden mit A''. Dann ist $A''B_*''$ die wahre Länge von AB.

Unter dem Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene η versteht man den kleinsten Winkel, von dem ein Schenkel die Gerade

ist, während der andere in der Ebene liegt. Dieser Neigungswinkel ist in der Normalebene zu η enthalten, die durch die Gerade geht. Die erste und die zweite Tafelneigung ν_1, ν_2 der Geraden AB,

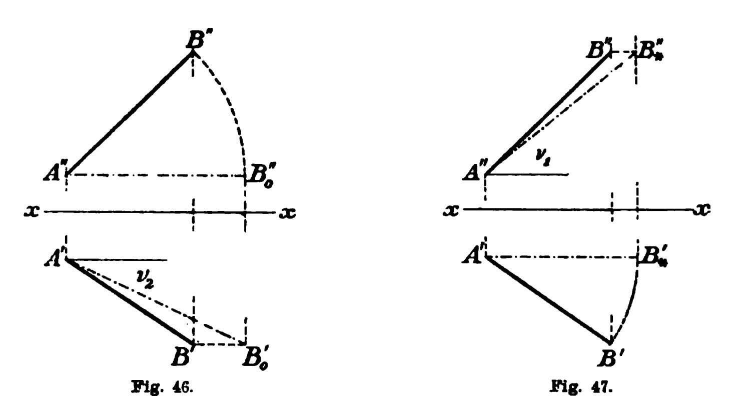


Fig. 46. Fig. 47.

d. h. ihre Neigungen gegen die Ebenen Π_1, Π_2, werden daher gemessen in den Ebenen $ABB'A'$ und $ABB''A''$, die als erste und zweite projizierende Ebene der Geraden AB bezeichnet werden, weil sie die erste und zweite Projektion bestimmen. Es ist ν_1 gleich der Neigung von AB gegen $A'B'$, ν_2 gleich der von AB gegen $A''B''$. In Figur 47 ist $ABB'A'$ nach der Drehung zu Π_2 parallel, also ν_1 der Winkel zwischen $A''B_*''$ und der Achse x. Ebenso ist in Figur 46 der Winkel ν_2 gleich dem zwischen $A'B_0'$ und der Achse x.

10. Es lohnt sich der Mühe, einmal die beiden Konstruktionen der Figuren 46 und 47 in einer Figur zu vereinigen, Figur 48, für deren Verständnis die Bemerkung entscheidend ist, daß $A''B_*'' = A'B_0'$ ist (als wahre Länge von AB). Man ersieht daraus sofort, daß durch ν_1, ν_2 und A', A'' die Projektionen h' und h'' der Geraden AB bestimmt sind, während natürlich B beliebig bleibt. Das ist aber die Lösung der Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt A', A'' eine Gerade mit den Tafelneigungen ν_1, ν_2 zu legen. Zur Lösung dieser Aufgabe zieht man durch A' und A'' die Parallelen zu x, trägt an der ersten in A' den Winkel ν_2, an der zweiten in A'' den Winkel ν_1 an, wobei diese Winkel verschiedene Lagen annehmen können, und trägt auf ihren gegen x geneigten Schenkeln vom Scheitel aus

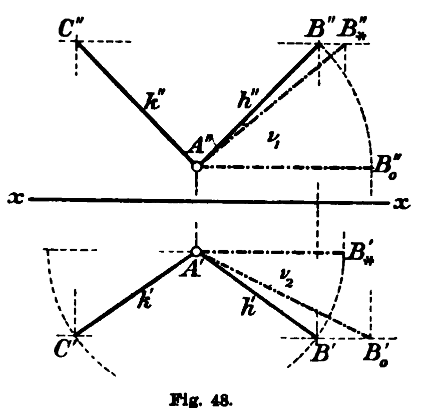


Fig. 48.

dieselbe Strecke $A'B_0' = A''B_*''$ ab, deren Länge beliebig ist. Das Lot aus B_*'' auf x bestimmt auf der Parallelen durch A' zu x den Punkt B_*'. Dann legt man um A' als Mittelpunkt den Kreis, der durch B_*' geht. Er wird von der Parallelen durch B_0' zu x in dem Punkte B' getroffen (der auch die Lage C' haben kann), und das Lot aus B' auf x trifft die durch B_*'' parallel zu x verlaufende Gerade in einem Punkte B'', derart, daß $A'B'$ oder h' und $A''B''$ oder h'' die beiden Risse der gesuchten Geraden sind; eine zweite Lösung k', k'' liegt symmetrisch zu $A'A''$.

11. An die Figuren 46 und 47 knüpft sich noch die Lösung einer anderen Fundamentalaufgabe: Aus einem Punkte P', P'' auf die Gerade $A'B'$, $A''B''$ das Lot zu fällen. Man denkt sich die Punkte P, P', A, A', B, B' starr miteinander verbunden und dieses System um AA' gedreht, bis $A'B'$ in der Endlage $A'B_0'$ zu x parallel wird (Fig. 49). Hierbei beschreiben alle gedrehten Punkte denselben Winkel ω, der etwa durch den Bogen $\omega = \text{arc}\, B'B_0'$ gemessen wird. Diesen Winkel beschreibt auch P', so daß also seine Endlage P_0', wie aus Figur 49 zu ersehen ist, sich konstruieren läßt.

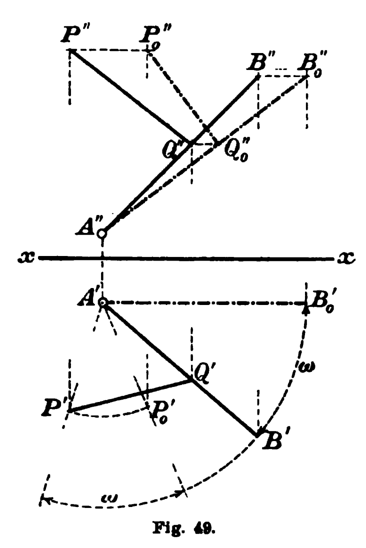


Fig. 49.

Die Punkte des Aufrisses beschreiben bei der Drehung Parallelen zu x, wodurch zunächst P_0'' auf dem Lote aus P_0' auf x bestimmt ist.

Nach dieser Drehung ist die den Rissen $A'B_0' \| x$, $A''B_0''$ entsprechende Gerade AB_0 zu Π_2 parallel, der Aufriß des mitgedrehten Lotes durch P_0'' steht daher nach Satz 11, § 7 auf $A''B_0''$ senkrecht und kann konstruiert werden: $P_0''Q_0'' \perp A''B_0''$, wo Q_0'' der Fußpunkt. Macht man jetzt die Drehung rückgängig, so daß P_0'' wieder auf P'' fällt, so bewegt sich Q_0'' parallel zu x, bis der Punkt auf $A''B''$ in die Anfangslage Q'' zurückkehrt, die wir gerade gesucht haben. Bestimmt man noch Q' als Schnittpunkt von $A'B'$ mit dem Lote aus Q'' auf x, so ist $P'Q'$, $P''Q''$ das gesuchte Lot.

§ 9. Punkt, Gerade und Ebene.

1. Um fertig gegebene ebenflächige Körper im Grund- und Aufrißverfahren darzustellen, reicht die vorausgegangene Betrachtung im wesentlichen aus; wenn es jedoch gilt, an diesen Gebilden geometrische Konstruktionen vorzunehmen oder sie durch solche zu erzeugen, dann

müssen wir auf die Verknüpfung zwischen Punkten, Geraden und Ebenen ausführlicher eingehen.

Zur Festlegung der Geraden und der Ebene haben wir bisher ein beliebiges in ihr gelegenes Punktepaar bezw. Dreieck benutzt. Dieses Verfahren hat den Vorzug der Allgemeinheit und der ausnahmslosen Gültigkeit; daneben wollen wir auch die speziellen Bestimmungsstücke, die Spuren, in Gebrauch nehmen, die unter Umständen mancherlei Vorteile bieten.

Satz 1. Ein Punkt liegt auf einer Geraden, wenn seine Projektionen auf den gleichnamigen Projektionen der Geraden liegen.

Ist also die Gerade g in Grundriß g' und Aufriß g'' gegeben, so bestimmt der Aufriß P'' jedes Punktes P der Geraden seinen Grundriß P' und umgekehrt der Grundriß den Aufriß (siehe Fig. 50).

Unter den Punkten der Geraden haben diejenigen ausgezeichnete Lage zu den zwei Tafeln, die der ersten oder der zweiten Tafel angehören, der erste und der zweite Spurpunkt. Nach § 7, Satz 3 muß der Aufriß G_1'' des ersten Spurpunktes G_1 auf der trennenden Achse liegen, also in ihrem Schnittpunkte mit g'', der Grundriß G_2' des zweiten Spurpunktes ebenso in ihrem Schnittpunkte mit g', wie wir schon in Figur 39 gesehen haben.

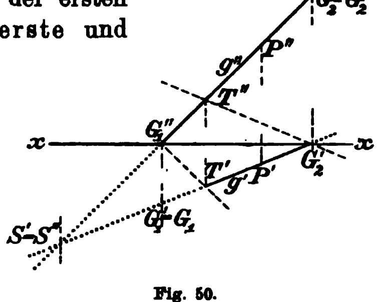


Fig. 50.

Wenn die Projektionen g', g'' von g nicht zueinander parallel sind, so gehört auch ihr Schnittpunkt zu den ausgezeichneten Punkten der Geraden (Fig. 50), denn er stellt einen Punkt S der Geraden dar, dessen Grundriß S' mit seinem Aufriß S'' zusammenfällt; dieser Punkt hat also von beiden Tafeln gleichen Abstand (§ 7, Satz 2), und liegt daher in einer der Ebenen, die die Winkel zwischen den Tafeln Π_1, Π_2 halbieren. Die eine Winkelhalbierende, die erste, geht durch den ersten und dritten Quadranten, die andere, die zweite, durch den zweiten und vierten. Werden aber die Tafeln Π_1, Π_2 in der üblichen Weise ausgebreitet, so liegen Grund- und Aufriß jedes Punktes der ersten Winkelhalbierenden zur trennenden Achse symmetrisch, während sie für jeden Punkt der zweiten Winkelhalbierenden zusammenfallen, und diese Eigenschaft kommt nur den genannten Punkten zu. Der Punkt S', S'' ist demnach der Schnittpunkt von g mit der zweiten Winkelhalbierenden. Der Schnittpunkt T von g mit der ersten Winkelhalbierenden, der übrigens kaum jemals verwendet wird, hat seine

beiden Projektionen T', T'' zu x symmetrisch; wenn man also g'' und g' an x spiegelt, so ist T' der Schnittpunkt von g' mit dem Spiegelbilde von g'', T'' der Schnittpunkt von g'' mit dem Spiegelbilde von g'.

2. Sind zwei Geraden h und k durch ihre Projektionen h', h'' und k', k'' gegeben, so wird die Frage, ob sie sich schneiden, einfach entschieden, indem man den Schnittpunkt S' von h', k' sowie den Schnittpunkt S'' von h'', k'' bestimmt. Liegen S', S'' auf demselben Lote zur Achse x, so sind es die Projektionen des Schnittpunktes (Fig. 51); wenn nicht, so sind die Geraden windschief.

Dieses Kriterium kann nur versagen, wenn die Punkte S', S'' nicht existieren. Das könnte nur eintreten, 1. wenn h' und k' oder h'' und k'' parallel werden, wo wir jedoch vom projektiven Standpunkte aus den Geraden je einen unendlich fernen Schnittpunkt zu-

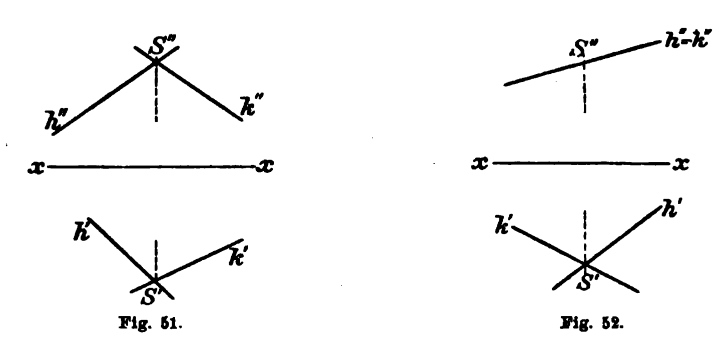


Fig. 51. Fig. 52.

schreiben; liegt also S' im Unendlichen, so muß, damit der Fall des Schneidens eintritt, auch S'' im Unendlichen liegen, und dieses Kriterium reicht aus; 2. wenn h' mit k' oder h'' mit k'' zusammenfällt. Tritt zwischen einem Paare dieser Geraden Koinzidenz ein, so liegen h und k in derselben projizierenden Ebene, die durch jene zusammenliegenden Projektionen geht. Die Geraden schneiden sich dann immer, und falls die beiden anderen Projektionen sich in einem Punkte treffen, so ist dieser, wie im allgemeinen Falle, eine Projektion des Schnittpunktes (Fig. 52).

Es bleibt sonach noch der Fall übrig, daß h' mit k', h'' mit k'' zusammenfällt (Fig. 53); sollen dabei die Geraden h, k dennoch voneinander verschieden sein, so dürfen die durch h' und h'' gehenden beiden projizierenden Ebenen sich nicht schneiden, noch parallel sein, müssen also zusammenfallen. Dann liegen also h und k in einer Normalebene zur trennenden Achse x, und es steht die Gerade, auf der h', h'', k', k'' liegen, auf x senkrecht. In diesem Falle sind h und k durch diese Projektionen allein überhaupt nicht bestimmt, es

müssen entweder noch die Spurpunkte, oder ganz allgemein zwei Punkte A, B von h und C, D von k gegeben sein (Fig. 53). Alsdann dreht man die gemeinsame erste oder zweite projizierende Ebene dieser Strecken um ein in ihr liegendes Tafellot. In der Figur 53 ist die erste projizierende Ebene um AA' gedreht, und zwar gleich um 90°, obwohl das an sich nicht notwendig wäre. In der neuen Lage A_0B_0 und C_0D_0 beider Geraden wird der Schnittpunkt S_0 bestimmt, und wenn darauf die Drehung rückgängig gemacht wird, geht S_0 in den gesuchten Punkt S über.

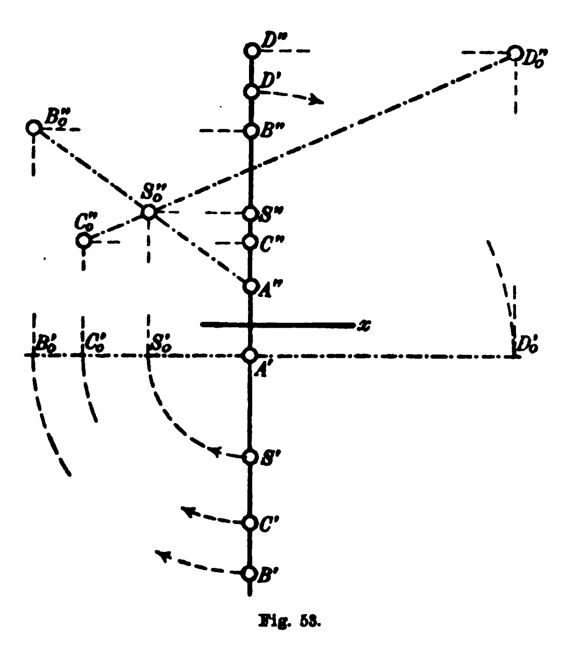


Fig. 53.

3. Eine Ebene η legt man graphisch unter anderm fest durch die beiden Projektionen $A'B'C'$ und $A''B''C''$ eines **Bestimmungsdreiecks**, d. h. eines in η gelegenen eigentlichen Dreiecks, dessen Ecken nicht einer Geraden angehören; wohl aber dürfen zwei Ecken im Unendlichen liegen.

Satz 2. Sind auch die Projektionen eines Bestimmungsdreiecks eigentliche Dreiecke, so läßt sich von jeder Geraden der Dreiecksebene η die eine Projektion aus der anderen ableiten.

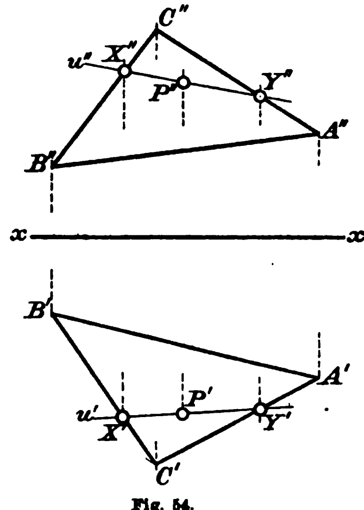


Fig. 54.

Denn es muß z. B. der Grundriß u' der Geraden mindestens zwei Seiten des Dreiecks in voneinander verschiedenen Punkten X', Y' treffen (Fig. 54), und wenn man zu diesen Punkten die Aufrisse X'', Y'' auf den entsprechenden Seiten von $A''B''C''$ bestimmt, so muß u'' durch die voneinander verschiedenen Punkte X'', Y'' gehen, die daher u'' festlegen. Umgekehrt

bestimmen die Punkte X'', Y'', wenn u'' zuerst gegeben ist, die Punkte X', Y' und damit u'. Liegt X' auf einer Seite des Dreiecks $A'B'C'$ unendlich fern, so muß natürlich auch X'' auf der entsprechenden Seite von $A''B''C''$ unendlich fern liegen.

Wenn eine der Projektionen des Bestimmungsdreiecks in ein uneigentliches Dreieck ausartet, gilt der Satz 2 nicht mehr in vollem Umfange, wenn alle beide ausarten, überhaupt nicht mehr.

4. Satz 3. Sind die Projektionen eines eigentlichen Bestimmungsdreiecks einer Ebene eigentliche Dreiecke, so bestimmt von den Projektionen jedes Punktes der Ebene immer eine die andere.

Denn man braucht z. B. durch den Grundriß P' dieses Punktes nur eine Grade u' zu legen (Fig. 54), die den Grundriß des Bestimmungsdreiecks in zwei verschiedenen Punkten X', Y' trifft, und zu X', Y' auf den entsprechenden Seiten im Aufriß die Aufrisse X'', Y'' zu bestimmen, so muß P'' auf $X''Y''$ liegen.

Jetzt können wir die Aufgabe lösen, den Schnittpunkt einer gegebenen Geraden g mit der Ebene eines Dreiecks ABC zu bestimmen.

Fig. 55.

Es seien $A'B'C'$ und $A''B''C''$ eigentliche Dreiecke (Fig. 55). Wir betrachten die eine projizierende Ebene von g, etwa die erste ε_1. Sie enthält unendlich viel Geraden, und alle haben g' zur ersten Projektion. Unter diesen Geraden ist auch die Schnittgerade u von ε_1 mit der Dreiecksebene, und der Schnittpunkt von u mit g ist zugleich der Schnittpunkt S von g mit der Dreiecksebene, den wir suchen.

Zu u', das mit g' identisch ist, läßt sich u'' nach Satz 2 bestimmen; der Schnittpunkt von u'' mit g'' sei S''. Bestimmt man zu S'' den Grundriß S' auf g', so stellt S', S'' den gesuchten Punkt S dar. Der Fall, daß auch u'' mit g'' zusammenfällt, also S'' unbestimmt wird, kann bei eigentlichen Bestimmungsdreiecken $A'B'C'$, $A''B''C''$ nur eintreten, wenn g mit u identisch ist, also in der Ebene des Dreiecks liegt.

In den beiseite gelassenen Ausnahmefällen ist die Lösung so leicht, daß wir dabei nicht zu verweilen brauchen.

5. Dagegen sollen noch die Sichtbarkeitsverhältnisse in Figur 55 unter der Voraussetzung aufgeklärt werden, daß das Dreieck ABC

aus dünnem, nur schwach durchsichtigen Karton ausgeschnitten ist (vgl. § 7, 3. und 5.). Im Grundriß wird für den über der Vorderseite von Π_1 in erheblicher Ferne sich befindenden Zuschauer das Dreieck immer einen Teil der Geraden g von dem Punkte S' an zu bedecken scheinen. Um zu entscheiden, welcher Teil bedeckt wird, gehen wir im Grundriß an die Stelle, wo g' die Seite $B'C'$ trifft (Fig. 55). Dieser Punkt werde, als Grundriß eines Punktes von g, mit M' bezeichnet, als Grundriß eines Punktes von BC mit X'. Im Aufriß zeigt sich dann bei unserer Anlage der Figur, daß X höher über Π_1 liegt als M, da X einen größeren ersten Tafelabstand als M aufweist. Der Zuschauer über Π_1 wird also X näher sehen als M, die Gerade g wird also bei $X' = M'$ scheinbar unter das Dreieck treten, und die Stelle $M'S'$ wird vom Dreieck bedeckt erscheinen. Da g bei S das Dreieck durchdringt, so muß von S' bis Y' und weiter die Gerade über das Dreieck treten. Damit ist der Grundriß erledigt.

Zur Beurteilung des Aufrisses muß man sich nach § 7 vor der Tafel im Unendlichen oder wenigstens in erheblicher Entfernung aufstellen. Es fragt sich dann, ob an der Stelle $Q'' = R''$ des Aufrisses, wo g'' die Gerade $B''C''$ trifft, die Gerade hinter das Dreieck tritt oder davor. Bezeichnet Q'' diese Stelle als Aufriß eines Punktes von BC, und R'' als Aufriß eines Punktes von g, so zeigt der Grundriß, daß R' größeren ersten Tafelabstand hat als Q'. Der Punkt R der Geraden wird also den Punkt Q des Dreiecks verdecken, die Gerade liegt dort vor dem Dreieck und ist demnach auszuziehen bis nach S'', wo sie auf die andere Seite des Dreiecks übergeht und von ihm verdeckt wird. Dieses Beispiel zeigt das Verfahren, das bei Sichtbarkeitsfragen im allgemeinen immer zum Ziele führt.

6. Von den Geraden einer Ebene sind unter anderen diejenigen im Zweitafelsystem ausgezeichnet, die zur ersten oder zweiten Tafel parallel laufen, die ersten oder zweiten Tafelparallelen oder Hauptlinien. Durch jeden Punkt einer Ebene geht immer nur je eine Hauptlinie der beiden Arten, es müßte denn sein, daß sie zu einer Tafel parallel ist, wo sie dann unendlich viel zu ihr parallele Geraden enthält.

Satz 4. Eine erste Hauptlinie hat die zweite, eine zweite Hauptlinie hat die erste Projektion zur trennenden Achse parallel.

Nimmt man den zur Achse parallelen Riß einer Hauptlinie willkürlich an, so kann der andere nach 3. sofort konstruiert werden. Zu den Hauptlinien einer Ebene gehören ihre beiden Spurlinien, die Schnittgeraden der Ebene mit der Tafel, die dadurch aus-



gezeichnet sind, daß immer eine Projektion derselben auf der Achse x liegt. Auf den Spurlinien müssen natürlich die gleichnamigen Spurpunkte aller Geraden der Ebene liegen, und wenn eine Ebene durch ein Bestimmungsdreieck gegeben ist, so findet man die Spurlinien als Ort der Spurpunkte der Dreiecksseiten. Die Spurlinien treffen sich auf der Achse x, oder sie sind parallel.

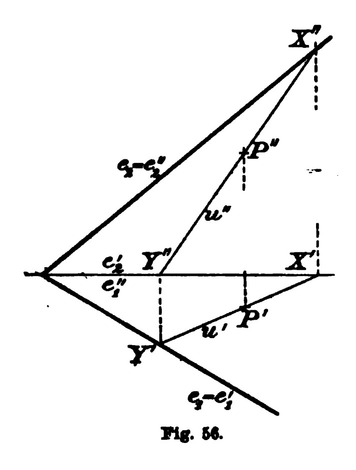
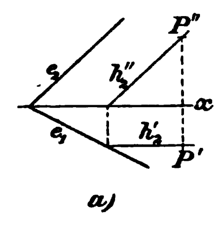


Fig. 56.

Ist eine Ebene η durch ihre Spurlinien e_1, e_2 gegeben, und außerdem von einer Geraden u dieser Ebene der Grundriß u', so geht die allgemeine Konstruktion des Aufrisses u'' von u, die aus Figur 54 zu ersehen ist, in die der Figur 56 über, wo die Geraden e_1 und e_2 die Rolle der Geraden CA und CB der Figur 54 übernehmen. Gleichzeitig zeigt diese Figur, wie man zum Grundriß eines Punktes P der Ebene den Aufriß findet und umgekehrt.

Läßt man in Figur 56 den Punkt X auf e_2 oder Y auf e_1 ins Unendliche rücken, so geht u in eine erste Hauptlinie h_1 bezw. in eine zweite über, und die Konstruktion von P'' aus P' oder von P'



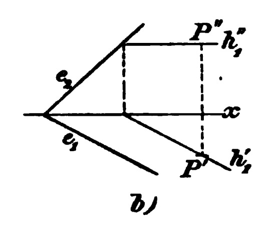


Fig. 57.

aus P'' nimmt die einfachen, viel gebrauchten Formen Figur 57a und 57b an. Alle diese Konstruktionen sind mittels eines Schrägbildes leicht direkt abzuleiten, wodurch sie sehr anschaulich werden.

7. Ihre wichtigste Anwendung finden die Hauptlinien bei Aufgaben über Parallelismus und Orthogonalität.

Satz 5. Parallele Ebenen haben parallele Hauptlinien (und Spuren, vgl. § 7, Satz 8), denn sie werden von jeder Ebene in parallelen Geraden geschnitten, also auch von den zu einer Tafel parallelen Ebenen.

Die Aufgabe, zu einer gegebenen Ebene φ durch einen gegebenen Punkt $\mathfrak{C}$ die Parallelebene zu legen, läßt sich ganz allgemein so lösen: Die Ebene φ sei durch die Risse der Ecken eines

Bestimmungsdreiecks ABC gegeben (Fig. 58); für unseren Zweck genügen die Risse a', a'' und b', b'' der zwei Seiten a und b. Zieht man einfach durch $\mathfrak{C}''$ die Geraden $\mathfrak{a}'' \| a''$, $\mathfrak{b}'' \| b''$, durch $\mathfrak{C}'$ entsprechend $\mathfrak{a}' \| a'$, $\mathfrak{b}' \| b'$, so sind $\mathfrak{a}', \mathfrak{a}''$ und $\mathfrak{b}', \mathfrak{b}''$ die Projektionen zweier Geraden $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, die zu φ parallel sind, durch $\mathfrak{C}$ gehen und folglich die Parallelebene η zu φ festlegen. Man kann noch zur Erhöhung der Anschaulichkeit auf $\mathfrak{a}''$ und $\mathfrak{b}''$ die Punkte $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$ so annehmen, daß $\mathfrak{A}''\mathfrak{B}'' \| A''B''$ wird, und dazu auf $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ die Grundrisse $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ bestimmen. Es ist dann auch $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' \| A'B'$. Das Bestimmungsdreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ von η ist daher dem Dreieck ABC ähnlich und zu ihm ähnlich gelegen.

Fig. 58.

Ein Spezialfall dieser Lösung ist die folgende, die φ durch die zwei Spuren f_1, f_2 gegeben sein läßt (Fig. 59). Das sind wieder zwei Geraden a, b, nur in sehr spezieller Lage: $f_1' = f_1$, $f_1'' = x$; $f_2' = x$, $f_2'' = f_2$, und wie in Figur 58 zieht man durch $\mathfrak{C}'$ Parallelen zu den ersten Rissen f_1, x, durch $\mathfrak{C}''$ die Parallelen zu den Aufrissen x, f_2 dieser Geraden. Dadurch ist η festgelegt. Diese Parallelen sind Hauptlinien. Man erhält also die Spurlinien von η durch Kombination der Figuren 57, d. h. indem man durch die Spurpunkte jener Hauptlinien zu f_1 und f_2 die Parallelen e_1, e_2 zieht.

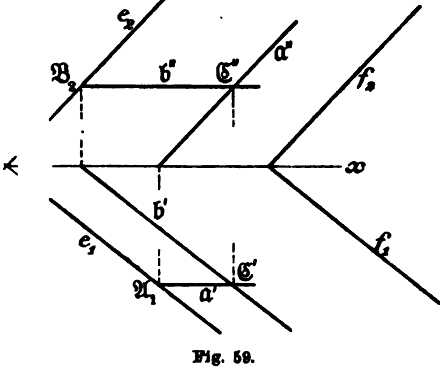


Fig. 59.

8. Wichtiger sind die Hauptlinien zur Lösung der Aufgabe: **Aus einem Punkte P auf eine Ebene η das Lot zu fällen** (Fig. 60). Dieses wird zu jeder Geraden dieser Ebene senkrecht sein, folglich auch zu ihren Hauptlinien. Nach § 7, Satz 9 und 11 steht **daher die erste Projektion des Lotes auf der jeder ersten, die zweite Projektion auf der jeder zweiten Hauptlinie senkrecht.**

Zur Ersparung von zwei Loten legen wir den Aufriß h'' einer

ersten Hauptlinie h parallel zur Achse x durch A'', den Grundriß k' einer zweiten Hauptlinie k durch A' parallel zu x, bestimmen zum Schnittpunkt H'' von h'' mit $B''C''$ den Grundriß H' auf $B'C'$, ebenso zum Schnittpunkt K' von k' mit $B'C'$ den Aufriß K'' auf $B''C''$. Die Lote aus P' und P'' auf $A'K'$, $A''H''$ sind dann die Risse des gesuchten Lotes, dessen Schnittpunkt S mit der Dreiecksebene nach Figur 55 ermittelt wird.

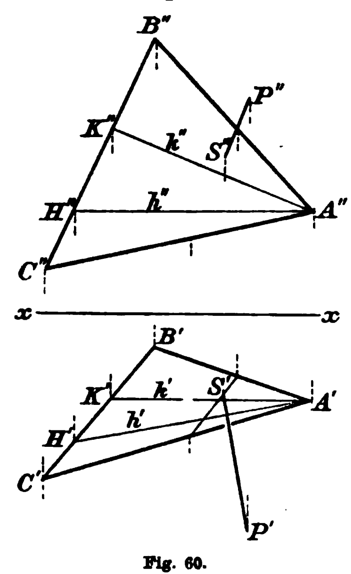


Fig. 60.

Sehr einfach muß diese Konstruktion natürlich werden, wenn die Richtung der Hauptlinien unmittelbar gegeben ist, z. B. durch die Spurlinien e_1, e_2 der Ebene. Die Projektionen l', l'' des Lotes sind dann einfach die aus P' auf e_1 und aus P'' auf e_2 gefällten Senkrechten (Fig. 61). Der Schnittpunkt S von l mit der Ebene η wird genau wie im allgemeinen Falle gefunden: Man betrachtet l' als Grundriß u' einer in η gelegenen Geraden und konstruiert zu den Schnittpunkten X', Y' von u' mit $e_1' = e_1$ und der Achse $x = e_2'$ die Aufrisse X'', Y'' auf $x = e_1''$ und $e_2 = e_2''$. Dann ist $X''Y''$ der Aufriß u'' von u, der l'' im Aufrisse S'' des Punktes S trifft. Es empfiehlt sich, die auf die Spurlinien gegründeten Projektionen auch einmal unmittelbar aus der Anschauung mittels eines Schrägbildes herzuleiten.

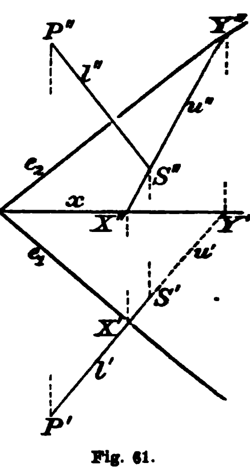


Fig. 61.

9. Verbindet man Figur 61 mit Figur 57b (oder a), so erhält man eine Lösung der schon in § 8, 11. behandelten Aufgabe, aus einem gegebenen Punkte P auf eine gegebene Gerade l das Lot zu fällen. Zuerst wird man nämlich durch P die Normalebene auf l fällen, deren Spuren e_1, e_2 auf l' bezw. l'' senkrecht stehen müssen (Fig. 62). Von dieser Ebene kennt man die durch P gehenden beiden Hauptlinien; es genügt, etwa die erste h zu konstruieren: $h' \perp l'$ durch P'. Diese Gerade trifft die Achse x im Grundrisse H_2' des zweiten Spurpunktes H_2

Fig. 62.



von h; der erste liegt also auf dem Lote in H_2 zur Achse x und auf der Parallelen durch P'' zu x. Das Lot durch H_2 auf l'' ist dann die zweite Spur e_2 der Normalebene; durch den Schnittpunkt von e_2 mit x legt man $e_1 \perp l'$. Damit ist die Normalebene bestimmt. Ihr Schnittpunkt Q mit der Geraden l wird wie S in Figur 61 gefunden.

10. Die Schnittgerade zweier Ebenen ist bekannt, wenn man zwei ihrer Punkte angeben kann. Um also eine Ebene α mit einer Ebene β zum Schnitt zu bringen, wird man entweder zwei Geraden der einen Ebene mit der anderen Ebene zum Schnitt bringen, oder, falls gewisse Schnittpunkte unzugänglich werden, die Schnittgeraden von α und β mit einer oder zwei Hilfsebenen bestimmen und ihre Schnittpunkte konstruieren. Neue Methoden treten bei dieser Aufgabe nicht auf. Sind die Ebenen α und β durch ihre Spurlinien a_1, a_2 und b_1, b_2 gegeben, so ist der Schnittpunkt S_1 von a_1 und b_1 der erste, der Schnittpunkt S_2 von a_2 und b_2 der zweite Spurpunkt der Schnittgeraden.

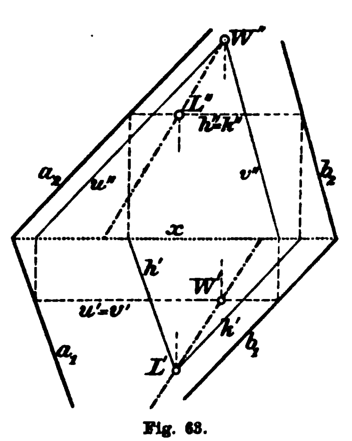


Fig. 63.

In Figur 63 ist der besonders ungünstige Fall erledigt, daß diese Punkte S_1, S_2 unzugänglich sind. Man nimmt dann eine erste Hilfsebene parallel zur ersten Tafel an, die also α und β in zwei Hauptlinien h, k schneidet. Ihre Aufrisse h'', k'' liegen auf der zweiten Spurlinie dieser Hilfsebene, die parallel zur trennenden Achse x verläuft und beliebig angenommen werden kann; nach Figur 57 werden dazu die Grundrisse h', k' konstruiert. Diese treffen sich in einem Punkte L', dem Grundriß des Schnittpunktes L von h und k. Sein Aufriß L'' liegt auf $h'' = k''$. — Ganz ebenso legen wir eine zweite Hilfsebene parallel zur zweiten Tafel an. Sie schneidet α und β in zwei zweiten Hauptlinien u, v, deren Grundrisse u', v' auf eine zu x parallele Gerade fallen. Diese können wir willkürlich annehmen. Die Aufrisse u'', v'' findet man dazu nach Figur 57. Ihr Schnittpunkt sei W''. Bestimmt man dazu den Grundriß W' auf $u' = v'$, so sind W', W'' die Projektionen des Schnittpunktes W von u und v, der den Ebenen α und β angehört. Durch L und W ist dann die Schnittgerade von α und β graphisch bestimmt.

§ 10. Drehung und Tafelverschiebung.

1. Zum Gedankenkreise des § 8 zurückkehrend wollen wir jetzt etwas schwierigere Bewegungen untersuchen, und zwar zuerst die

Drehung projizierender Ebenen um eine Spur. Diese Drehung gilt im allgemeinen den Gebilden, die in einer solchen Ebene liegen. Häufig ist es aber auch wünschenswert, einen beliebigen, mit einer projizierenden Ebene starr verbundenen Körper an dieser Drehung teilnehmen zu lassen, wobei man sich diesen Körper auf diese Ebene senkrecht projiziert denkt. Das läuft darauf hinaus, daß man die Ebene als neue Zeichentafel betrachtet. Ganz allgemein handelt es sich also darum, eine Zeichentafel auf der anderen zu verschieben und zunächst einmal zuzusehen, wie sich dabei die Projektionen des Körpers verhalten. Die Drehung des Körpers soll dann unser nächstes Problem sein.

2. Verschiebung einer Tafel senkrecht zur anderen. Ein Würfel mit aufgesetzter Pyramide, der auf Π_1 ruht, sei in Π_1 und Π_2 dargestellt (Fig. 64). Die trennende Achse sei jetzt ausführlicher mit x_{12} bezeichnet. Wir halten nun Π_1 fest und verschieben Π_2, immer auf Π_1 senkrecht, in eine neue Lage Π_3, deren erste Spur x_{13} wir uns willkürlich vorschreiben können. Es sollen die Projektionen des Körpers in bezug auf die Tafeln Π_1 und Π_3 dargestellt werden. Man kann die Sachlage auch einfach so auffassen, daß an Stelle von Π_2 eine neue, ebenfalls auf Π_1 senkrechte Projektionsebene Π_3 eingeführt werden soll, deren trennende Achse x_{13} sei. In bezug auf die Tafeln Π_1, Π_3 soll dann der Körper dargestellt werden.

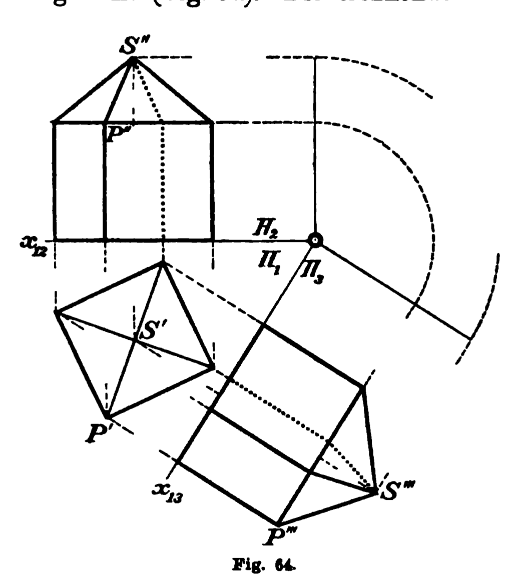


Fig. 64.

Bei der Verschiebung einer Tafel läßt man die andere nicht veränderte Tafel stets ihre Oberseite beibehalten. Dann ist zur Bestimmung der neuen Quadranteneinteilung des Raumes nur noch zu vereinbaren, welche Seite von Π_3 als Vorderseite gelten soll. Das sei geschehen. In der Figur macht man das ersichtlich, indem die Halbebene von Π_1 die dem ersten Quadranten des Systems Π_1, Π_3 angehört, in der Nähe von x_{13} die die Marke Π_1 erhält. Nimmt man auf dieser Halbebene von Π_1 Stellung, so wird die obere Halbebene von Π_3 nach hinten umgelegt, fällt also auf die andere Halbebene von Π_1, die die Marke Π_3

erhält, (Fig. 64). Diese mit Π_3 markierte Halbebene von Π_1 wendet uns also die Vorderseite von Π_3 zu, soweit diese dem ersten Quadranten des neuen Zweitafelsystems angehört.

Der Vollständigkeit halber ist in Figur 64 auch zu beiden Seiten von x_{12} durch die Beischriften Π_1, Π_2 angegeben worden, welche der beiden Halbebenen zu beiden Seiten von x_{12} die vordere Oberfläche von Π_1 oder die obere Vorderfläche von Π_2 darstellt.

3. Nach diesen Festsetzungen macht die Darstellung des Würfels nun keine Schwierigkeiten mehr. Die erste Projektion bleibt natürlich dieselbe, da der Würfel seine Lage zur ersten Tafel nicht geändert hat. Fassen wir irgend eine Würfelecke P ins Auge, so wird also ihre dritte Projektion P''' auf der durch P' auf x_{13} gefällten Senkrechten liegen. Da der erste Tafelabstand des Punktes P geblieben ist, der nach § 7, Satz 2 durch den Abstand des Punktes P'' von der Achse x_{12} gemessen wird, so muß auch P''' von x_{13} diesen Abstand haben, wodurch P''' auf der soeben gezogenen Senkrechten festgelegt ist, sobald wir wissen, nach welcher Seite von x_{13} der erste Tafelabstand abzutragen ist. Da gilt die einfache Regel, daß die dritte Projektion eines Punktes mit seiner ersten Projektion auf derselben Seite von x_{13} liegt oder nicht, je nachdem die zweite Projektion und die erste auf derselben Seite von x_{12} liegen oder nicht, denn diese Regel sichert uns nach den Ausführungen in § 7, 1. die Lage von P im richtigen Quadranten. Nach dieser Regel ist in Figur 64 der Würfel dargestellt. Denkt man sich umgekehrt die erste und dritte Projektion des Würfels als zuerst gegeben, so zeigt dieselbe Figur, wie man rückwärts die zweite Projektion erhält.

4. Drehung um eine Hauptlinie. In § 8 haben wir gesehen, wie sich die Drehung eines Körpers um ein zweites Tafellot graphisch ausnimmt. Die zweiten Tafellote gehören zu den ersten Hauptlinien, d. h. zu den Geraden, die mit der ersten Tafel parallel verlaufen. Jetzt wollen wir einen Körper, etwa einen Würfel, um eine beliebige erste Hauptlinie s, die nicht zugleich zu Π_2 senkrecht ist, drehen, und zwar sei der Drehwinkel ω sowie der Drehsinn vorgeschrieben. Von der Hauptlinie s seien die erste Projektion s' und der zweite Spurpunkt S_2 gegeben. Diese Aufgabe führt man auf den schon erledigten Fall zurück, indem man eine neue, zu s' senkrechte Ebene Π_3 an Stelle von Π_2 als Projektionsebene einführt, in dem Systeme Π_1, Π_3, in dem jetzt s ein drittes Tafellot ist, die Drehung ausführt und aus dem ersten und dritten Riß des gedrehten Körpers nach Nr. 3 den zweiten Riß rekonstruiert.



In Figur 65 ist x_{13} als beliebiges Lot auf s' angenommen. Den Gang der Konstruktion verfolgt man am besten an einem Punkte P, der mit dem Würfel starr verbunden an der Drehung teilnimmt. Aus P' und P'' findet man P''', indem man aus P' auf x_{13} das Lot $P'P_{13}$ fällt und auf diesem den ersten Tafelabstand $P_{12}P''$ des Punktes P von P_{13} aus abträgt: $P_{13}P''' = P_{12}P''$; da P'' von P' durch x_{12} getrennt ist, so muß auch P''' von P' durch x_{13} getrennt angenommen werden, wodurch die Richtung bestimmt ist, in der die Strecke abzutragen ist. Die Drehachse s steht auf Π_3 senkrecht und trifft diese Ebene in einem dritten Spurpunkte S_3, der denselben ersten Tafelabstand S_3S_3' hat wie der zweite Spurpunkt S_2, also $S_3S_3' = S_2S_2'$. Zur Konstruktion von S_3 bestimmt man daher den Schnittpunkt S_3' von s' mit x_{13} und

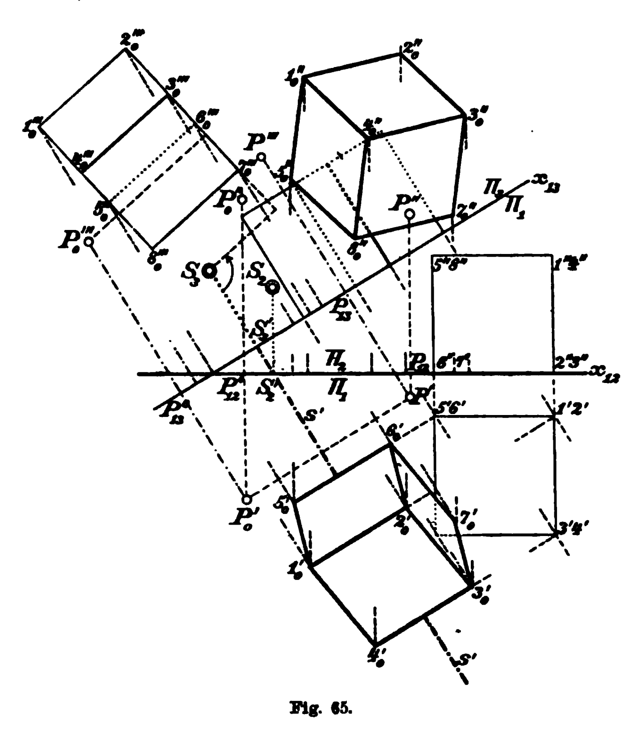


Fig. 65.

trägt auf s' die Strecke $S_3'S_3 = S_2'S_2$ ab, und zwar im vorliegenden Beispiele nach der mit Π_3 bezeichneten Seite von x_{13}, da S_2 auf der mit Π_2 bezeichneten Seite von x_{12} liegt. Bei der Drehung des Körpers und des Punktes P um s, deren Drehsinn auf der Vorderfläche von Π_3 etwa entgegengesetzt der Bewegung des Uhrzeigers sein soll, drehen sich alle Punkte um s und ihre dritten Projektionen um S_3 und zwar mit dem vorgeschriebenen Drehwinkel ω (§ 8, Satz 3). Macht man also $\sphericalangle P_0'''S_3P''' = \omega$ und liegt S_3P_0''' links von S_3P''', so ist P_0''' die dritte Projektion des gedrehten Punktes P_0; die erste Projektion P_0' liegt nach § 8, Satz 3 auf der durch P' zu x_{13} gezogenen Parallelen sowie auf dem Lote aus P_0''' auf x_{13}. Nachdem hiermit die Aufgabe im Systeme Π_1, Π_3 gelöst ist, gilt es nur noch, aus P_0', P_0''' den Aufriß P_0'' des Punktes P_0 im ursprünglichen Systeme Π_1, Π_2 zu finden. Zu diesem Zwecke fällt man

$P_0'P_{12}^0 \perp x_{12}$ und trägt auf dieser Geraden $P_{12}^0 P_0'' = P_0''' P_{13}^0$ in der Richtung ab, daß P_0'' von P_0' durch x_{12} getrennt wird oder nicht, je nachdem P_0''' von P_0' durch x_{13} getrennt wird oder nicht.

In dieser Weise verfährt man mit allen Eckpunkten des Würfels. Um eine Überladung der Figur mit Buchstaben zu vermeiden, sind die Ecken des Würfels in der dritten Projektion vor der Drehung ohne Benennung geblieben. Zur Einübung des Verfahrens tut man gut, alle acht Ecken des Würfels auf diesem Wege zu konstruieren. Praktisch würde ja die Konstruktion dreier von einer Ecke ausgehender Kanten ausreichen; die übrigen ergeben sich daraus durch Konstruktion von Parallelogrammen.

5. **Aufgaben mit einer Hilfstafel.** Die Einführung einer projizierenden Ebene als Hilfstafel wird sich überall da bewähren, wo eine Aufgabe bei spezieller Lage zu den Tafeln leicht lösbar ist und die Ebene der Hilfstafel mit dem darzustellenden geometrischen Gebilde in ausgezeichneter Weise verknüpft ist. Soll z. B. aus einem Punkte A auf eine durch ihre Spuren e_1, e_2 gegebene Ebene η das Lot gefällt und seine wahre Länge bestimmt werden (Fig. 66), so spielt sich die stereometrische Konstruktion des Lotes ganz in der durch A gehenden Ebene Π_3 ab, die auf e_1 senkrecht steht. Diese steht dann auf Π_1 und auf η senkrecht und schneidet η in einer Geraden u, auf die man von A aus das Lot zu fällen hat; dieses liegt also in Π_3. Diese Ebene werden wir daher als Hilfstafel Π_3 statt Π_2 einführen; ihre erste Spur x_{13} ist das Lot $A'F$ aus A' auf e_1; ihre zweite Spur x_{23} steht auf der trennenden Achse x_{12} von Π_1

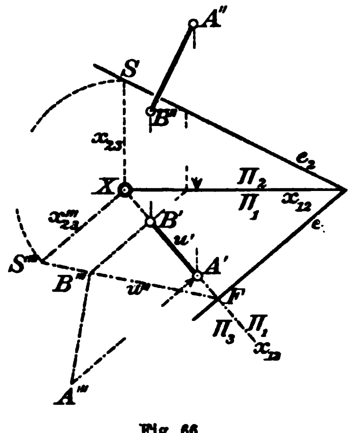


Fig. 66.

und Π_2 senkrecht, und zwar wie immer in dem Punkte X, in dem x_{12} von der ersten Spur x_{13} getroffen wird. Klappt man nun Π_3 um x_{13} in die Tafel Π_1, so wird die mit Π_3 starr verbunden gedachte Gerade x_{23} in eine neue Lage $x_{23}''' \perp x_{13}$ kommen. Der Schnittpunkt S von x_{23} mit e_2, der in der Tafel Π_2 liegt, fällt dann als S''' auf x_{23}''', und zwar wird $XS''' = XS$. Daher ist $S'''F$ die dritte Projektion von u. Mit anderen Worten: Die Ebene Π_3 schneidet die Ebenen Π_1, Π_2 und η in den drei Seiten eines Dreiecks FXS, das wir um FX in die Tafel Π_1 umgelegt haben. In Π_3 liegt nun auch A, und zwar steht AA' auf der Drehachse XF senkrecht. Also erhält AA' durch die Umklappung die Lage $A'''A' \perp x_{13}$, wo $A'''A'$ gleich dem Abstande des Punktes A'' von x_{12} ist. Alles das hatten wir schon

an Figur 64 kennen gelernt. Fällt man jetzt $A'''B''' \perp S'''F$, so ist $A'''B'''$ die Umlegung des Lotes und zugleich die Länge dieses Lotes in ihrer wirklichen Größe. Wir fällen nun $B'''B' \perp x_{13}$. Dann ist B' der Grundriß des Fußpunktes von BA, und der Aufriß B'' von B kann nun nach Figur 57b gefunden werden, indem man die Gerade $B'''B'$ als Grundriß einer ersten Hauptlinie durch B auffaßt, in dem Schnittpunkte von $B'''B'$ mit x_{12} auf x_{12} das Lot errichtet und durch seinen Schnittpunkt mit e_2 zu x_{12} die Parallele legt. Auf dieser muß B'' liegen. Im Falle des Versagens oder zur Kontrolle kann man auch aus F auf x_{12} das Lot fällen und seinen Fußpunkt mit S verbinden. Diese Gerade, der Aufriß u'' von u, ist ein zweiter Ort für B'' (vgl. Fig. 56).

6. In Figur 66 ist $S'''FX$ der Winkel, den die Ebene η mit Π_1 bildet, die sogenannte erste Tafelneigung der Ebene η. Für die Konstruktion der beiden Neigungswinkel einer Ebene η ergibt sich daraus folgendes Verfahren (Fig. 67). Von einem Punkte

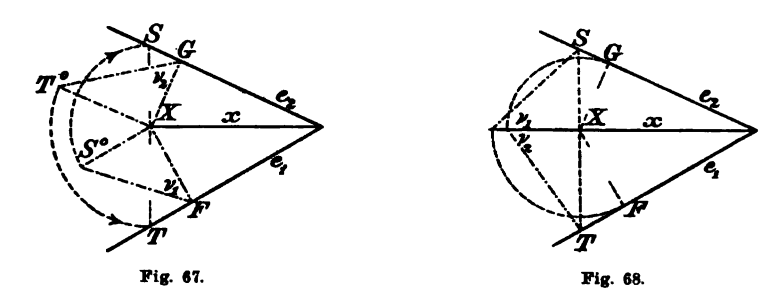


Fig. 67. Fig. 68.

X der trennenden Achse x fällt man auf die Spuren e_1 und e_2 von η die Lote XF und XG und errichtet ferner in X auf x das Lot, das e_1, e_2 in T, S trifft. Macht man nun $S^0X \perp XF$ und $= XS$, sowie $T^0X \perp XG$ und $= XT$, so sind $\nu_1 = \sphericalangle S^0FX$ und $\nu_2 = \sphericalangle T^0GX$ die gesuchten Winkel.

Durch Drehung der Dreiecke S^0XF und T^0XG um X im Sinne der in der Figur angesetzten Pfeile entsteht die Figur 68, die auch offenbar unabhängig von Figur 67 ausführbar ist und somit eine zweite Lösung unserer Aufgabe darstellt.

7. Geometrisch ist mit dieser Aufgabe die folgende verwandt: Durch eine gegebene Gerade g eine Ebene von gegebener erster Tafelneigung ω zu legen (Fig. 69). Der Methode nach gehört die Aufgabe zu denen des § 8, ihre Lösung beruht auf der Drehung um ein Tafellot. Um nämlich überhaupt einmal eine Ebene von der gegebenen Tafelneigung in die Figur zu bringen, denken wir

uns durch einen Punkt A von g eine Normalebene ν von Π_2 gelegt, die mit Π_1 den Winkel ω bildet. Die erste Spur n_1 von ν steht auf der trennenden Achse x_{12} senkrecht und trifft sie in einem Punkte N, durch den die zweite Spur n_2 geht, die mit x_{12} den Winkel ω einschließt; nimmt man umgekehrt n_1 und n_2 mit diesen Eigenschaften an, so hat auch ν die richtige Tafelneigung, und wenn man zum Schnittpunkte A'' von g'' mit n_2 auf g' den Grundriß A' konstruiert, so geht ν auch durch den Punkt A von g. Von dieser einen richtig geneigten Ebene durch A gelangt man zu allen, indem man ν mit AA' starr verbunden denkt und um dieses erste Tafellot rotieren läßt. Dabei behält die Ebene ν immer ihre erste Tafelneigung ω bei, und ihre erste Spur dreht sich um A', umhüllt also den Kreis $\varkappa$ mit dem Mittelpunkte A', der n_1 berührt. Die ersten Spuren aller Ebenen durch A von gegebener erster Tafelneigung umhüllen demnach diesen Kreis.

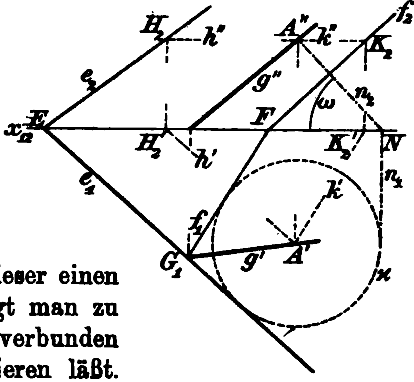


Fig. 69.

Die gesuchte Ebene η nun soll nicht nur durch A gehen, sondern durch g selber, was sicher der Fall ist, wenn sie durch noch einen Punkt von g geht. Als solchen wählt man etwa den ersten Spurpunkt G_1 von g. Durch diesen muß dann auch die erste Spur von η gehen (§ 9, 6.) und ist somit als Tangente aus G_1 an den Kreis in zwei mögliche Lagen e_1 und f_1 bestimmt. Es gibt daher zwei Ebenen η und φ von der verlangten Art. Um die zweite Spurlinie e_2 von η zu finden, legt man durch A' die Gerade $h' \| e_1$ und faßt sie als Grundriß einer ersten Hauptlinie durch A in η auf; ihr Aufriß h'' ist durch A'' parallel zu x_{12} zu ziehen. Auf ihm liegt der zweite Spurpunkt H_2. Durch diesen muß e_2 gehen und die erste Spur in ihrem Schnittpunkte E mit x_{12} treffen. Ebenso zieht man durch A' die Gerade $k' \| f_1$, bringt sie in K_2' mit x_{12} zum Schnitt, errichtet in K_2' auf x_{12} das Lot und ermittelt seinen Schnittpunkt K_2 mit der durch A'' zu x_{12} gezogenen Parallelen $k'' = h''$. Dann ist FK_2 die zweite Spur f_2 von φ. Damit ist die Aufgabe gelöst.

8. Aufgaben mit Drehung um eine Hauptlinie. Ein Dreieck ABC ist durch seine Projektionen $A'B'C'$ und $A''B''C''$ gegeben; man soll seine wirkliche Gestalt ermitteln. Wäre das Dreieck zur zweiten Tafel parallel, so wäre es kongruent zu $A''B''C''$. Um diese Tatsache zu verwerten, dreht man das Dreieck um eine in seiner Ebene liegende zweite Hauptlinie h, deren

Grundriß $h' \| x$ beliebig angenommen werden kann, zur Ersparung eines Lotes etwa als Parallele zur trennenden Achse x durch eine Ecke A'. Doch wollen wir in Figur 70 auf diese Bequemlichkeit verzichten; h' trifft zwei Seiten von $A'B'C'$ in X' und Y'; zu diesen Grundrissen bestimmt man die Aufrisse X'', Y'' in bekannter Weise, und ihre Verbindungslinie h'' ist der Aufriß von h. Bei der Drehung von ABC um h beschreibt jede Ecke des Dreiecks, z. B. C, einen Kreis, dessen Ebene auf h und damit auf Π_2 senkrecht steht. Die Projektion C'' von C bewegt sich also auf einer zu h'' senkrechten Geraden der Zeichenebene. Es folgt allgemein:

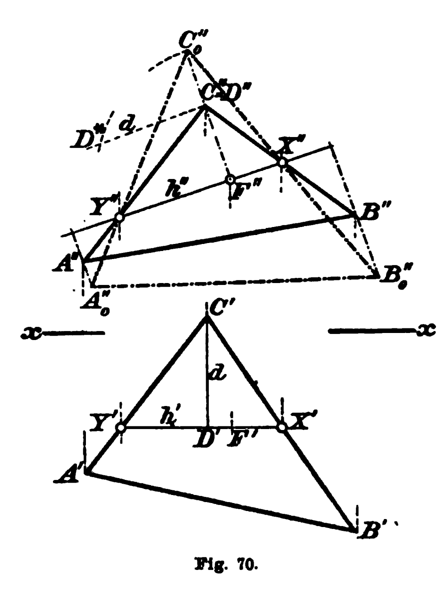


Fig. 70.

Dreht sich eine Ebene um eine ihrer ersten (oder zweiten) Hauptlinien, so bewegt sich die erste (zweite) Projektion jedes ihrer Punkte auf einem Lote zur Projektion dieser Hauptlinie. Man sieht sofort: Zwischen den ersten (zweiten) Projektionen der ursprünglichen und der gedrehten Figur besteht Affinität mit der Projektion der Hauptlinie als Affinitätsachse; die Affinitätsrichtung ist dazu senkrecht.

Es kommt demnach nur darauf an, von einem Eckpunkte, etwa C, die Endlage C_0'' der zweiten Projektion C'' zu finden. C'' bewegt sich auf dem Lote $C''F'' \perp h''$; hier ist F'' der Aufriß des Mittelpunktes des Kreises, auf dem sich C bewegt. Denken wir uns den Grundriß F' auf h' hinzu — zur Konstruktion ist er nicht nötig — und betrachten wir C'' als Aufriß D'' eines Punktes D, dessen Grundriß D' ebenfalls auf h' liegt, so zeigt der Grundriß, was auch geometrisch einleuchtet, daß das Dreieck CDF bei D einen rechten Winkel hat. Die eine Kathete CD, deren Endpunkte denselben ersten Tafelabstand haben, erscheint im Grundriß in ihrer wahren Größe, die andere DF im Aufriß. Daher können wir die Hypotenuse CF, den Radius des Drehkreises, finden, indem wir etwa in C'' auf $C''F''$ das Lot $C''D^* = C'D'$ errichten; $F''D^*$ ist dann der gesuchte Radius, mit dem wir um F'' den Kreis schlagen. Er trifft $F''C''$ in dem gesuchten Punkte C_0'', dem Aufriß des gedrehten Punktes.

Bis hierher ausgeführt löst diese Konstruktion zu-

gleich die Aufgabe, die wahre Größe eines Winkels aus seinen Projektionen zu finden, denn $\sphericalangle X''C_0''Y''$ ist die wahre Größe von $\sphericalangle X''C''Y''$.

Nach der Bestimmung von C_0'' sind A_0'' und B_0'' leichter zu finden: Es liegt A_0'' auf $C_0''Y''$ und auf dem Lote aus A'' auf h''; ebenso B_0'' auf $C_0''X''$ und dem Lote aus B'' auf h''. Die Grundrisse A_0'', B_0'', C_0'' liegen natürlich auf h'.

Dieselbe Aufgabe ist in Figur 70 durch Drehung um eine erste Hauptlinie gelöst. Statt der Hauptlinien kann man selbstverständlich auch die Spuren verwenden.

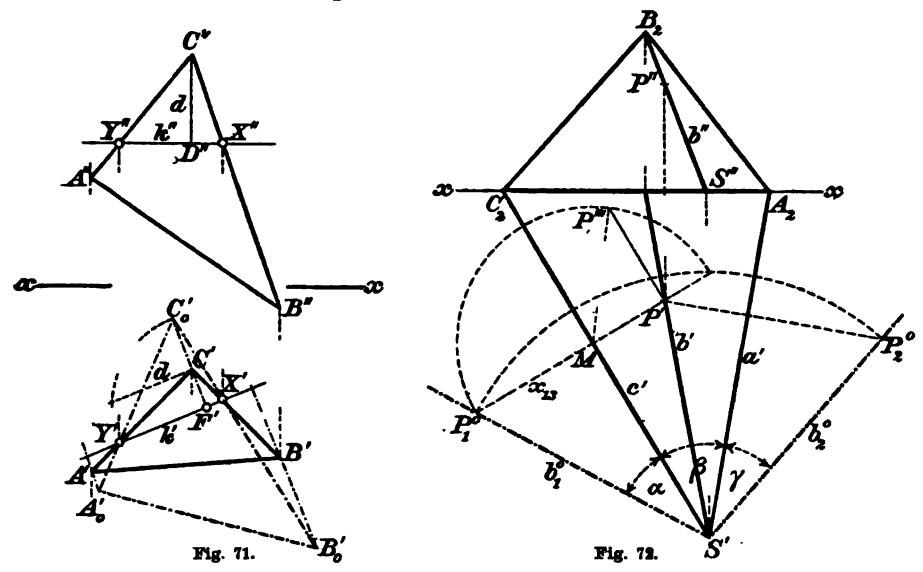


Fig. 71. Fig. 72.

9. Weitere Aufgaben, die durch Drehung um eine Hauptlinie zu lösen sind, werden uns im nächsten Paragraphen begegnen, wo die bei der Drehung immer auftretende Affinität untersucht werden soll. Jetzt wollen wir uns zum Schlusse noch mit einer Methode beschäftigen, die als Aufklappung bezeichnet werden könnte. Die zu drehende Ebene soll nämlich nicht in eine Tafel gedreht werden, sondern sie soll umgekehrt aus der Tafel herausgedreht und aufgerichtet werden. Das Verfahren kommt unter anderen bei folgender Aufgabe zur Anwendung:

Ein Dreikant aus seinen drei Flächenwinkeln α, β, γ zu konstruieren.

Die Winkelfläche β mit der Spitze S möge etwa in Π_1 liegend angenommen werden. Wir legen gleich α und γ daran, so daß wir im Grundrisse von Figur 72 das Dreikant auseinandergebreitet liegen

sehen; α und β stoßen längs c' aneinander, β und γ längs a'; die freien Schenkel $b_1{}^0$ und $b_2{}^0$ von α und γ werden, wenn wir α um c' und γ um a' in richtiger Weise drehen, zusammenfallen in die Kante b, auf deren Konstruktion alles ankommt. Zu dem Ende nehmen wir auf $b_1{}^0$ und $b_2{}^0$ die Punkte $P_1{}^0$ und $P_2{}^0$ in gleichem Abstande von S' an, so daß, wenn die Aufklappung von α und γ glückt, $P_1{}^0$ und $P_2{}^0$ in einem Punkte P von b zusammenfallen. Bei der Drehung von $P_1{}^0$ um S' beschreibt aber dieser Punkt einen Kreis, dessen Ebene auf c' senkrecht steht, seine erste Projektion bewegt sich also auf dem Lote aus $P_1{}^0$ auf c'. Ebenso bewegt sich der Grundriß des sich drehenden Punktes $P_2{}^0$ auf dem Lote aus seiner Anfangslage $P_2{}^0$ auf a'. Daher liegt P' im Schnittpunkte beider Lote. Durch P' geht b'. Der Grundriß von b ist damit gefunden.

Die zweiten Spurpunkte A_2 und C_2 von a und c liegen auf der Achse x_{12}. Ehe wir den zweiten Spurpunkt B_2 von b finden, müssen wir den Aufriß P'' von P' kennen, wozu uns die Kenntnis des ersten Tafelabstandes von P nötig ist. Um diesen zu finden, legen wir durch $x_{13} = P_1{}^0 P'$ die Normalebene auf Π_1 und benutzen sie als dritte Tafel Π_3 statt Π_2. In ihr bewegt sich der Punkt $P_1{}^0$ bei der vorhin beschriebenen Drehung, beschreibt also einen Kreis um den Schnittpunkt M von x_{13} mit c' als Zentrum und mit $MP_1{}^0$ als Radius. Diesen Kreis legen wir um in die Zeichenebene. Dann fällt auch PP' als Lot $P'''P'$ auf $P_1{}^0P'$ in diese Ebene und kann konstruiert werden. Der Schnittpunkt dieses Lotes mit dem Kreise ist P''', und $P'''P'$ ist der gesuchte erste Tafelabstand. In diesem Abstande von x_{12} liegt P''. Dann ist $S''P''$ der Aufriß b'' von b, und der zweite Spurpunkt B_2 von b kann nun ohne weiteres angegeben werden.

§ 11. Affinität im Zweitafelsystem.

1. Bis jetzt haben wir den Begriff der Affinität, von vorübergehenden Hinweisen abgesehen, mit Absicht unbenutzt gelassen, um die Ableitung des Grund- und Aufrißverfahrens möglichst elementar zu gestalten. Von nun an wollen wir jedoch die Kenntnis der Paragraphen 3 und 4 ausdrücklich voraussetzen, um uns die daraus fließenden Konstruktionsvorteile anzueignen. Es wird darauf ankommen, die wichtigsten Fälle des Vorkommens der Affinität hervorzuheben.

Schon in § 9, als wir die Beziehungen zwischen Grundriß und Aufriß von Punkten und geraden Linien, die in einer Ebene η liegen, untersuchten, hätte bemerkt werden können, daß diese Beziehung die definierenden Eigenschaften I, II, III der Affinität (§ 3, 4.) hat:

I. Von jedem Punkte der Ebene η ist die eine Projektion durch die andere eindeutig bestimmt;

II. beschreibt die eine Projektion eine Gerade, so tut es auch die andere;

III. die Geraden, die die beiden Projektionen je eines Punktes verbinden, sind zueinander parallel, nämlich senkrecht zur trennenden Achse x,

wobei nur vorauszusetzen ist, daß die Ebene nicht zu einer Tafel senkrecht steht, weil dann die Projektionen der Punkte in dieser Tafel auf die Spurlinie fallen.

Der Grundriß der Punkte der Ebene ist demnach zum Aufriß affin. Liegt der Grundriß A' eines Punktes A der Ebene η auf der Achse u dieser Affinität, so daß also A' mit A'' zusammenfällt, so gehört dieser Punkt nach § 9, 1. der Ebene an, die den Winkel des zweiten und vierten Quadranten halbiert. Da nur den Punkten dieser Ebene die Eigenschaft zukommt, daß ihr Grundriß und Aufriß identisch sind, so ist u der Schnitt von η mit dieser Halbierungsebene. Wir haben also den

Satz 1. Die Grundrisse und Aufrisse der Punkte einer zu keiner Tafel senkrechten Ebene bilden zwei affine Systeme; die Affinitätsachse ist die vereinigte erste und zweite Projektion des Schnittes der Ebene mit der Halbierungsebene des zweiten und vierten Quadranten.

2. Da jede Gerade der Ebene einen Punkt mit jener Winkelhalbierenden gemein hat, so ist die Affinitätsachse leicht zu finden.

Ist erstens die Ebene durch ein sie bestimmendes Dreieck ABC gegeben, so geht die Affinitätsachse durch die Schnittpunkte $X' = X''$, $Y' = Y''$, $Z' = Z''$, in denen sich $B'C'$ und $B''C''$, $C'A'$ und $C''A''$, $A'B'$ und $A''B''$ treffen. Man erkennt einen Spezialfall des Desarguesschen Satzes wieder. Wenn die Punkte X', Y', Z' unbequem liegen, so nimmt man beliebige Geraden der Ebene zur Hilfe, z. B. auch die Tafellinien.

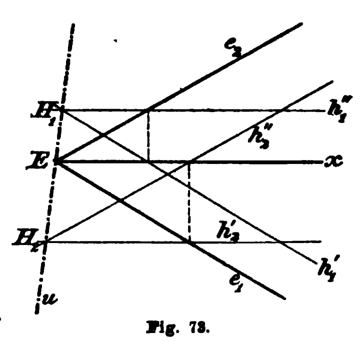


Fig. 73.

Wird zweitens die Ebene durch ihre Spuren e_1, e_2 gegeben, dann genügt zur Festlegung der Affinitätsachse u eine einzige Hauptlinie; ihre Projektionen h_i', h_i'' ($i = 1$ oder 2) treffen sich in einem Punkte $H_i = H_i' = H_i''$ von u; ein zweiter Punkt von u ist der

Schnittpunkt E von e_1 und e_2, da auch von diesem Punkte die beiden Projektionen zusammenfallen. In Figur 73 sind die beiden Fälle $i = 1$ und $i = 2$ veranschaulicht.

3. Der Satz 1 wird überall mit Vorteil anzuwenden sein, wo aus der einen bekannten Projektion einer ebenen Figur die andere abgeleitet werden soll. Es sei z. B. die Schnittkurve einer Ebene η mit einem Kreiszylinder darzustellen, der auf der ersten Tafel senkrecht steht (Fig. 74). Der Zylinder ist durch Angabe der Lage seines Basiskreises $\varkappa$ in Π_1 festgelegt; von η seien die Spuren e_1 und e_2 gegeben. Die Schnittkurve von η mit dem Zylinder ist eine Ellipse ε, deren Grundriß ε' mit $\varkappa$ identisch ist. Es gilt, zu $\varepsilon' = \varkappa$ den Aufriß zu finden. Ohne Kenntnis der Affinität würde man einfach zu hinreichend viel Punkten $P', Q', \ldots$ von ε' nach Figur 56 oder 57 die Aufrisse suchen. Rascher führt aber die Kenntnis der Affinität zum Ziele; man kann nämlich unmittelbar die Achsen der Ellipse ε'' finden. Zu dem Ende bestimmen wir nach Figur 73 die Achse EH der Affinität zwischen

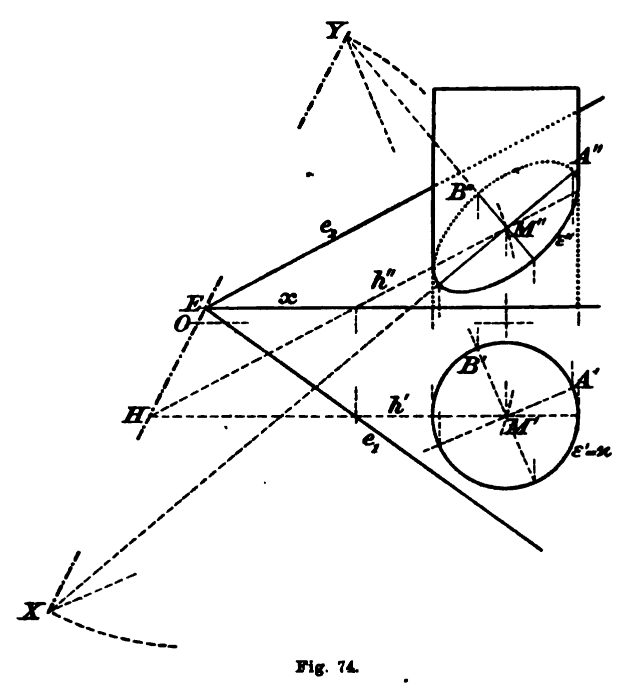


Fig. 74.

Grundriß und Aufriß mittels einer zweiten Hauptlinie h, deren Grundriß h' wir durch den Mittelpunkt M' von $\varepsilon' = \varkappa$ legen. Zu M' nehmen wir den Aufriß M'' auf h'' an. Dann sind M', M'' die Projektionen des Schnittpunktes M der Zylinderachse mit η. Zugleich sind M' und M'' zwei zugeordnete Punkte in der Affinität zwischen Grund- und Aufriß, also ist M'' der Mittelpunkt von ε''. Jedem Paare aufeinander senkrechter Durchmesser von ε' entspricht ein Paar konjugierter Durchmesser von ε'', und unter diesen befindet sich nach § 3, 10. eines, dessen Geraden aufeinander senkrecht stehen. Das sind dann die Achsen von ε''. Um diese zu finden, hat man nach § 3, 10. das Mittellot auf $M'M''$ mit EH in O zum Schnitt zu bringen und um O als Zentrum den Kreis mit

dem Radius OM' zu legen. Er trifft EH in zwei Punkten X, Y, so daß $M'X$, $M'Y$ und die dazu affinen Geraden $M''X$, $M''Y$ aufeinander senkrecht stehen. Sind A' und B' je ein Schnittpunkt von s' mit $M'X$ und mit $M'Y$, sowie A'' und B'' die dazu affinen Punkte auf $M''X$ und $M''Y$, so sind $M''A''$, $M''B''$ die gesuchten Halbachsen, aus denen die Ellipse s'' in bekannter Weise mittels der Krümmungsradien gewonnen wird. Der weitere Verlauf der Konstruktion geht aus der Figur hervor.

4. Satz 2. **Wenn zwei Ebenen η und η_0, die auf einer Tafel Π_i $(i = 1, 2)$ nicht senkrecht stehen, durch parallele Strahlen aufeinander bezogen sind, so sind die Orthogonalprojektionen der Punkte beider Ebenen auf die Tafel Π_i zueinander affin, und zwar mit der Projektion der Schnittgeraden von η und η_0 als Affinitätsachse.**

Denn es entspricht I. dem Punkte A von η eindeutig ein Punkt A_0 von η_0 und umgekehrt, und das gilt auch von den Projektionen $A^{(i)}$, $A_0^{(i)}$ dieser Punkte auf Π_i. Beschreibt II. der Punkt A eine Gerade g in η, so beschreibt A_0 in η_0 ebenfalls eine Gerade g_0, weil der Strahl AA_0, wenn A sich auf g bewegt, eine Ebene beschreibt, die η_0 in g_0 trifft; wenn also $A^{(i)}$ in Π_i eine Gerade $g^{(i)}$ durchläuft, bewegt sich $A_0^{(i)}$ auf einer Geraden $g_0^{(i)}$. Da die Strahlen AA_0 für alle Lagen von A in η nach Voraussetzung dieselbe Richtung haben, so sind auch III. die Strahlen $A^{(i)}A_0^{(i)}$ in Π_i zueinander parallel. Die charakteristischen Bedingungen der Affinität sind in Π_i daher erfüllt, und da jeder Punkt A der Schnittgeraden s von η und η_0 in der eindeutigen Beziehung zwischen η und η_0 sich selbst zugeordnet ist, so ist es ebenso mit der Projektion dieses Punktes auf Π_i, die Gerade $s^{(i)}$ ist also Affinitätsachse, w. z. b. w

Nun kann aber, wie wir in § 3, 2. gesehen haben, die durch Drehung einer Ebene η um eine in ihr liegende Gerade s erzielte eindeutige Beziehung zwischen der Anfangslage η und der Endlage η_0 dieser Ebene immer durch (schräge) Parallelprojektion von η auf η_0 erzeugt werden, wobei die Parallelstrahlen senkrecht stehen auf der Halbierungsebene des bei der Drehung von η durchlaufenen Ebenenwinkels. Wir haben dann also zwischen η und η_0 eine eindeutige Beziehung, die durch parallele Strahlen vermittelt wird. Daher ist der Satz 2 anwendbar, und wir bekommen so den

Satz 3. **Wenn man eine Ebene um eine in ihr liegende Gerade s aus einer Anfangslage η in eine Endlage η_0 dreht, und η und η_0 auf der Tafel Π_i $(i = 1$ oder $2)$ nicht senkrecht stehen, so findet zwischen den i^{ten} Projek-**

tionen der Punkte von η und denen der Punkte von η_0 Affinität mit der i^{ten} Projektion von s als Affinitätsachse statt.

5. Da man unter den Voraussetzungen der Sätze 2 und 3 immer die Affinitätsachse angeben kann, so wird es nur darauf ankommen, noch zu einem Punkte den affinen zu finden. Wie das geschieht, wenn η_0 zu einer Tafel parallel läuft, ist in der Figur 70 an dem Punktepaare C'', C_0'' oder in Figur 71 an C', C_0' zu ersehen; vergleiche auch Figur 65. Dagegen wird man im allgemeinen Falle, wo s zu keiner Tafel eine ausgezeichnete Lage einnimmt, erst eine zu s parallele und auf Π_1 senkrechte Hilfstafel Π_3 einführen.

6. Der Satz 3 wird am meisten bei der Umlegung einer ebenen Figur um die erste oder zweite Spur der Ebene dieser Figur in die erste oder zweite Tafel angewandt, z. B. wenn die wahre Gestalt eines Dreiecks ABC aus den Projektionen der Eckpunkte ermittelt werden soll, wenn der Umkreis des Dreiecks ABC konstruiert werden soll, oder wenn die wahre Gestalt der Schnittellipse ε in Figur 74 zu bestimmen ist. Es genügt, wenn wir auf die letzte Aufgabe näher eingehen (Fig. 75). Wir wollen die Ebene η der Ellipse ε um ihre erste Spur e_1 in die Grundrißebene drehen. Dazu brauchen wir nur die Endlage M_0 von M' zu wissen. Der Punkt M der Ebene η liegt vertikal über M' auf einem ersten Tafellote, und zwar ist sein Abstand von M' gleich

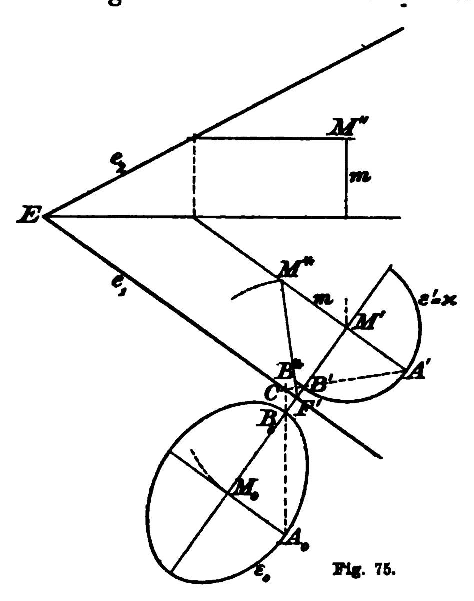


Fig. 75.

dem Abstande m des Punktes M'' von der trennenden Achse (§ 7, Satz 2). Bei der Drehung nun beschreibt M einen Kreis, dessen Ebene auf e_1, also auch auf Π_1 senkrecht steht; die erste Projektion von M beschreibt daher, wie wir beim Problem der Drehung um eine erste Hauptlinie ausführlich gezeigt haben, in Π_1 eine auf e_1 senkrechte Gerade $M'F' \perp e_1$, und auf dieser wird M' in die Lage M_0 kommen, so daß $M_0F' = F'M$ ist. Es kommt also darauf an, $F'M$ zu finden. Diese Strecke ist aber die Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreieck $F'M'M$, das wir um $F'M'$ in die Ebene Π_1 umlegen wollen. Dann ist einfach in M' auf $F'M'$ das Lot zu er-

richten und darauf $M'M^*$ gleich dem ersten Tafelabstande m des Punktes M abzutragen; M^* ist die Umlegung von M, und $F'M^* = F'M$ die gesuchte Hypotenuse, die wir nun von F' aus auf $M'F'$ nach der Seite hin abtragen, nach der M durch die Drehung fallen soll.

Zufolge dem Satze 3 besteht jetzt zwischen den Grundrissen der Punkte von η und ihren Umlegungen, die wie M_0 den Index Null erhalten sollen, eine Affinität mit e_1 als Achse und M_0, M' als entsprechenden Punkten. Die Affinitätsrichtung M_0M' ist zur Achse normal.

Die zwei konjugierten (d. h. also aufeinander senkrechten) Durchmesser des Kreises ε', von denen der eine zu e_1 parallel ist, gehen daher durch die Affinität wieder in zueinander senkrechte Durchmesser über, ergeben also die Achsen der umgelegten Ellipse ε_0. Wir ziehen daher einen zu e_1 parallelen Radius $M'A'$ von ε' und einen dazu senkrechten $M'B'$ und bringen $A'B'$ mit e_1 in C zum Schnitt. Dann machen wir $M_0A_0 \# M'A'$ und bringen A_0C mit M_0M' in B_0 zum Schnitt. Dann sind M_0A_0, M_0B_0 die Halbachsen der Ellipse ε_0, die nun mittels der Krümmungskreise in dem Scheitelpunkte leicht zu konstruieren ist. Die eine Halbachse, M_0A_0, ist gleich dem Radius r des Kreises ε'. Bringt man das Lot in B' auf $F'M'$ mit $F'M^*$ zum Schnitt in B^*, so ist $B^*M^* = B_0M_0$ die andere Halbachse, und da $\nu = \sphericalangle M'F'M^*$ die erste Tafelneigung der Ebene der Ellipse ist, so hat man

$$B^*M^* = r/\cos\nu,$$

d. h. ist eine Ebene unter dem Winkel ν gegen die Basis eines Kreiszylinders geneigt, so schneidet sie diesen in einer Ellipse, von der die eine Halbachse gleich dem Radius r des Zylinders, die andere gleich $r/\cos\nu$ ist.

Zur Konstruktion dieser Ellipse hätte es also der Umlegung von η nicht bedurft, die Konstruktion von B^*M^* gab schon die noch fehlende Halbachse.

7. Über die Darstellung des Kreises gibt es einen allgemeinen Satz, der auf der Tatsache beruht, daß die Parallelprojektionen aufeinander senkrechter Durchmesser des Kreises stets konjugierte Durchmesser der Projektion sind; nun denken wir uns durch den Mittelpunkt M des Kreises eine Ebene parallel zur ersten (oder zweiten) Tafel gelegt. Sie trifft die Ebene des Kreises in einem Durchmesser, der zugleich erste Hauptlinie ist. Diese und der dazu senkrechte Durchmesser ergeben daher nach § 7, 9. durch die Orthogonalprojektion auf die erste Tafel zwei zueinander senkrechte konjugierte Durchmesser der Projektion, also die Achsen der Ellipse, und zwar

projiziert sich der zur Tafel parallele Kreisdurchmesser d in seiner natürlichen Länge, der andere wird verkürzt und ist gleich $d \cos \nu_1$, wenn ν_1 die erste Tafelneigung der Kreisebene bezeichnet. Wir können also sagen:

Satz 4. Wenn die Ebene eines Kreises gegen eine Projektionstafel Π_t unter einem nicht rechten Winkel ν_t geneigt ist, so ist die Orthogonalprojektion des Kreises auf Π_t eine Ellipse $s^{(t)}$, deren Hauptachse gleich dem Durchmesser d des Kreises und parallel zur Spur der Kreisebene in der Tafel Π_t ist, während die kleine Achse gleich $d \cos \nu_t$ ist.

Auf die Darstellung dieser Ellipse werden wir in anderem Zusammenhange in § 13 eingehen.

8. Dagegen sollen der Methode der affinen Metrik noch einige Worte gewidmet werden, da sie oft Konstruktionsvorteile gewährt. Es handelt sich da um folgendes:

Zu einer ebenen Figur $ABC\ldots$ sei eine affine $A_1B_1C_1\ldots$, zum Beispiel eine Orthogonalprojektion oder ein Schrägbild zu konstruieren, und man habe bereits von einer Maßfigur Φ derselben Ebene das Bild Φ_1 gefunden. Wie sieht man dann direkt im Bilde, ob die entsprechenden Originale rechte Winkel, Quadrate, Kreise usw. sind? Das ist die Fragestellung, die dazu dienen soll, bei der verlangten Konstruktion möglichst wenig auf die Originale zurückzugreifen. Einige Beispiele werden das leicht klar machen.

a) Die Maßfigur Φ sei ein Dreieck ABC mit seinen Höhen (Fig. 76). Es sei also das Bild $A_1B_1C_1$ des Dreiecks und H_1 des Höhepunktes gegeben; ferner die Bilder P_1 und u_1 eines Punktes P sowie einer Geraden u, auf die aus P das Lot zu fällen ist. Um dieses direkt, ohne Benutzung des Originals bildlich darzustellen, bringt man u_1 mit den Seiten des Dreiecks, etwa mit A_1C_1 und B_1C_1 in X_1 und Y_1 zum Schnitt und zieht durch X_1, Y_1 die Parallelen zu A_1H_1, B_1H_1, die sich in einem Punkte L_1 treffen. Dieser ist das Bild des Höhenpunktes des Originaldreiecks XYC, also ist C_1L_1 das Bild eines Lotes auf u_1; das Bild des gesuchten Lotes geht parallel zu C_1L_1 durch P_1.

Fig. 76.

b) Die Maßfigur sei ein Quadrat, ihr Bild $A_1B_1C_1D_1$ also

ein Parallelogramm (Fig. 77). Wiederum kann man die Bilder von Loten direkt darstellen. Das Bild u_1 einer Geraden treffe etwa die Diagonale C_1A_1 und die Seite C_1B_1 in X_1 und Y_1. Dann zieht man durch X_1 und Y_1 die Parallelen zu A_1B_1 und B_1D_1 und bestimmt ihren Schnittpunkt S_1. Dieser ist dann das Bild des Höhenpunktes von XYC, also ist C_1S_1 das Bild eines Lotes auf u. Soll ein Lot durch P gehen, so zieht man durch P_1 zu C_1S_1 die Parallele.

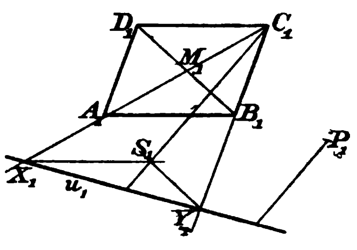


Fig. 77.

Eine andere Lösung hat H. Wiener[1]) aus einer hübschen Eigenschaft des Quadrates abgeleitet, die J. Steiner (vgl. Bd. II, § 5, S. 17) angegeben hat (Fig. 78). Trägt man nämlich auf dem Umfange eines Quadrates $ABCD$ im selben Umlaufsinne eine beliebige Strecke $AX = BY = CZ = DT$ ab, so ist die Strecke XZ der Strecke YT gleich und steht auf ihr senkrecht, $XYZT$ ist also ebenfalls ein Quadrat. Ist auch noch AS auf AD gleich AX, so ist $XS \parallel BD$, $SY \parallel AB$. Wenn daher das Bild $A_1B_1C_1D_1$ von $ABCD$ gegeben ist,

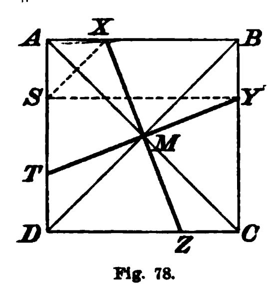


Fig. 78.

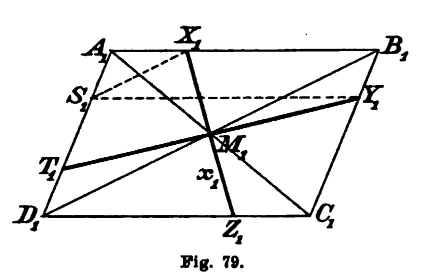


Fig. 79.

etwa als umgeschriebenes Parallelogramm einer Ellipse, von der zwei konjugierte Durchmesser zu den Seiten dieses Parallelogramms parallel laufen, so kann zu jedem anderen Durchmesser x_1 der Ellipse der konjugierte gefunden werden, indem man x_1 mit A_1B_1 in X_1 zum Schnitt bringt, $X_1S_1 \parallel B_1D_1$ und $S_1Y_1 \parallel A_1B_1$ zieht; M_1Y_1 ist dann der gesuchte Durchmesser der Lage nach (Fig. 79).

c) Wenn die Maßfigur ein Kreis ist, so können die Steinerschen Linealkonstruktionen übertragen werden (Bd. II, § 5), was aber nur in besonderen Fällen von Nutzen sein wird.

§ 12. Krümmung.

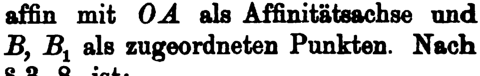
1. Bevor wir zur Darstellung krummer Linien schreiten, müssen wir uns eingehender mit der Konstruktion der Krümmungskreise be-

1) Abh. zur Samml. math. Mod., S. 70, Anm. 2 und N 2 des Textes.

schäftigen, weil durch ihre Hilfe das praktische Zeichnen der Kurven, besonders an den stärker gekrümmten Stellen, wesentlich erleichtert wird.

Die Konstruktion der Krümmungsradien einer Ellipse in ihren Scheitelpunkten A und B hatten wir aus der analytischen Geometrie (Bd. II, § 81) übernommen. Die darstellende Geometrie kann jedoch diese Aufgabe auch mit ihren Mitteln lösen, im Anschluß an die Metrik der Affinität, § 3, 8.

Seien OA und OB die zwei Halbachsen einer Ellipse ε, wobei OA sowohl die große als die kleine sein darf (Fig. 80). Die Halbachse OB treffe den Kreis ε_1 mit OA als Radius und O als Zentrum in B_1; das Lot auf OA in einem nahe bei A gelegenen Punkte H schneide ε und ε_1 in P, Q und P_1, Q_1. Dann ist ε zu ε_1



affin mit OA als Affinitätsachse und B, B_1 als zugeordneten Punkten. Nach § 3, 8. ist:

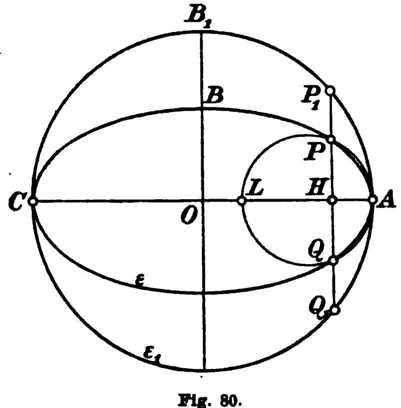


Fig. 80.

$$(1) \qquad HP : HP_1 = HQ : HQ_1 \\ = OB : OB_1 \\ = OB : OA.$$

Betrachten wir nun den Umkreis $\varkappa$ des Dreiecks PAQ. Je näher H bei A liegt, um so inniger wird dieser Kreis sich an die Ellipse ε in A anschmiegen und zu beiden Seiten von A auf eine Strecke hin mit ε ganz zusammenfallen. Lassen wir nun H auf OA immer näher an A heranrücken, so werden sich auch P und Q auf der Ellipse dem Punkte A immer mehr nähern, der Kreis $\varkappa$ wird immerfort seine Lage und Größe ändern, sein zweiter Schnittpunkt L mit OA wird ebenfalls wandern und sich immer mehr einer Grenzlage L_0 nähern, während $\varkappa$ einer Grenzlage $\varkappa_0$ zustrebt. Diese Grenzlage $\varkappa_0$ von $\varkappa$ heißt der Krümmungskreis von ε in A, der Radius ϱ_0 des Kreises $\varkappa_0$ heißt der Krümmungsradius der Ellipse in A. Nun ist mit Rücksicht auf (1), wenn C den anderen Scheitel auf OA bezeichnet:

$$(2) \qquad \frac{HL}{HC} = \frac{HA \cdot HL}{HA \cdot HC} = \frac{HP \cdot HQ}{HP_1 \cdot HQ_1} = \left(\frac{OB}{OA}\right)^2,$$

indem auf $\varkappa$ und ε_1 je einmal der Sehnensatz angewandt wird. Wenn aber H nach A rückt, wird HL gleich $AL_0 = 2\varrho_0$, HC geht in $AC = 2\,OA$ über, und aus (2) folgt:

$$(3) \qquad \frac{2\varrho_0}{2\,OA} = \left(\frac{OB}{OA}\right)^2, \quad \varrho_0 = \frac{OB^2}{OA},$$

wie wir schon in Bd. II, § 81, 11. gefunden hatten. Aus (3) folgt auch die dort angegebene Konstruktion des Mittelpunktes von $\varkappa_0$, der als Krümmungsmittelpunkt von ε in A bezeichnet wird.[1])

2. Ist A ein Punkt einer beliebigen Kurve γ, so nimmt man zur begrifflichen Erzeugung des Krümmungskreises in A noch zwei weitere Punkte B und C auf der Kurve an, am anschaulichsten rechts und links von A, und konstruiert den Umkreis $\varkappa$ des Dreiecks ABC (Fig. 81). Wenn nun dieser Kreis sich einer Endlage $\varkappa_0$ nähert, während B und C nach dem Punkte A eilen, so wird $\varkappa_0$ der Krümmungskreis der Kurve γ in A genannt. Während des Bewegungsvorganges wird $\varkappa$ natürlich seine Gestalt, und wenn es sich um eine doppelt gewundene Kurve (z. B. Schraubenlinie) handelt, auch seine Ebene ändern; damit aber von einem Krümmungskreise in A die Rede sein darf, muß die Endlage $\varkappa_0$ eine ganz bestimmte sein.

Zur Berechnung des Krümmungsradius dient uns im folgenden die einfache Formel

$$4r = AB \cdot BC \cdot CA : \Delta, \tag{4}$$

die nach Bd. II, § 24, (8) den Umkreisradius r des Dreiecks ABC mit den Seiten und dem Inhalt Δ in Beziehung setzt. Dieses Dreieck werden wir mit einem zweiten Dreieck $A_1B_1C_1$ vergleichen, dessen Inhalt und Umkreisradius Δ_1 und r_1 seien. Man hat dann auch

$$4r_1 = A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1 : \Delta_1, \tag{5}$$

also

$$\frac{r}{r_1} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1} : \frac{\Delta}{\Delta_1}. \tag{6}$$

3. Wir betrachten nun zunächst eine ebene Kurve γ und eine dazu affine γ_1, indem wir uns fragen, wie sich der Krümmungsradius ϱ von γ in einem Punkte A zu dem Krümmungsradius ϱ_1 von γ_1 in dem zu A affinen Punkte A_1 verhält (Fig. 81). Die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte sind im allgemeinen natürlich nicht etwa affin entsprechende Punkte, denn zum Krümmungskreis in A affin ist im allgemeinen eine Ellipse. Zu beiden Seiten von A nehmen wir noch auf γ zwei Punkte B, C an und auf γ_1 die dazu affinen B_1, C_1; die Inhalte von ABC und $A_1B_1C_1$ seien Δ und Δ_1. Dann besteht zwischen den Umkreisradien r und

1) Diese Ableitung ist einem Aufsatze von C. Heumann im 6. Bande des Archivs der Mathematik und Physik (3), 1903 entnommen, dem wir uns auch im folgenden öfters anschließen.



r_1 von ABC und $A_1B_1C_1$ die Beziehung (6). Lassen wir B und C nach A und damit auch B_1 und C_1 nach A_1 rücken, so gehen r und r_1 in die gesuchten Krümmungsradien ϱ und ϱ_1 über. Vor der Ausführung dieses Grenzüberganges legen wir durch einen Punkt G der Affinitätsachse drei beliebige Strecken a, b, c parallel zu BC, CA, AB und konstruieren die dazu affinen Strecken a_1, b_1, c_1, die ebenfalls durch G gehen und zu B_1C_1, C_1A, A_1B_1 parallel laufen. Dann ist

$$(7)\qquad AB : A_1B_1 = c : c_1,\quad BC : B_1C_1 = a : a_1,\quad CA : C_1A_1 = b : b_1.$$

Nach § 3, 9. ist ferner $\varDelta : \varDelta_1$ gleich dem Verhältnis einer Strecke eines Affinitätsstrahls zur affinen Strecke, also z. B., wenn AA_1 die Affinitätsachse in A_0 trifft:

$$(8)\qquad \varDelta : \varDelta_1 = AA_0 : A_1A_0.$$

Daher ist nach (6):

$$(9)\qquad \frac{r}{r_1} = \frac{abc}{a_1b_1c_1} : \frac{AA_0}{A_1A_0}.$$

Jetzt lassen wir B und C auf γ nach A rücken, und damit B_1 und C_1 auf γ_1 nach A_1 (Fig. 82).[1]) Dann werden die drei Strecken a, b, c parallel zur Tangente t von γ in A, fallen also auf dieselbe Gerade τ. Die Strecken a_1, b_1, c_1 werden parallel zur Tangente t_1 von γ_1 in A_1 und fallen auf die zu τ affine Gerade τ_1. Daher ist

$$a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = \tau : \tau_1,$$

wenn man unter τ und τ_1 zwei beliebige von G ausgehende affine Strecken versteht, die zu t und t_1 parallel sind. Aus (9) folgt

$$(10)\qquad \frac{r}{r_1} = \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^3 : \frac{AA_0}{A_1A_0},$$

Fig. 81.

oder, indem wir statt r und r_1 nunmehr ϱ und ϱ_1 schreiben:

$$(11)\qquad \frac{\varrho}{\varrho_1} = \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^3 : \frac{AA_0}{A_1A_0},$$

oder in Worten:

1) Diese Figur enthält eine von Figur 81 abweichende, bequemere Anordnung der Affinität.

Satz 1. Um die Krümmungsradien ϱ und ϱ_1 zweier affinen Kurven γ und γ_1 in ihren Punkten A und A_1 zu vergleichen, ziehe man durch einen Punkt G der Affinitätsachse zu den Tangenten t, t_1 der Punkte A, A_1 die Parallelen und grenze auf diesen durch G und einen Affinitätsstrahl die affinen Strecken τ, τ_1 ab (Fig. 82). Ist A_0 der Schnittpunkt von AA_1 mit der Affinitätsachse, so ist:

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^3 : \frac{A_0A}{A_0A_1}. \tag{12}$$

Wenn der Punkt T, in dem t und t_1 einander auf der Affinitätsachse schneiden, nicht im Unendlichen liegt, kann T die Rolle von G übernehmen; dann ist

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \left(\frac{TA}{TA_1}\right)^3 : \frac{A_0A}{A_0A_1}. \tag{13}$$

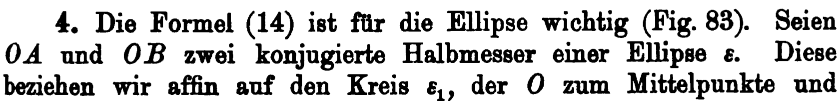


Fig. 82.

Sind dagegen die Tangenten in A und A_1 zur Affinitätsachse parallel, so ist einfach

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{A_0A_1}{A_0A}, \tag{14}$$

indem die Strecken τ und τ_1 der Formel (12) auf der Affinitätsachse zusammenfallen.

4. Die Formel (14) ist für die Ellipse wichtig (Fig. 83). Seien OA und OB zwei konjugierte Halbmesser einer Ellipse ε. Diese beziehen wir affin auf den Kreis ε_1, der O zum Mittelpunkte und OB zum Radius hat, indem wir dem Punkte A von ε einen Punkt A_1 von ε_1 zuordnen, dessen Radius OA_1 auf OB senkrecht steht. Dann besteht zwischen den Krümmungsradien ϱ und ϱ_1 von ε und ε_1 in A und A_1 die Beziehung (14), oder, da $\varrho_1 = OB$ ist:

$$\varrho = OB \cdot \frac{A_0A_1}{A_0A}. \tag{15}$$

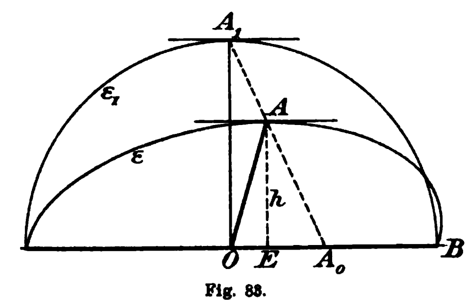


Fig. 83.

Fällt man noch aus A auf OB das Lot $AE = h$, so ist $A_0A_1 : A_0A = OA_1 : h = OB : h$, also

$$\varrho = \frac{OB^2}{h}. \tag{16}$$

Diese Formel führt zu der folgenden

Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes zu einem beliebigen Ellipsenpunkte A, wenn zu dem durch diesen Punkt A gehenden Halbmesser OA ein konjugierter OB gegeben ist (Fig. 84):

Man ergänzt das Dreieck AOB zu einem Parallelogramm $AOBC$ und fällt aus C auf OB das Lot CC_0. Dann treffen sich die Lote aus C auf AC_0 und aus A auf OB in dem gesuchten Punkte K. Denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AKC und CAC_0 folgt: $AK : AC = AC : CC_0$, $AK = AC^2 : CC_0 = OB^2 : h$, wenn h das aus A auf OB gefällte Lot AA_0 bezeichnet. Die Strecke KA ist also nach (16) der Krümmungsradius von A_1, und da der Krümmungskreis die Ellipse und damit ihre Tangente AC in A berührt, so muß

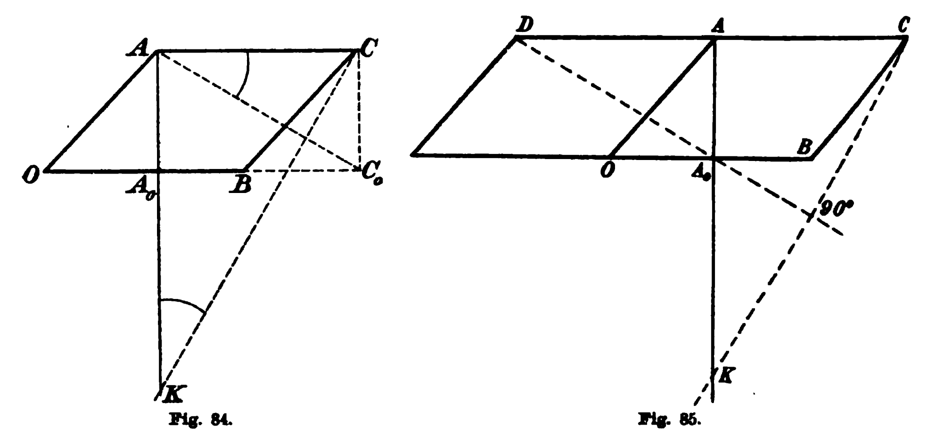


Fig. 84. Fig. 85.

der Mittelpunkt dieses Kreises auf der Normalen, d. h. auf AK liegen und ist also mit K identisch.

Steht OA auf OB senkrecht, so geht diese Konstruktion in die des § 81 im II. Bande über, die für die Scheitelpunkte gilt. Bei der praktischen Ausführung werden die Lote AA_0 und CC_0 unmittelbar nacheinander gezogen, wobei das ruhende Dreieckslineal seine Lage beibehält, und die Gerade AC_0 wird nicht gezogen.

Eine einfache Umformung der Figur 84 mit $AD = AC$ ist Figur 85, die demselben Zwecke dient.

5. Die Frage des Artikels 3 drängt sich auch bei der Orthogonalprojektion auf: Wie verhalten sich die Krümmungsradien ϱ und ϱ_1 einer ebenen oder räumlichen Kurve γ und ihrer Orthogonalprojektion γ_1 in entsprechenden Punkten A und A_1?

Wie in Art. 3 nehmen wir auf der Kurve zu beiden Seiten von A noch je einen Punkt B und C an, in der Absicht, diese Punkte

sich unbegrenzt dem Punkte A nähern zu lassen, wodurch der Radius r des Umkreises von ABC in den Krümmungsradius ϱ von γ in A übergeht. Die Ebene η des Dreiecks ABC trifft die Projektionsebene η_1 in einer Geraden u, auf der jede Seite des Dreiecks $\varDelta = ABC$ die entsprechende Seite seiner Projektion $\varDelta_1 = A_1 B_1 C_1$ trifft. Bezeichnet r_1 den Umkreisradius $\varDelta_1$, so besteht zwischen r und r_1 die Beziehung (6). Hier ist aber

(17) $$\varDelta_1 = \varDelta \cos\sigma,$$

Fig. 86.

wo σ den Winkel zwischen η und η_1 bedeutet. Denn zieht man in ABC die Transversale $BY \| u$ und fällt $AX \perp BY$, $CZ \perp BY$, so ist der Winkel zwischen AX und seiner Orthogonalprojektion A_1X_1 gleich σ; wenn also Y_1, Z_1 die Projektionen von Y, Z sind und berücksichtigt wird, daß $BY \# B_1Y_1$ und $A_1X_1 \perp B_1Y_1$, $C_1Z_1 \perp B_1Y_1$ ist, so folgt

$$B_1A_1Y_1 = \tfrac{1}{2}B_1Y_1 \cdot A_1X_1 = \tfrac{1}{2}BY \cdot AX\cos\sigma,$$
$$B_1C_1Y_1 = \tfrac{1}{2}B_1Y_1 \cdot C_1Z_1 = \tfrac{1}{2}BY \cdot CZ\cos\sigma,$$

also durch Addition:

$$\varDelta_1 = \varDelta\cos\sigma.$$

Führt man noch die Neigungswinkel α, β, γ der Geraden BC, CA, AB zu ihren Projektionen B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 ein, so ist ferner

(18) $$A_1B_1 = AB\cos\gamma,\quad B_1C_1 = BC\cos\alpha,\quad C_1A_1 = CA\cos\beta,$$

und aus (6) folgt wegen (17) und (18):

(19) $$\frac{r_1}{r} = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma : \cos\sigma.$$

Lassen wir jetzt B und C auf der Kurve an A heranrücken, so gehen AB, BC und CA in die Tangente t des Punktes A über; dementsprechend gehen B_1, C_1 nach A_1, und die Seiten von $\varDelta_1$ gehen in die Tangente t_1 von A_1 über; die Winkel α, β, γ nähern sich unbegrenzt dem Winkel τ der Tangenten t und t_1, so daß in (19) das Produkt $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ in $\cos\tau^3$ übergeht. Wenn γ in η liegt, so bleibt σ ungeändert, und es ergibt sich

(20) $$\varrho_1 = \frac{\varrho\cos\tau^3}{\cos\sigma}.$$

Ist dagegen die Kurve, der die Punkte A, B, C angehören, doppelt gewunden, so wird beim Grenzübergange auch die Ebene η ihre Lage ändern, aber mit dem Umkreise von ABC einer gewissen Endlage zueilen, in der η den Krümmungskreis von A enthält. Diese Endlage von η heißt dann die **Schmiegungsebene** dieser Kurve in A, weil sie sich als Ebene des Krümmungskreises der Kurve in A inniger anschmiegt, als jede andere Ebene durch A. In dieser Schmiegungsebene liegt dann die Tangente t von A, und wenn σ den Neigungswinkel der Schmiegungsebene gegen die feste Ebene η_1 bezeichnet, so gilt wiederum Formel (20), d. h.:

Satz 2. Zwischen dem Krümmungsradius ϱ einer Kurve γ und dem Krümmungsradius ϱ_1 ihrer Orthogonalprojektion γ_1 in entsprechenden Punkten besteht die Beziehung:

$$\varrho_1 = \frac{\varrho \cos \tau^3}{\cos \sigma}, \tag{21}$$

wenn τ den Neigungswinkel der Tangente, σ den der Schmiegungsebene (bzw. Ebene) von γ gegen die Projektionsebene bezeichnet.

Mit dieser wichtigen Formel kann auch der Fall der schrägen Parallelprojektion erledigt werden, indem man eine zur Projektionsrichtung normale Hilfsebene einführt und die Krümmungsradien der Originalkurve und ihrer Schrägprojektion mit dem Krümmungsradius ihrer gemeinschaftlichen Orthogonalprojektion auf die Hilfsebene vergleicht. Doch wollen wir darauf nicht näher eingehen.

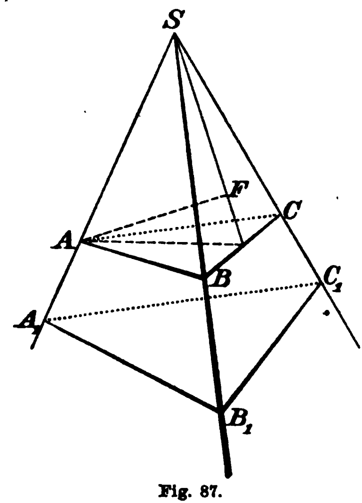


Fig. 87.

6. Dagegen nötigt uns die Darstellung der Schnitte des Kreiskegels, das Verhalten der Krümmungsradien bei zentraler Projektion zu untersuchen. Eine ebene oder doppelt gewundene Kurve γ werde aus einem Punkte S auf eine Ebene η_1 als γ_1 projiziert; A_1, B_1, C_1 seien die Projektionen dreier Punkte A, B, C von γ. Wiederum (Fig. 87) seien $\varDelta$ und $\varDelta_1$ die Inhalte, r und r_1 die Umkreisradien der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$. In der Gleichung (6), die wiederum zwischen r und r_1 besteht, können wir zunächst $\varDelta : \varDelta_1$ ausrechnen. Dazu dient die aus Bd. II, § 101, (6) folgende schöne Volumenformel

$$SABC : SA_1B_1C_1 = SA \cdot SB \cdot SC : SA_1 \cdot SB_1 \cdot SC_1. \tag{22}$$

Zum direkten Beweise fällt man aus A auf die Ebene BSC das Lot AF, das gleich dem Produkte aus SA in den Sinus des Neigungswinkels ν des Strahls SA gegen die Ebene BSC ist. Betrachtet man jetzt SBC als Basis und AF als zugehörige Höhe des Tetraeders $SABC$, so findet man

$$SABC = \tfrac{1}{6} SA \cdot SB \cdot SC \sin BSC \sin \nu.$$

Daher ist

$$SA_1B_1C_1 = \tfrac{1}{6} SA_1 \cdot SB_1 \cdot SC_1 \sin BSC \sin \nu,$$

woraus durch Division die Gleichung (22) folgt. Andererseits ist, wenn h und h_1 die aus S auf $\varDelta$ und $\varDelta_1$ gefällten Lote bedeuten — in der Figur sind sie weggelassen —

$$(23) \qquad SABC : SA_1B_1C_1 = \tfrac{1}{3} h\varDelta : \tfrac{1}{3} h_1\varDelta_1 = h\varDelta : h_1\varDelta_1,$$

also mit Rücksicht auf (22):

$$(24) \qquad \frac{\varDelta}{\varDelta_1} = \frac{SA \cdot SB \cdot SC}{SA_1 \cdot SB_1 \cdot SC_1} : \frac{h}{h_1}.$$

Diesen Wert setzen wir in (6) ein. Das gibt:

$$(25) \qquad \frac{r}{h} \cdot \frac{SA}{AB} \cdot \frac{SB}{BC} \cdot \frac{SC}{CA} = \frac{r_1}{h_1} \cdot \frac{SA_1}{A_1B_1} \cdot \frac{SB_1}{B_1C_1} \cdot \frac{SC_1}{C_1A_1},$$

also nach dem Sinussatze, wenn a, b, c die Winkel BSC, CSA, ASB bezeichnen,

$$\frac{r}{h} \cdot \frac{\sin ABS}{\sin c} \cdot \frac{\sin BCS}{\sin a} \cdot \frac{\sin CAS}{\sin b} = \frac{r_1}{h_1} \cdot \frac{\sin A_1B_1S}{\sin c} \cdot \frac{\sin B_1C_1S}{\sin a} \cdot \frac{\sin C_1A_1S}{\sin b},$$

und endlich:

$$(26) \quad \frac{r}{h} \sin ABS \cdot \sin BCS \cdot \sin CAS = \frac{r_1}{h_1} \sin A_1B_1S \cdot \sin B_1C_1S \cdot \sin C_1A_1S.$$

Diese Formel gilt für zwei beliebige zueinander perspektiv liegende Dreiecke, die nicht in derselben Ebene enthalten sind

7. Lassen wir jetzt B und C sich auf γ nach A und damit B_1 und C_1 sich auf γ_1 nach A_1 bewegen, so gehen die Seiten des Dreiecks $\varDelta$ in die Tangente t der Kurve γ in A über, ebenso die Seiten von $\varDelta_1$ in die Tangente t_1 der Kurve γ_1 in A_1. Die Winkel ABS, BCS und CAS oder ihre Supplemente nähern sich unbegrenzt dem (kleinsten der) Neigungswinkel τ der Tangente t gegen den Strahl SA; ebenso konvergieren die Winkel A_1B_1S, B_1C_1S, C_1A_1S oder ihre

Supplemente gegen den Neigungswinkel τ_1 zwischen SA_1 und der Tangente t_1 von γ_1 in A_1. Ist γ eine ebene Kurve, also in der Ebene η des Dreiecks Δ enthalten, so bleibt η während des Grenzüberganges unverändert; ist die Kurve dagegen doppelt gewunden, so ändert die Ebene mit B und C ihre Lage, strebt aber einer Endlage zu, nämlich der Schmiegungsebene des Punktes A. Die Umkreise von Δ und Δ_1 gehen, ob nun γ eben oder doppelt gewunden ist, in die Krümmungskreise, die Radien r und r_1 in die Krümmungsradien ϱ und ϱ_1 der Kurven γ und γ_1 in den Punkten A und A_1 über. Aus (26) wird:

$$\frac{\varrho}{h} \sin \tau^3 = \frac{\varrho_1}{h_1} \sin \tau_1^{\,3}.$$

Damit ist bewiesen:

Satz 3. Zwischen den Krümmungsradien ϱ und ϱ_1 einer Kurve γ und einer Zentralprojektion γ_1 von γ in entsprechenden Punkten A und A_1 besteht die Beziehung

$$(27) \qquad \frac{\varrho}{h} \sin \tau^3 = \frac{\varrho_1}{h_1} \sin \tau_1^{\,3};$$

hierin sind τ und τ_1 die Neigungswinkel des Projektionsstrahls von A und A_1 gegen die Tangenten der Kurven γ und γ_1 in A und A_1; ferner sind h und h_1 die Abstände des Projektionszentrums von der Schmiegungsebene (bzw. Ebene) der Kurve γ in A sowie von der Ebene der Kurve γ_1.

8. Die Formeln (21) und (27) der Lehrsätze 2 und 3 sollen noch weiter ausgebildet werden unter der Voraussetzung, daß γ und γ_1 in A die Tangente t gemeinschaftlich haben. Dann ist in (21) der Winkel $\tau = 0$, in (27) dagegen $\tau = \tau_1$, und diese Formeln gehen über in

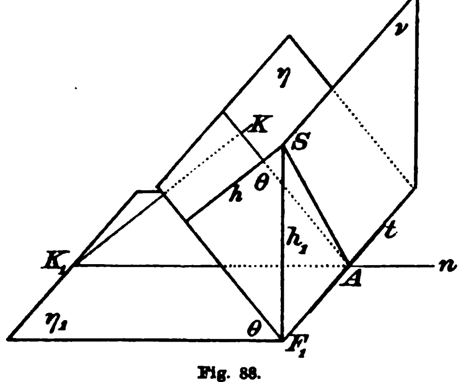


Fig. 88.

$$(21') \qquad \varrho_1 = \frac{\varrho}{\cos \sigma},$$

$$(27') \qquad \frac{\varrho_1}{h_1} = \frac{\varrho}{h}.$$

In (27′) machen wir noch eine weitere Annahme (Fig. 88): In der Ebene η_1 werde auf t im Punkte A das Lot n errichtet, also die Normale der Kurve γ_1 in A; wir wollen nun voraussetzen, daß der Strahl SA, der A mit dem Projektionszentrum S verbindet, auf n

in A senkrecht stehe. Er liegt dann in der auf der Geraden n in A errichteten Normalebene ν. Der Fußpunkt F_1 des aus S auf η_1 zu fällenden Lotes h_1 liegt daher auf t, und die Normalebene auf t in F_1 enthält außer h_1 auch das Lot h, das von S auf η zu fällen ist. Bezeichnet θ den Winkel zwischen η und η_1, so ist daher $h = h_1 \cos\theta$, und (27') ergibt:

$$\varrho_1 = \frac{\varrho}{\cos\theta}. \tag{27''}$$

Fällt speziell der Punkt F_1 mit A zusammen, und rückt S auf AS ins Unendliche, so geht der Strahlenkegel S in ein System von Strahlen über, die auf η_1 senkrecht stehen. Das ist aber die Voraussetzung der Formel (21'), in welcher σ den in Figur 88 mit θ bezeichneten Winkel zwischen η und η bedeutet, und so ist (27'') in der Tat im vorliegenden Falle mit (21') identisch. Es liegt auch nichts im Wege, F_1 als von A verschieden anzunehmen und S auf AS ins Unendliche rücken zu lassen. Wir bekommen dann ein System paralleler Strahlen, die γ auf γ_1 projizieren, immer aber unter der Voraussetzung, daß diese Strahlen die Gerade n rechtwinkelig kreuzen. Dann bleibt (27'') bestehen.

9. Um jetzt den Inhalt dieser Formel bequem aussprechen zu können, wollen wir annehmen, γ sei eine ebene Kurve, die auf einem beliebigen Kegel S (d. h. mit beliebiger Basiskurve) liege; in einem Punkte A von γ werde die Tangente t gezogen, die zusammen mit SA eine Ebene ν bestimmt, welche die Kegelfläche längs der ganzen Geraden SA berührt. Die Normale n auf dieser Berührungsfläche im Punkte A heißt jetzt die Flächennormale, ein Begriff, den man sich allerdings besser erst an einer Kugel oder an einem Ellipsoid klar macht: Die Flächennormale in einem Punkte A der Fläche ist die Normale auf der Berührungsebene in A. Jede Ebene durch die Flächennormale eines Punktes trifft die Fläche in einem Normalschnitte; auch die Schnittkurve selber möge so heißen. Einen solchen Normalschnitt bestimmt also in Figur 88 die Ebene η_1, und γ_1 ist die Schnittkurve. Die Ebene η dagegen erzeugt einen schrägen Schnitt, der aber in A mit dem Normalschnitt die Tangente gemein hat. Danach läßt sich die Formel (27'') in die Worte kleiden:

Satz 4. Legt man durch einen Punkt A eines beliebigen Kegels oder Zylinders einen Normalschnitt γ_1 und einen schrägen Schnitt γ mit derselben Tangente in A, und ist θ der Neigungswinkel der Schnittebenen, so besteht zwischen den zu A gehörigen Krümmungsradien ϱ und

ϱ_1 von γ und γ_1 die Beziehung:

$$\varrho = \varrho_1 \cos \theta, \tag{28}$$

d. h.: Das Krümmungszentrum des Schrägschnittes ist die Orthogonalprojektion des Krümmungszentrums des Normalschnittes.

Das ist ein besonderer Fall eines für alle Flächen gültigen Theorems, das man Meusnier verdankt.

10. Unter den Normalschnitten, die man durch einen Punkt A der Kegel- oder Zylinderfläche S legen kann, ist der Schnitt η_1 ausgezeichnet, der auf SA senkrecht steht. Er werde der Hauptschnitt der Kegelfläche in A genannt. Die Flächentheorie kennt noch einen zweiten Hauptschnitt η_2 durch A, nämlich den durch S gehenden, der aber für unsere Zwecke nicht in Betracht kommt.

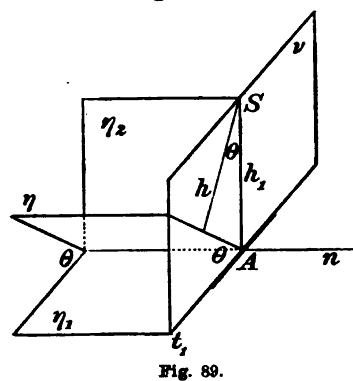


Fig. 89.

Gegen die Ebene η_1 des Hauptschnittes sei die Ebene η eines anderen Normalschnittes durch A um den Winkel θ geneigt (Fig. 89) Die Schnittgerade von η und η_1 ist die Flächennormale n des Punktes A, die auf der Berührungsebene ν der Fläche senkrecht steht. Diese Ebene trifft η_1 und η in den Tangenten t_1 und t der beiden Schnittkurven, und in Formel (27) ist daher:

$$\tau_1 = 90^0, \quad \tau = 90^0 - \theta,$$

und, wie die Figur zeigt,

$$h = h_1 \cos \theta.$$

Daraus folgt:

$$\varrho \cos \theta^2 = \varrho_1.$$

Das ist ein Spezialfall der Eulerschen Formel aus der Flächentheorie:

Satz 5. Legt man durch einen Punkt A eines beliebigen Kegels oder Zylinders einen Normalschnitt η, der gegen den Hauptschnitt η_1 die Neigung θ hat, so besteht zwischen den zugehörigen Krümmungsradien ϱ und ϱ_1 in A die Beziehung:

$$\varrho = \frac{\varrho_1}{\cos \theta^2}. \tag{29}$$

§ 13. Abwickelung.

1. Wenn sich ein Strahl um einen festen Punkt dreht und dabei längs einer festen Kurve gleitet, so beschreibt er die allgemeine Kegelfläche, die den Betrachtungen des vorigen Paragraphen zugrunde liegt. Eine charakteristische Eigenschaft dieser Flächen ist ihre Abwickelbarkeit, d. h. die längs einer ihrer Geraden aufgeschlitzte Kegelfläche läßt sich ohne Dehnung oder Stauchung so verbiegen, daß sie auf eine Ebene ausgebreitet werden kann. Dabei wird die krumme Fläche auf die Ebene abgebildet, indem man jedem Punkte der Fläche den Punkt der Ebene zuordnet, auf den er bei der Abwickelung fällt. Den Kurven auf der Kegelfläche entsprechen so Kurven der Ebene und umgekehrt. Eines der schönsten Beispiele dieser Zuordnung besteht darin, daß man ein rechtwinkeliges Dreieck mit einer seiner Katheten an eine Gerade eines Kreiszylinders legt und dann um den Zylinder wickelt. Die Hypotenuse beschreibt dann auf dem Zylinder eine Schraubenlinie, eine der merkwürdigsten transzendenten Kurven, die in der Mechanik von großer Bedeutung ist. Umgekehrt ist also die Abwickelung dieser Kurve, d. h. die aus ihr bei der Ausbreitung des Zylinders auf die Ebene hervorgehende Kurve, eine gerade Linie. Es gibt nun einen Lehrsatz über die Beziehung zwischen Krümmungsradien in entsprechenden Punkten einer Kurve und ihrer Abwickelung, und zwar gilt dieser Satz nicht nur für die Kegelflächen und Zylinder, sondern allgemein für jede abwickelbare Fläche.

Satz über die Abwickelung: Zwischen den Krümmungsradien ϱ und ϱ_1 in entsprechenden Punkten A und A_1 einer Kurve γ einer abwickelbaren Fläche φ und ihrer Abwickelung γ_1 besteht die Relation

$$\varrho = \varrho_1 \cos \nu, \tag{1}$$

wo ν den Neigungswinkel der Schmiegungsebene von γ in A gegen die Tangentialebene der Fläche in A bedeutet.

2. Zum Beweise denken wir uns (Fig. 90) die Ausbreitung der Fläche auf eine Ebene η_1 bereits so weit ausgeführt, daß die Kurve γ auf der einen Seite von A, etwa mit dem Bogen AB, bereits abgewickelt ist, während der auf der anderen Seite von A liegende Bogen AC mitsamt der Fläche noch auf η_1 niedergedrückt werden soll. Je näher nun C auf γ bei A liegt und je mehr also AC als Stück einer Geraden aufgefaßt werden kann,

Fig. 90.



desto genauer fällt die exakte Umlegung C_0 von C (Fig. 91) mit der Orthogonalprojektion C' (Fig. 90) von C auf η_1 zusammen. Es wird nämlich C bei der Umlegung des ganzen Flächenstücks sich um einen gewissen Punkt M drehen, der bereits in der Ebene liegt, und MC in die Endlage $MC_0 = MC$ übergehen, auf der auch die Orthogonalprojektion C' von MC liegt (Fig. 90 und 91). Bezeichnet ε den bei der Abwickelung gegen Null konvergierenden Winkel C_0MC, so ist der Unterschied δ zwischen der genauen Umlegung MC_0 von MC und der durch Orthogonalprojektion erzielten Annäherung MC'

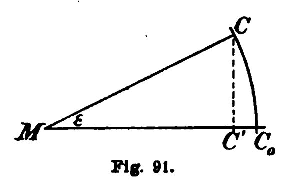


Fig. 91.

$$\delta = MC_0 - MC' = MC(1 - \cos \varepsilon) = 2\,MC \sin^2 \frac{\varepsilon}{2},$$

wofür man auch, da der Sinus eines sehr kleinen Winkels gleich dem Bogen ist,

$$\delta = \tfrac{1}{2} MC \varepsilon^2$$

setzen kann. Im Vergleich zu der sehr kleinen Strecke MC ist also der Fehler δ ungeheuer viel kleiner und verschwindet vollständig, wenn C sich dem Punkte A nähert. Daraus entnehmen wir die Berechtigung, die abgewickelte Kurve in der Nähe von A als Orthogonalprojektion von γ auf die Ebene η_1 aufzufassen. Bei dem vorgeschrittenen Zustande der Abwickelung haben Originalkurve und Abwickelung in A die Tangente AB gemein, die Ebene η_1 ist Tangentialebene der Fläche in A, und die Ebene ABC geht, je näher B und C an A rücken, in die Schmiegungsebene der Kurve in A über. Daher ist der Satz 2 des § 12 anwendbar und damit unser Satz bewiesen.

3. Die erste Anwendung dieses Satzes betreffe einen geraden Kreiszylinder und eine auf ihm liegende Ellipse ε (Fig. 92). Der Zylinder ζ stehe auf der Tafel Π_1, seine Basiskurve sei ein Kreis $\varkappa$ vom Radius r. Eine auf Π_2 senkrechte Ebene φ mit den Spuren f_1, f_2 treffe den Zylinder in einer Ellipse ε, deren höchster und tiefster Punkt über Π_1 mit A und $\bar{A}$ bezeichnet seien. Der Grundriß ε' der Schnittellipse ε ist mit $\varkappa$ identisch, der Aufriß verjüngt sich zu der Strecke $A''\bar{A}''$.

Die Gerade $A\bar{A}$ ist die Hauptachse der Ellipse, die Nebenachse nennen wir $B\bar{B}$. Bezeichnet ω den Neigungswinkel von φ (und f_2) gegen die erste Tafel, so sind

$$a = \frac{r}{\cos \omega}, \quad b = r \tag{2}$$

die Halbachsen der Ellipse, der Krümmungsradius in A ist also $\varrho_A = b^2/a = r \cos \omega$.

Das ergibt sich auch auf Grund des Satzes 4, § 12: Denn die Tangente der Ellipse in A läuft zu Π_1 parallel, der durch diese Tangente gehende Normalschnitt des Zylinders ist daher zu Π_1 parallel und trifft den Zylinder in einem zu $\varkappa$ kongruenten Kreise;

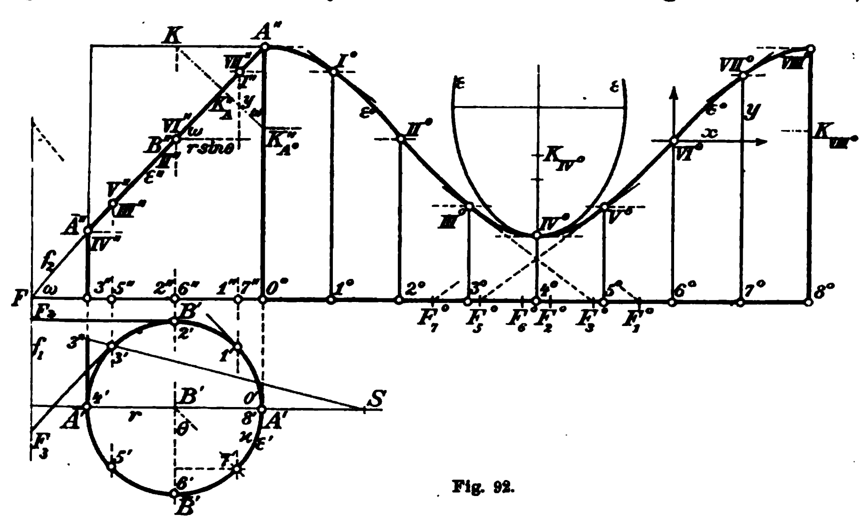


Fig. 92.

der Winkel zwischen diesem Normalschnitt und dem schrägen Schnitt, der die Ellipse liefert, ist ω, daher nach § 12, (28):

$$\varrho_A = r \cos \omega. \tag{3}$$

Der Krümmungsradius in B ist nach § 12, (3):

$$\varrho_B = \frac{a^2}{b} = \frac{r}{\cos \omega^2}. \tag{4}$$

Auch das folgt aus § 12, Satz 5. Denn die Ebene der Ellipse enthält die Zylindernormale des Punktes B, die zu Π_1 parallel ist; die Ebene der Ellipse erzeugt also in B einen Normalschnitt; der Hauptschnitt in B ist zu Π_1 parallel und schneidet einen Kreis vom Radius r heraus. Zwischen beiden Schnitten besteht die Neigung ω, also ist nach § 12, (29) in der Tat $\varrho_B = r/\cos \omega^2$.

4. Abwickelung des Rotationszylinders. Diese Ausführungen sollten nur zur Illustration der Sätze des vorigen Paragraphen dienen. Wir schneiden jetzt den Zylinder längs der Geraden AA' auf, um ihn auf die Aufrißebene auszubreiten. Die Abwickelung ist ein Rechteck von der Höhe des Zylinders und der Länge $2\pi r$. Die Achse x wollen

wir zur Grundlinie dieses Rechtecks machen. Da zugleich die Abwickelung der Ellipse ε konstruiert werden soll, so teilen wir die Basis $\varkappa$ des Zylinders von A' beginnend in 8 gleiche Teile mit den Teilpunkten $0', 1', \ldots, 8'$, wobei $8'$ mit $0'$ zusammenfällt, und verwandeln den Bogen $3'4'$ nach Bd. II, Fig. 118 in eine Strecke $4'3^*$, indem wir auf $\bar{A}'A'$ die Strecke $A'S = r$ abtragen und die Gerade $S'3'$ ziehen, die die Tangente von $\bar{A}'$ in 3^* trifft. Dann tragen wir $4'3^*$ auf der x-Achse 8 mal hintereinander ab: die Teilpunkte werden dort mit $0^0, 1^0, \ldots, 8^0$ bezeichnet. In ihnen errichten wir auf x die Lote 0^0A^0,[1]) $0^0\mathrm{I}^0, 0^0\mathrm{II}^0, \ldots, 0^0\mathrm{VIII}^0$, deren Endpunkte $A^0, \mathrm{I}^0, \mathrm{II}^0, \ldots, \mathrm{VIII}^0$ auf den Parallelen zur x-Achse durch die Punkte $A'', \mathrm{I}'', \ldots, \mathrm{VIII}''$ liegen, in denen die Gerade $A''\bar{A}''$ von den Loten aus $A', 1', \ldots, 8'$ auf die x-Achse getroffen wird. Es sind also $A, \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, \mathrm{VIII}$ die Punkte der Ellipse, die mit den Punkten $A', 1', 2', \ldots, 8'$ des Kreises auf derselben Geraden des Zylinders liegen, und $A^0, \mathrm{I}^0, \ldots, \mathrm{VIII}^0$ sind die entsprechenden Punkte der Abwickelung. Die Abwickelung der Ellipse ist daher eine wellenförmige Kurve ε^0, die bei A^0 und VIII^0 ein Maximum, bei IV^0 ein Minimum hat.

5. Tangenten der Abwickelung der Ellipse. Da die Tangenten der Ellipse ganz in der Ellipsenebene liegen, diese aber die Tafel Π_1 in der Geraden f_1 trifft, so schneidet auch jede Tangente diese Gerade; z. B. trifft die Tangente von III die Gerade f_1 in einem Punkte F_3, so daß $\mathrm{III}\,3'F_3$ ein rechtwinkeliges Dreieck ist, dessen Kathete $3'F_3$ den Kreis $\varkappa$ in $3'$ berührt. Denken wir dieses aus Papier ausgeschnitten und längs $\mathrm{III}\,3'$ an den Zylinder geklebt, so wird es bei der Ausbreitung des Zylinders auf die Ebene sich ohne Zerrung mit ausbreiten, und die Gerade $\mathrm{III}F_3$ wird zur Tangente der Kurve ε^0 in III^0. Dabei fällt das Dreieck, wie die Figur zeigt, nach der Seite der Geraden $\mathrm{III}^0 3^0$, auf der 4^0 liegt, während z. B. das Dreieck $\mathrm{VI}^0 6^0 F_6{}^0$ auf die Seite von $\mathrm{VI}^0 6^0$ zu liegen kommt, auf der 5^0 liegt. Indem wir dies beachten, tragen wir auf x von 3^0 aus nach der richtigen Seite $3^0F_3{}^0 = 3'F_3$ ab. Dann ist $\mathrm{III}^0F_3{}^0$ die Tangente von ε^0 in III^0.

6. Die Krümmungsradien der abgewickelten Ellipse wollen wir nur in ausgezeichneten Punkten bestimmen. Die Schmiegungsebene der Ellipse in allen ihren Punkten, also auch in A, ist die Ellipsenebene selber; die Tangentialebene des Zylinders in A berührt diesen längs der Geraden AA', steht auf Π_2 senkrecht und bildet mit der Ellipsenebene den Winkel $\nu = 90^0 - \omega$. Nach (1)

1) In unserer Figur ist A^0 mit A'' identisch angenommen.

folgt aus (3):

(5) $$\varrho_{A^0} = \varrho_A : \cos \nu = r \operatorname{ctg} \omega .$$

Die Strecken ϱ_A und ϱ_{A^0} können aus r durch eine einzige Gerade abgeleitet werden: Sei K der Punkt, in welchem die Achse des Zylinders von der durch A gehenden zu Π_1 parallelen Ebene getroffen wird; dann trifft das Lot aus K auf die Ellipsenebene die Hauptachse im Krümmungszentrum K_A von A, da

$$AK_A = r \cos \omega = \varrho_A ,$$

und den Zylindermantel in einem Punkte K_{A^0}, so daß

$$AK_{A^0} = r \operatorname{ctg} \omega = \varrho_{A^0}$$

ist. Dementsprechend ist in der Figur $K''_A A'' = \varrho_A$, $K''_{A^0} A'' = \varrho_{A^0}$. Damit ist ϱ_{A^0} gefunden; ϱ_{A^0} ist aber nicht nur Krümmungsradius der abgewickelten Kurve in A^0 und VIII⁰, sondern auch im tiefsten Punkte IV⁰ der Kurve, für den ebenfalls $\nu = 90^0 - \omega$ ist.

Die Tangentialebene des Zylinders in B berührt diesen längs BB' und ist zu Π_2 parallel. Da die Ellipsenebene auf Π_1 senkrecht steht, so ist sie auch zu dieser Tangentialebene senkrecht, daher ist für B der Winkel $\nu = 90^0$ und nach (1)

$$\varrho_{B^0} = \infty .$$

Dasselbe gilt für den Punkt $\overline{B}$. Daher ist der Krümmungsradius der Abwickelung in II⁰ und VI⁰ unendlich, d. h. die Kurve fällt dort auf eine erhebliche Strecke hin zeichnerisch je mit einer Geraden zusammen. Diese Geraden berühren und schneiden die Kurve in den Punkten II⁰ und VI⁰, denn die Krümmungskreise von A^0 und VIII⁰ liegen auf der einen Seite der Kurve, der Krümmungskreis von IV⁰ liegt auf der anderen Seite, und zwischen diesen Punkten muß es je eine Übergangsstelle geben, wo der Krümmungskreis weder auf der einen, noch auf der anderen Seite liegt; das sind eben die Punkte II⁰ und VI⁰, die deshalb Wendepunkte genannt werden. Läßt man einen Punkt P von A^0 auf der Kurve über I⁰, ... nach VIII⁰ gehen und achtet auf seine Tangente, so dreht sich diese anfangs im Uhrzeigersinne um P; in II⁰ jedoch kommt diese Drehung auf einen Augenblick zum Stillstand und ändert den Sinn: von II⁰ bis IV⁰ dreht sich die Tangente gegen den Umlaufsinn des Uhrzeigers, um dann in VI⁰ abermals den Drehsinn zu ändern. Ein neuer Grund, II⁰ und VI⁰ als Wendepunkte zu bezeichnen. Ihre Tangenten, die Wendetangenten, bilden mit der x-Achse den Winkel ω, da die zu ihrer Konstruktion dienenden Drei-

ecke $II^0 2^0 F_2^0$ und $VI^0 6^0 F_6^0$ mit dem Dreieck $B''6''F$ der Figur kongruent sind.

7. Es bleibt noch übrig, die Gleichung der abgewickelten Kurve aufzustellen. Da es, wie der Augenschein lehrt, wünschenswert ist, die Kurve mit einer Sinuslinie zu vergleichen, so legen wir den Anfangspunkt O des Koordinatensystems durch VI^0, ziehen die x-Achse zur trennenden Achse des Zweitafelsystems parallel, die y-Achse dazu senkrecht. Um jetzt etwa von VII^0 die Koordinaten zu berechnen, bezeichnen wir den Zentriwinkel zu $6'7'$ mit θ. Dann ist für den Punkt VII^0:

$$x = 6^0 7^0 = 6' 7' = r\theta,$$

während y im Aufriß des Zylinders als Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks mit der Hypotenuse $VI''VII''$ erscheint, dessen andere Kathete die Länge $r \sin\theta$ hat und mit der Hypotenuse den Winkel ω einschließt. Daher ist

$$y = r \sin\theta \operatorname{tg}\omega,$$

also

$$y = r \operatorname{tg}\omega \sin\frac{x}{r} \tag{6}$$

die Gleichung der Kurve ε^0. Für $r = 1$ und $\omega = 45^0$ ist das die gewöhnliche Sinuslinie, von der wir also mit unseren Hilfsmitteln jetzt unschwer zu jedem Punkte das Krümmungszentrum konstruieren könnten. Doch wollen wir darauf nicht näher eingehen. —

Um vollständig zu sein, ist in Figur 92 schließlich auch noch die Schnittellipse ε in ihrer wahren Gestalt eingetragen, und zwar in der Stelle IV^0 der Abwickelung.

8. Abwickelung des geraden Kreiskegels. In der Grundrißebene liege des Basiskreis $\varkappa$ eines geraden Kreiskegels; der Grundriß S' der Kegelspitze S ist der Mittelpunkt von $\varkappa$. Dieser Kegel werde von einer Ebene η geschnitten, die auf der Aufrißebene Π_2 senkrecht steht. Ihre erste Spur e_1 steht dann senkrecht auf der trennenden Achse x des Zweitafelsystems und trifft sie in einem Punkte, durch den e_2 geht; möge das der Punkt A'' sein, dessen erste Projektion A' der Schnittpunkt von $\varkappa$ mit dem zu x parallelen Durchmesser von $\varkappa$ ist. Es soll die Schnittkurve des Kegels mit η dargestellt und samt dem Kegel abgewickelt werden (Fig. 93).

9. Darstellung der Schnittkurve. Der Aufriß der Schnittkurve fällt auf die Gerade e_2. Daher ist nur noch der Grundriß zu bestimmen. Man findet beliebig viele Punkte der Schnitt-

kurve, indem man beliebig viel Strahlen des Kegels mit η zum Schnitt bringt. Dazu ist die Kenntnis der Eigenschaften der Schnittkurve nicht erforderlich. Bei unserer Anlage der Figur ist es eine Ellipse ε, eine Tatsache, von der wir zunächst keinen Ge-

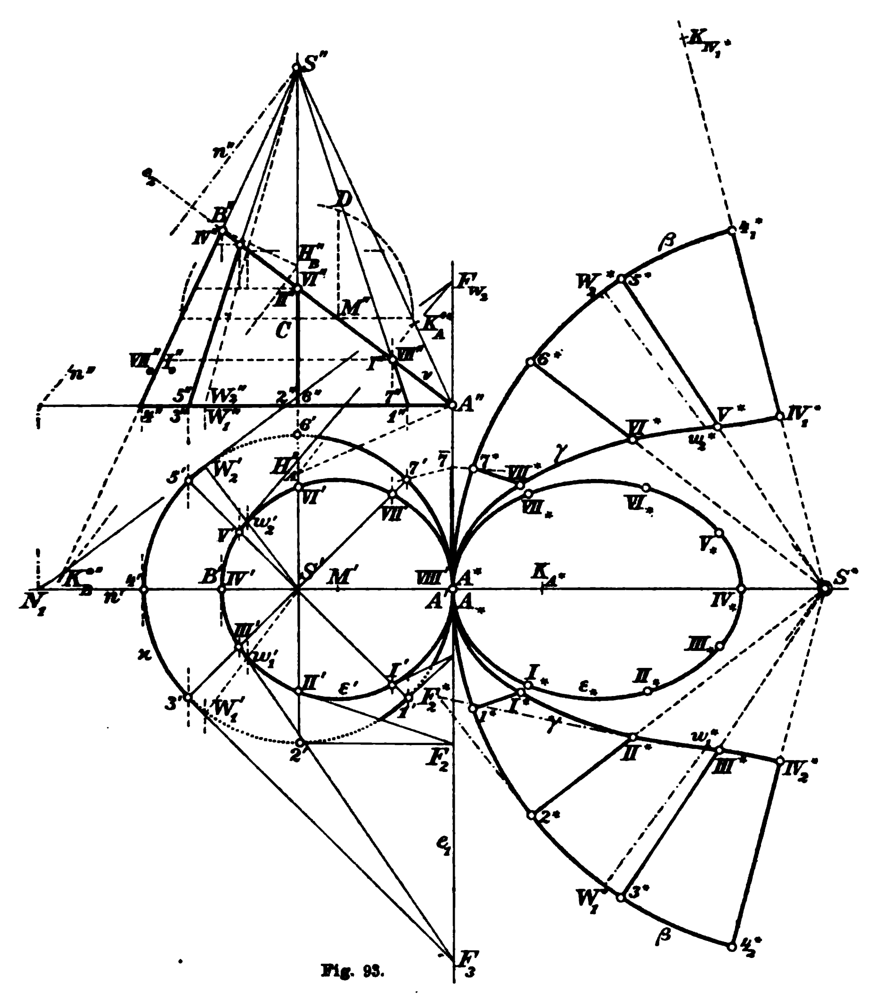


Fig. 93.

brauch machen wollen. Um eine übersichtliche Figur zu bekommen, teilen wir den Umfang von $\varkappa$ in gleiche Teile, etwa in acht, und bezeichnen die Teilpunkte von A' beginnend und im Umlaufsinne des Uhrzeigers mit $0', 1', \ldots, 8'$, wo $0'$ und $8'$ mit A' identisch sind. Zu diesen Punkten des Basiskreises bestimmen wir auf x die Aufrisse, von denen $1''$ mit $7''$, $2''$ mit $6''$, $3''$ mit $5''$ zusammenfällt. Dann werden die Kegelstrahlen SA, $S1$, $S2, \ldots$, $S7$ mit der Ebene

zum Schnitt gebracht; das dazu dienende Verfahren zeigen wir an $S1$ und $S7$. Die Projektionen von $S1$ sind $S'1'$ und $S''1''$. Da der Schnittpunkt I von $S1$ mit η seinen Aufriß auf e_2 hat, so ist I″ der Schnittpunkt von $S''1''$ mit e_2; aus I″ findet man dann auf $S'1'$ den Grundriß I′ von SI. Da $S''1''$ mit $S''7''$ zusammenfällt, so ist I″ zugleich als Aufriß VII″ des Punktes VII zu bezeichnen, in dem η von SVII getroffen wird, und das Lot aus I″ auf x, das auf $S'1'$ den Punkt I′ festlegt, schneidet zugleich $S'7'$ in VII′. In dieser Weise sind die Schnittpunkte I, II, ..., VII der Ellipse mit den Strahlen $S1$, $S2$, ..., $S7$ in der Figur dargestellt worden. Durch die acht Punkte A', I′, II′, ..., VII″ ist die Gestalt des Grundrisses ε' der Schnittkurve ε schon ziemlich klar bestimmt, und sie wird es noch mehr, wenn wir die Tangenten dieser Punkte konstruieren.

10. Tangenten der Schnittkurve. Die Tangenten der Schnittkurve ε — daß es eine Ellipse ist, soll immer noch nicht benutzt werden — liegen mit ε in der Ebene η, treffen also die erste Spur e_1 der Ebene in je einem Punkte, dessen Konstruktion wir etwa am Beispiel der Tangente des Punktes III zeigen wollen. Die Tangente von III liegt nämlich zugleich auch in der Ebene, die den Kegel längs der Geraden SIII berührt, und diese Ebene enthält auch die Tangente des Kreises $\varkappa$ im Punkte 3′. Die Tangenten von $\varkappa$ und ε' in 3′ und III′ liegen daher in einer Ebene und treffen sich in einem Punkte F_3 der Geraden e_1, der aber durch die Kreistangente des Punktes 3′ allein schon bestimmt ist. Nunmehr kann man F_3III′, den Grundriß der Tangente F_3III, ziehen. Nach diesem Verfahren sind in der Figur auch die Tangenten von I′ und II′ konstruiert.

11. Abwickelung des Kegels. Da alle Punkte des Basiskreises $\varkappa$ von der Spitze S des Kegels gleichen Abstand haben, so wird die Abwickelung des längs SA gespaltenen Kegels ein Kreissektor sein. Die Gerade S^*A^* des abgewickelten Kegelmantels lassen wir der Anschaulichkeit wegen in die Verlängerung von $S'A'$ fallen, und zwar falle A^* mit A' zusammen. Der Radius des Kreissektors ist S^*A^*, der Bogen heiße β; dieser ist also die Abwickelung von $\varkappa$. Daher wird β gleich dem Umfange von $\varkappa$ sein. Es gilt also, auf dem Kreise β um S^* mit dem Radius S^*A^* einen Bogen zu finden, der dem Umfange von $\varkappa$ gleich ist. Das geschieht, indem wir den Bogen $7'A'$ von $\varkappa$ erst in eine Strecke $\bar{7}A'$ auf der Tangente e_1 des Kreises $\varkappa$ verwandeln und diese Strecke rückwärts in einen gleichen Bogen 7^*A^* von β überführen. Zu diesem Zwecke tragen wir auf $S'A'$ von 4′ aus nach links $4'U = 4'S'$ ab (nicht in der Figur) und verbinden U mit 7′. Diese Gerade trifft e_1 in dem Punkte $\bar{7}$. Diesen

verbinden wir mit dem Punkte V (nicht in der Figur) auf A^*S^* der von A^* den Abstand $3 \times A^*S^*$ hat, und diese Linie trifft den Kreis β in 7^*. Indem wir jetzt den Bogen A^*7^* von A^* aus nach beiden Seiten je viermal auf β abtragen, erhalten wir den Kreisbogen $4_1^*5^*6^*7^*A^*1^*2^*3^*4_2^*$, der gleich dem Umfange von $\varkappa$ ist. Damit ist der Kegelmantel auf die Ebene Π_1 ausgebreitet.

12. Die Abwickelung der Schnittkurve ε erfolgt, indem man auf den Strahlen S^*1^*, $S^*2^*, \ldots$, S^*7^*, S^*A^* des verebneten Kegels die Abstände SI, SII, …, SVII, SVIII der Kegelspitze von den Punkten I, II, …, VIII der Schnittkurve abträgt. Wie diese Abstände gefunden werden, zeigen wir am Strahle SVII. Zunächst ist zu bemerken, daß sich die Länge SIV unmittelbar aus der Figur entnehmen läßt: SIV $= S''$IV$''$, weil SIV zu Π_2 parallel ist. Auf diesen Fall führen wir den des Strahles SVII durch Drehung zurück: der Kegel wird um seine Achse SS' gedreht, bis SVII in die Lage des Strahles SIV kommt. Dabei bewegt sich VII$''$ auf einer Parallelen zur trennenden Achse und fällt schließlich, als VII_0'', auf den Umrißstrahl $S''4''$ des Kegels. Also ist SVII $= S''\text{VII}_0''$. — Nach dieser Vorschrift werden die Abstände des Punktes S von I, II, … ermittelt und dann von S^* aus auf den nach 1^*, $2^*, \ldots$ gehenden Radien abgetragen. Die Endpunkte I*, II*, … bestimmen die Abwickelung γ der Kurve ε. Ihre Form wird noch schärfer fixiert durch die

13. Tangenten von γ. Denkt man sich, um die Tangente von γ in II* zu ermitteln, das rechtwinkelige Dreieck II$F_2 2$, dessen Grundriß II$'F_2 2'$ wir in der Figur sehen, aus Papier ausgeschnitten und mit seiner Kathete II2 längs der Geraden $S2$ an den Kegel geklebt, so wird es bei der Ausbreitung des Kegelmantels auf die Ebene Π_1 sich ohne Verzerrung mit ausbreiten und daher in eine Lage II$^*F_2^*2^*$ übergehen, in der es zu II$F_2 2$ immer noch kongruent ist, und, was die Hauptsache ist, mit seiner Hypotenuse F_2^*II* die Kurve γ in II* berührt. Von diesem Dreieck können wir aber sofort die Kathete $2^*F_2^*$ auf der Tangente des Kreises β von 2^* aus in der Länge $2^*F_2^* = 2'F_2$ abtragen, wodurch es vollständig bestimmt ist; F_2^*II* ist dann die gesuchte Tangente. Ein Blick auf den Grundriß zeigt, daß das Dreieck nach der Seite der Geraden S^*2^* abzutragen ist, auf der 1^* liegt. Die Tangenten erleichtern sehr die wirkliche Zeichnung der Kurve.

14. Die Krümmungsradien von γ ließen sich für jeden Punkt der Kurve ohne große Mühe angeben. Wir beschränken uns aber auf die ausgezeichneten Punkte A^* und IV_1^*, IV_2^*. Das glückt



wiederum, ohne daß wir zu wissen brauchen, ob ε eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist.

Um die Krümmung der Schnittkurve ε in A beurteilen zu können, haben wir den Hauptschnitt des Kegels in A einzuführen, dessen Ebene in A auf SA und damit auf Π_2 senkrecht steht. Seine zweite Spur ist also das in A'' auf $S''A''$ errichtete Lot $A''H_A''$. Mit diesem Hauptschnitt hat der Basiskreis $\varkappa$ des Kegels in A die Tangente e_1 gemein; der Krümmungsmittelpunkt zu A von $\varkappa$ — d. h. das Zentrum dieses Kreises — ist daher nach § 12, Satz 4 die Orthogonalprojektion des zu A gehörigen Krümmungszentrums H_A des Hauptschnittes. Folglich ist H_A der Schnittpunkt der Ebene des Hauptschnittes mit der Kegelachse, und so ist H_A'' in der Figur eingetragen.

Projiziert man H_A auf die Ebene η der Schnittkurve ε, so erhält man den zu A gehörigen Krümmungsmittelpunkt K_A der Kurve ε (§ 12, Satz 4) — der im Aufriß zur Entlastung der Figur weggelassen werden mußte —, da ε mit dem Hauptschnitte die Tangente e_1 gemein hat. Für die Abwickelung kommt der Neigungswinkel ν der Ebene der Kurve ε gegen die Tangentialebene des Kegels längs SA in Betracht Diese Ebenen stehen auf Π_2 senkrecht, der Winkel ν ist gleich $\sphericalangle S''A''\mathrm{IV}''$, und nach dem Satze über die Abwickelung ist $AK_A/\cos\nu$ der gesuchte Krümmungsradius des Punktes A^* der Abwickelung. Das aus H_A'' auf e_2 gefällte Lot, das e_2 in K_A'' trifft, schneidet $A''S''$ in einem Punkte $K_A^{0\,''}$, so daß $A''K_A^{0\,''}$ der zu A^* gehörige Krümmungsradius von γ ist; in der Figur ist $A^*K_{A^*} = A''K_A^{0\,''}$ gemacht, und K_{A^*} ist das Krümmungszentrum zum Punkte A^* der Kurve γ.

Faßt man $K_A^{0\,''}$ als Aufriß eines Punktes K_A^0 der Geraden SA auf, so ist K_A^0 der Punkt der Kegelfläche, der bei ihrer Abwickelung zum Krümmungsmittelpunkt des Punktes A der Schnittkurve wird. Es folgt:

> Die Normalebene in einem Punkte A auf einem Strahle SA eines geraden Kreiskegels, die nach § 12, 10. den durch A gehenden Hauptschnitt des Kegels enthält, trifft die Kegelachse im Krümmungszentrum H_A dieses Hauptschnittes. Hat ein schräger Schnitt ε des Kegels mit diesem Hauptschnitte in A die Tangente gemein, so trifft das Lot aus H_A auf die Ebene von ε diese Ebene und den Kegelstrahl SA in den zu A gehörigen Krümmungszentren K_A und K_A^0 der Kurve ε

und ihrer Abwickelung γ, wobei K_A^0 erst nach erfolgter Abwickelung diese Bedeutung übernimmt.

Dieser schöne Satz ist auf den Punkt IV anwendbar, den wir auch mit B bezeichnen. Errichtet man also auf $S''B''$ in B'' das Lot, und fällt man aus seinem Schnittpunkte H_B'' mit $S''S'$ auf e_2 das Lot, so trifft dieses den Strahl $S''B''$ in $K_B^{0\,\prime\prime}$, und wenn man auf $S^*4_1^*$ (in der Abwickelung) von IV_1^* aus $\mathrm{IV}_1^* K_{\mathrm{IV}_1^*} = \mathrm{IV}'' K_B^{0\,\prime\prime}$ abträgt, so ist $K_{\mathrm{IV}_1^*}$ das Krümmungszentrum zu IV_1^*. Dieselbe Konstruktion gilt natürlich auch für den Punkt IV_2^*, der ja nur eine andere Auffassung des Punktes IV_1^* darstellt.

15. Wendetangenten. Diese Betrachtung ließe sich mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie unschwer — wie bemerkt — auf die anderen Punkte der Kurve γ übertragen, doch möge es mit dem Mitgeteilten sein Bewenden haben, da dabei nichts prinzipiell neues herauskommt. Dagegen wollen wir noch auf eine für das praktische Zeichnen wichtige Frage eingehen. Die Kurve γ muß zwischen den Punkten A^* und IV_1^*, da ihre Krümmungskreise zu verschiedenen Seiten von γ liegen, einen Wendepunkt besitzen, wie wir das auch bei der Abwickelung des Zylinders gefunden hatten. Nach der dort gemachten Erfahrung entspricht diesem Wendepunkte ein solcher Punkt w von ε, daß die den Kegel längs wS berührende Ebene auf der Ebene von ε senkrecht steht ($\nu = 90^0$ in (1) gibt, wie wir verlangen, einen unendlich großen Krümmungsradius der Abwickelung). Solcher Tangentialebenen gibt es in unserer Figur zwei. Jede auf der Ebene η von ε senkrechte Tangentialebene des Kegels enthält nämlich die aus S auf η gefällte Normale n, und durch n gehen nur zwei Tangentialebenen des Kegels — falls n außerhalb des Kegels liegt, was in unserer Figur angenommen ist; liegt n innerhalb des Kegels, so gibt es keine Tangentialebene der gesuchten Art und auch keine Wendepunkte, was zur Folge hat, daß alsdann alle Krümmungszentra der Kurve γ auf derselben Seite dieser Kurve liegen. In unserer Figur liegt n außerhalb des Kegels, was man daran erkennt, daß der Aufriß n'' von n, der auf e_2 senkrecht steht, außerhalb des Aufrisses der Kegelfläche liegt. Der Grundriß n' von n ist mit $A'4'$ identisch. Auf ihm liegt der erste Spurpunkt N_1 von n. Legt man nun aus N_1 an $\varkappa$ die Tangenten N_1W_1', N_1W_2', so bestimmen diese mit S die gesuchten Tangentialebenen. Die Aufrisse der Punkte W_1', W_2' des Kreises $\varkappa$ liegen auf der Achse x, und der Strahl $S''W_1'' = S''W_2''$ trifft e_2 im Aufrisse $w_1'' = w_2''$ (nicht in der Figur) der Punkte w_1, w_2 von ε, die bei der Abwickelung in Wendepunkte übergehen. Die Grundrisse w_1', w_2' dieser Punkte können jetzt auf

$S'W_1'$ und $S'W_2'$ konstruiert werden. Die Punkte W und w werden dann ebenso in die Abwickelung übertragen wie 1 und I, und die Tangenten von γ in w_1 und w_2, die Wendetangenten, werden nach 13. gefunden. Sie sind die zeichnerisch wichtigsten Tangenten der Kurve, deren Gestalt nunmehr hinreichend festgelegt ist.

16. Soll schließlich auch noch die wahre Gestalt der Schnittkurve gezeichnet werden, so könnte man auch das ausführen, ohne sich über ihre geometrische Bedeutung Rechenschaft zu geben. Man hätte sogar nach 14. sofort die Krümmungszentra zu A und B. Doch wollen wir, um die Figur nicht zu überfüllen, jetzt davon Gebrauch machen, daß es sich um eine Ellipse handelt. Ihre Hauptachse ist gleich $A''B''$. Ist M ihre Mitte, M'' also die von $A''B''$, so wird die Ebene der Ellipse von der durch M gelegten Parallelebene π zu Π_1 in der kleinen Achse der Ellipse geschnitten, die als Sehne des umzuklappenden Schnittkreises der Ebene π leicht zu finden ist, siehe Figur 93. Sie ist auch kleine Achse des Grundrisses ε. Die natürliche Gestalt von ε ist als ε_* in die Abwickelung des Kegels gezeichnet unter Hervorhebung der Punkte I, II, ..., die zur Darstellung von γ gedient hatten.

§ 14. Die Schraubenlinie.

1. Im vorigen Paragraphen hatten wir den Mantel eines Kreiszylinders als ein Rechteck auf eine Ebene ausgebreitet und untersucht, was dabei aus einer auf dem Zylinder verzeichneten Kurve wird. Diesen Gedankengang wollen wir jetzt umkehren: Wir geben uns auf der als Rechteck ausgebreiteten Fläche eine Kurve l_0 und wollen sehen, in was für eine Kurve l sie übergeht, wenn wir das Rechteck wieder zu einem Kreiszylindermantel krümmen. Ist l_0 speziell eine Gerade, so heißt l eine Schraubenlinie; die Schraubenlinie ist daher eine solche Kurve auf dem Mantel eines Kreiszylinders, die durch Ausbreitung des Zylindermantels auf die Ebene in eine Gerade übergeht.

2. Zur Abwickelung des Zylindermantels teilen wir den Basiskreis in zwölf gleiche Teile mit den Teilpunkten 0, 1, 2, ..., 12 und zeichnen auch die Abwickelung der durch diese Punkte gehenden Erzeugenden des Zylinders ein (Fig. 94); die Punkte der abgewickelten Fläche werden durch eine angehängte Null kenntlich gemacht. Es erhöht die Übersichtlichkeit, wenn man sich die Abwickelung des Zylindermantels so ausgeführt denkt, daß während dieses Vorganges die Erzeugenden des Zylinders, wie beim Beginne, stets senkrecht auf der Projektionsebene Π_1 stehen und daß die ausgebreitete Mantel-



fläche schließlich auf die Aufrißebene Π_2 zu liegen kommt. Jeder Punkt des Zylindermantels bewegt sich dann während der Abwickelung auf einer zu Π_1 parallelen Ebene, sein Aufriß beschreibt also eine Parallele zur Schnittachse von Π_1 und Π_2. So gehört z. B. zu

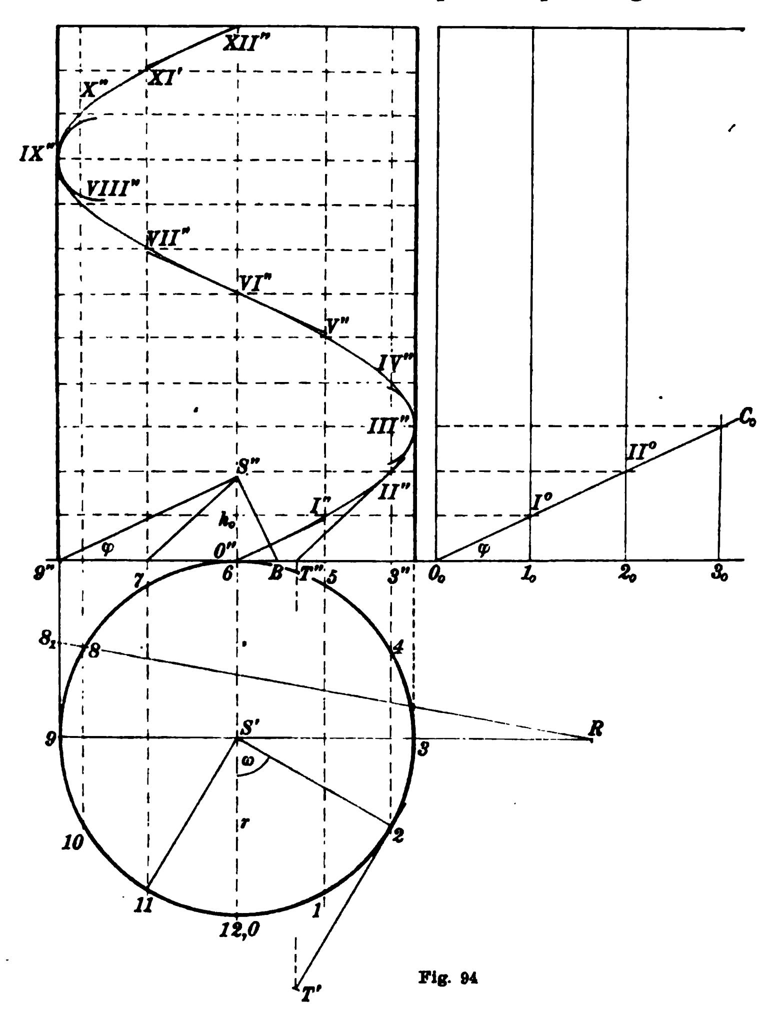


Fig. 94

dem Punkte II des Zylindermantels mit dem Aufrisse II″ und dem Grundrisse 2 die Abwickelung II⁰, deren Konstruktion nach § 13 keiner weiteren Erklärung bedarf, und auch der Rückweg von II⁰ zu II″ ist aus der Figur ohne weiteres verständlich.

3. Die in ihrer Abwickelung gegebene Kurve l_0 sei nun speziell eine Gerade l_0, die durch 0_0 geht und gegen die Grundlinie des recht-

eckig ausgebreiteten Zylindermantels um den Winkel φ geneigt ist. Von den durch $1_0, 2_0, \ldots$ gehenden Erzeugenden wird l_0 in zwölf äquidistanten Punkten $I^0, II^0, \ldots$ getroffen, deren Originale I, II, ... auf dem Zylindermantel nach Aufriß und Grundriß sofort rekonstruiert werden. Die punktweise Konstruktion des Aufrisses der Schraubenlinie ist damit gewonnen und kann unmittelbar aus der Figur abgelesen werden. Wir suchen nun nach geometrischen Eigenschaften dieser Kurve.

4. Denkt man sich die auf den Zylinder aufzuwickelnde ebene Fläche und in ihr die Gerade l_0 unbegrenzt groß, so erhält man auf dem unbegrenzten Zylinder eine Linie l, die sich unendlich oft um den Zylinder windet wie die Gänge einer Schraube, woher ihr Name Schraubenlinie rührt. Jede Erzeugende des Zylinders wird von dieser Linie unendlich oft geschnitten, und zwar immer in demselben Abstande h, welcher als Ganghöhe der Schraubenlinie bezeichnet wird. In unserer Figur ist l_0 die Diagonale des als Rechteck ausgebreiteten Mantels, und h die Höhe dieses Rechtecks. Wenn man den Zylindermantel längs der durch 0 gehenden Erzeugenden aufschneidet und nur soweit in eine Ebene verwandelt, daß diese den Zylinder noch längs der durch 2 gehenden Erzeugenden berührt, so wird die Schraubenlinie in II von der Geraden 0_0II berührt, in die der bereits abgewickelte Teil der Schraubenlinie übergegangen ist. Diese Gerade hat aber gegen Π_1 die Neigung φ, und so folgt: Die Tangenten der Schraubenlinie haben gegen die Grundrißebene dieselbe Neigung φ, sind also parallel zu den Erzeugenden eines Rotationskegels, des sog. Richtungskegels der Schraubenlinie. Diesen legen wir so an, daß sein Basiskreis mit dem des Zylinders zusammenfällt, seine Spitze S also auf der Achse des Zylinders liegt; die Konstruktion von S'' ergibt sich daraus, daß dann $9''S''$ gegen die Achse des Zweitafelsystems die Neigung φ hat.

5. Zieht man durch S die Parallele zur Tangente der Schraubenlinie in II, so ist dies eine Erzeugende des Richtungskegels und trifft seinen Basiskreis in einem Punkte 11, der gegen den Grundriß 2 von II um einen rechten Winkel zurückliegt, falls man diesen Kreis im Sinne der Drehung von 1 nach 2, 3, ... beurteilt. Demnach ist $11S'$ der Grundriß der zur Tangente parallelen Erzeugenden des Kegels, womit auch sein Aufriß $11''S''$ gegeben ist; der Aufriß T''II$''$ ist dann parallel zu $11''S''$ anzulegen. Diese einfache Tangentenkonstruktion gilt für jeden Punkt der Schraubenlinie. Der Grundriß $T'2$ von TII ist Tangente des Basiskreises in 2 und ist gleich der Länge des Bogens 02, also gleich $0_0 2_0$, woraus sich eine zweite, aber

minder einfache Tangentenkonstruktion entnehmen läßt, die in der Figur ebenfalls eingetragen ist. Wichtig sind die Tangenten der Punkte 0, VI und XII: sie haben im einen oder anderen Sinne die Neigung φ und erweisen sich, wie wir sehen werden, als Wendetangenten.

6. Der Aufriß der Schraubenlinie hat daher das Aussehen einer Sinuslinie. Führt man die Gerade 0″XII″ als x-Achse mit dem Sinne 0″XII″ und die Zweitafelachse als y-Achse mit nach rechts weisendem Pfeile ein, so hat der Punkt II″ die Abszisse

$$x = 2^0\mathrm{II}^0 = 0_0 2_0 \operatorname{tg} \varphi = r\omega \operatorname{tg} \varphi,$$

wo r den Radius des Basiskreises und ω den Bogen 02 dieses Kreises in absolutem Maße bezeichnet; die Ordinate y von II″ ist dagegen gleich der Projektion von $S'2$ auf die Zweitafelachse, also $y = r \sin \omega$; daher hat man für den Aufriß der Schraubenlinie die Parameterdarstellung:

$$x = r\omega \operatorname{tg} \varphi, \quad y = r \sin \omega. \tag{1}$$

Hierin ist aber $h_0 = r \operatorname{tg} \varphi$ die Strecke $S''0''$, d. h. die Höhe des Richtungskegels, und aus (1) folgt durch Elimination von ω:

$$y = r \sin \frac{x}{h_0}; \tag{2}$$

diese Gleichung geht durch die Substitution $x = h_0 \xi$, $y = r\eta$ über in in $\eta = \sin \xi$. Der Aufriß der Schraubenlinie ist also in der Tat eine verallgemeinerte Sinuslinie. Sie kann durch zwei affine Transformationen der Ebene bei affiner Lage in eine Sinuslinie verwandelt werden; denn die Substitution $x = h_0\xi$, $y = r\eta$ kann als Ergebnis der beiden Substitutionen $x = h_0\xi'$, $y = \eta'$ und $\xi' = \xi$, $\eta' = r\eta$ betrachtet werden, von denen die erste eine Affinität mit der y-Achse als Affinitätsachse und der x-Achse als Affinitätsrichtung bedeutet, während bei der zweiten die Sache umgekehrt liegt. Von dieser Verwandtschaft mit der Sinuslinie wollen wir aber weiter keinen Gebrauch machen.

7. Um uns die Lage der Schmiegungsebene der Schraubenlinie in einem ihrer Punkte, etwa in II, klar zu machen, denken wir den Zylinder längs der Erzeugenden durch 0 aufgeschnitten und auf die Tangentialebene τ des Zylinders längs der durch II gehenden Erzeugenden abgewickelt. In der Nähe dieser Erzeugenden, und speziell in der Nähe des Punktes II, kann diese Abwickelung nach dem vorigen Paragraphen annähernd ersetzt werden durch Orthogonalprojektion



auf τ. Sind P und Q zwei Punkte der Schraubenlinie rechts und links von II und P^*, Q^* ihre Abwickelungen auf τ, so bestimmen die Geraden PP^*, QQ^* eine Ebene σ, die auf τ senkrecht steht und durch die Tangente t des Punktes II geht, da die Schraubenlinie sich auf t abwickelt; die Ebene σ enthält also auch den Punkt II, geht also durch drei Punkte der Kurve und nähert sich, wenn P und Q auf der Kurve II hin wandern, immer mehr der Schmiegungsebene von II. Diese steht also auf τ senkrecht und hat, wie t, gegen Π_1 die Neigung φ.

8. Die Schmiegungsebene σ von II trifft den Zylinder in einer Ellipse ε, der Grenzlage der durch P, III, R gehenden Schnittellipse; daher ist der Krümmungskreis von ε in II identisch mit dem der Schraubenlinie in II. Nach § 13, (2) hat ε die Halbachsen $a = r/\cos\varphi$, $b = r$, und zwar ist die kleine Halbachse das Lot, das man aus II auf die Zylinderachse fällen kann. Der Krümmungskreis der Ellipse in II ist daher $\varrho = a^2/b = r/\cos^2\varphi$. Es folgt: **Die Schraubenlinie hat in allen ihren Punkten denselben Krümmungsradius**

$$\varrho = \frac{r}{\cos^2\varphi}. \tag{3}$$

Aus der Formel § 13, (1) liest man jetzt nochmals ab, da der Krümmungsradius ϱ_1 der Abwickelung unendlich ist, daß die Schmiegungsebene auf der Tangentialebene des Zylinders senkrecht steht.

9. Die Schmiegungsebene der Schraubenlinie in 0, VI und XII bildet gegen Π_2 den Neigungswinkel $\sigma = 90^0$, daher ist im Aufrisse der Krümmungsradius dieser Punkte nach § 12, Satz 2, unendlich; die Punkte 0″, VI″, XII″ sind daher **Wendepunkte** des Aufrisses der Schraubenlinie. In III hat die Schmiegungsebene gegen Π_2 die Neigung $\sigma = 90^0 - \varphi$, auch die Tangente hat gegen Π_2 die Neigung $\tau = 90^0 - \varphi$, und es ist daher nach § 12, (21) der Krümmungsradius des Aufrisses in III″ gleich $\varrho_1 = \varrho \sin^2\varphi = r\,\mathrm{tg}^2\varphi$. Diese Strecke ist aber gleich 0″B, wenn BS'' auf 9″S'' senkrecht steht. Mit diesem Radius sind in der Figur die Krümmungskreise des Aufrisses der Schraubenlinie in III″ (und IX″) konstruiert. Damit ist die graphische Ausführung der Figur in der weitgehendsten Weise erleichtert.

Dritter Abschnitt.

Orthogonale Axonometrie und Perspektive.

§ 15. Das Verfahren der orthogonalen Axonometrie.

1. Ein Vorzug der im ersten Abschnitt besprochenen schrägen Parallelprojektion war ihre große Einfachheit in Verbindung mit einer bescheidenen Ansprüchen genügenden Bildtreue. Das beste Prüfungsmittel für die Wirkungsweise einer Projektion ist die Darstellung der Kugel. In § 5, 7 haben wir gesehen, daß das Schrägbild der Kugel eine Ellipse ist und haben uns mit dem Befremdlichen dieser Tatsache ausführlich auseinandergesetzt. Unserem Gefühl hätte es besser entsprochen, wenn das Bild der Kugel ein Kreis gewesen wäre. Das tritt bei Parallelprojektion aber nur ein, wenn die Projektionsrichtung auf der Bildebene senkrecht steht. Wir wollen nun eine axonometrische Projektion entwickeln, die auf die Bildebene senkrecht projiziert, und deshalb genauer axonometrische Orthogonalprojektion genannt wird; axonometrisch heißt sie, wie die des ersten Abschnittes (vgl. § 2, 3) weil sie, um den eindeutigen Rückweg vom Bild zum Original zu ermöglichen, ein rechtwinkeliges Koordinatensystem zur Hilfe nimmt, daß zugleich mit dem darzustellenden Gegenstande projiziert wird. Doch darf die Bildebene Π nun nicht mehr, wie es bei der Schrägprojektion von § 2, 5 an geschehen war, mit einer der Koordinatenebenen xz zusammenfallen, weil sonst die Bilder der Punkte der beiden anderen Koordinatenebenen auf die Geraden x und z fielen; die Bildebene Π sei vielmehr gegen die drei Achsen x, y, z geneigt und treffe sie in drei Punkten A, B, C eines nicht ausgearteten Dreiecks, des Spurdreiecks. Da $x \perp BC$, $y \perp CA$, $z \perp AB$, so stehen nach § 7, Satz 11 auch die Orthogonalprojektionen dieser Geraden aufeinander senkrecht: $x' \perp BC$, $y' \perp CA$, $z' \perp AB$, d. h.:

In der orthogonalen Axonometrie sind die Bilder x', y', z' der Koordinatenachsen die Höhen des Spur-

dreiecks ABC, **das Bild** O' **des Koordinatenanfangs ist der Höhenpunkt.**

Die Bilder geometrischer Gegenstände erhalten, wie hier, stets dieselben Zeichen wie die Originale, jedoch mit einem Akzente.

2. Um zu ermitteln, inwieweit der soeben aufgestellte Satz um-

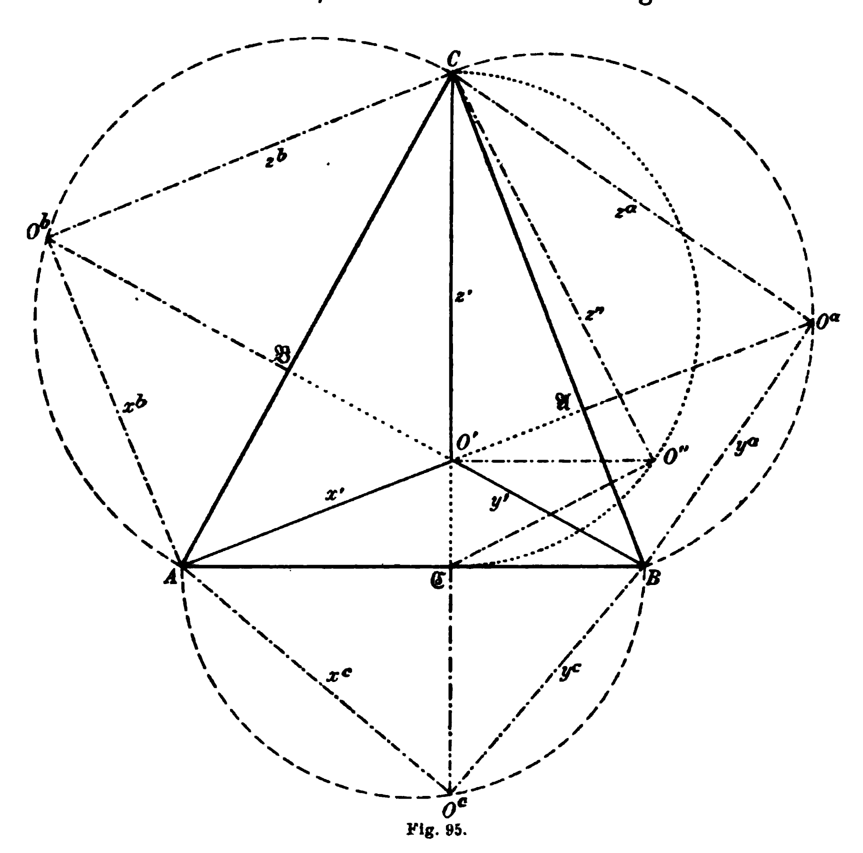


Fig. 95.

kehrbar ist, nehmen wir die vorliegende Textseite als Bildebene Π an und geben uns in ihr ein beliebiges Dreieck ABC (Fig. 95) mit seinem Höhenpunkte O'. Soll nun diese Figur die Orthogonalprojektion eines Tetraeders $ABCO$ auf seine Grundfläche $\Pi \equiv ABC$ sein, dessen Spitze O hinter Π liegt und dessen Kanten OA, OB, OC aufeinander senkrecht stehen, so muß man durch Umklappung der rechtwinkligen Dreiecke AOB, BOC, COA um ihre Hypotenusen in die Ebene Π drei rechtwinklige Dreiecke AO^cB, BO^aC, CO^bA erhalten, die paarweise in der Länge einer Seite übereinstimmen:

$$AO^b = AO^c,\quad BO^c = BO^a,\quad CO^a = CO^b.$$

Das ist nun, wie wir beweisen können, tatsächlich der Fall. Bei der Drehung um die Hypotenuse $c \equiv AB$ beschreibt nämlich jeder Punkt der Ebene AOB einen Kreis, dessen Ebene auf AB senkrecht steht; seine Orthogonalprojektion durchläuft also eine auf AB senkrechte Gerade, und speziell die von O bewegt sich auf der Höhe $C\mathfrak{C}$ des Dreiecks ABC. Auf dieser Höhe liegt also auch O als O^c, wenn die Ebene AOB mit Π zusammengefallen ist; O^c ist also der Schnittpunkt der Höhe $C\mathfrak{C}$ mit demjenigen Halbkreise über AB als Durchmesser, auf den wir den durch O gehenden Halbkreis über dem Durchmesser AB gerade wollen fallen lassen. Ebenso werden die beiden anderen Dreiecke umgeklappt und ergeben die Endlagen O^a, O^b von O. Da der Kreis um den Durchmesser BC durch die Höhenfußpunkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ geht, so ist nach dem Sekantensatze

$$A\mathfrak{C} \cdot AB = A\mathfrak{B} \cdot AC;$$

andererseits ist nach dem Pythagoreischen Lehrsatze

$$(AO^c)^2 = A\mathfrak{C} \cdot AB, \quad A\mathfrak{B} \cdot AC = (AO^b)^2,$$

also

$$(AO^c)^2 = (AO^b)^2, \quad AO^c = AO^b.$$

Entsprechend ist $BO^c = BO^a$, $CO^a = CO^b$.

3. Auch das Dreieck $CO\mathfrak{C}$ ist bei O rechtwinkelig; da seine Ebene auf Π senkrecht steht, liegen die Bilder C, O', $\mathfrak{C}$ seiner Ecken in gerader Linie. Dreht man es um seine in Π liegende Hypotenuse $C\mathfrak{C}$, bis O als O'' in die Ebene Π fällt, so beschreibt O einen Kreisbogen, dessen Ebene auf $C\mathfrak{C}$ senkrecht steht. Daher liegt O'' auf dem in O' auf $C\mathfrak{C}$ errichteten Lote, und wird auf diesem durch den Kreis mit $C\mathfrak{C}$ als Halbmesser festgelegt, wenn man sich vorher noch einigt, auf welcher Seite von $C\mathfrak{C}$ der Punkt O'' liegen soll. Damit ist die Aufgabe gelöst, den Abstand $O'O''$ des Punktes O von der Tafel Π zu bestimmen. Da O hinter Π liegen soll, so ist O auf der Normale der Ebene Π in O' jetzt eindeutig bestimmt. Nebenbei bemerkt muß $\mathfrak{C}O^c = \mathfrak{C}O''$, $CO'' = CO^a$ sein, da dies Umdrehungen derselben Strecken sind; rein planimetrisch läßt sich der Beweis auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke $A\mathfrak{C}O'$ und $C\mathfrak{C}B$ führen: Es ist

$$\mathfrak{C}B : \mathfrak{C}C = \mathfrak{C}O' : \mathfrak{C}A,$$

also

$$\mathfrak{C}O' \cdot \mathfrak{C}C = \mathfrak{C}B \cdot \mathfrak{C}A, \quad (\mathfrak{C}O'')^2 = (\mathfrak{C}O^c)^2, \quad \mathfrak{C}O'' = \mathfrak{C}O^c.$$

Ferner ist

$$(CO^a)^2 = C\mathfrak{A} \cdot C\mathfrak{B} = CO' \cdot C\mathfrak{C} = (CO'')^2,$$

also

$$CO^c = CO''.$$

So folgt:

Das Spurdreieck ABC kann willkürlich angenommen werden; sein Höhenpunkt O' ist dann die Orthogonalprojektion des Anfangspunktes O des rechtwinkeligen Koordinatensystems. Steht noch fest, daß O hinter der Ebene ABC liegen soll, so ist O durch Annahme von ABC eindeutig festgelegt;

andernfalls kommt natürlich nur noch das Spiegelbild des Tetraeders $ABCO$ an der Ebene ABC als Figur in Betracht, deren Orthogonalprojektion das Dreieck ABC mit seinen Höhen bildet.

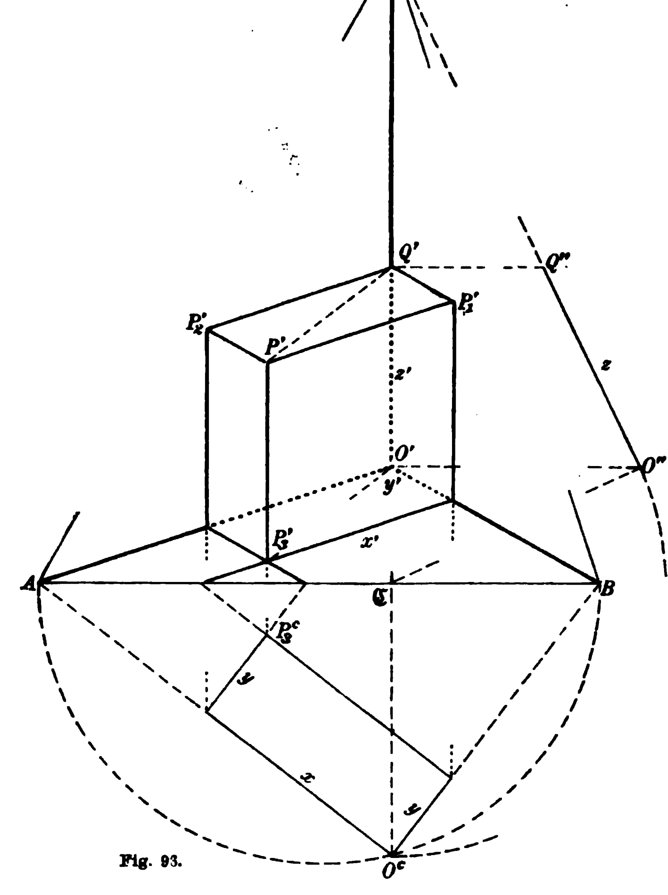


Fig. 93.

4. Bei der praktischen Ausführung axonometrischer Konstruktionen genügen meistens die Umklappungen AO^cB und $CO''\mathfrak{C}$ der rechtwinkligen Dreiecke AOB und $CO\mathfrak{C}$ um ihre Hypotenusen (siehe Fig. 96), wobei O'' auf der durch O' zu AB gezogenen Parallelen einfach vermöge der Gleichheit $\mathfrak{C}O^c = \mathfrak{C}O''$ gefunden wird. Um nun einen Punkt P mit gegebenen Koordinaten x, y, z darzustellen, nimmt man die von P auf die Koordinatenebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ gefällten Lote PP_1, PP_2, PP_3 zur Hilfe, welche die Längen x, y, z haben sollen und die zusammen mit den Koordinatenebenen einen rechteckigen Quader bestimmen. Das Basis-

rechteck dieses Quaders in der Ebene $z = 0$ denken wir zugleich mit dem Dreieck AOB um AB in die Bildebene geklappt. Zwischen den Bildern der Punkte der Ebene AOB und ihren Umklappungen um AB in die Ebene Π besteht aber nach § 11, 4 Affinität mit AB als Achse und O', O^c als einem Paar zugeordneter Punkte. Man konstruiert also bezüglich O^cA, O^cB als x-Achse und y-Achse den Punkt P_8^c mit den Koordinaten x, y und bestimmt den zu P_8^c affinen Punkt P_8', was in Fig. 96 mit Hilfe des Basisrechtecks geschehen ist, wobei noch als Kontrolle dient, daß $P_8'P_8^c \perp AB$ ist. Die Bilder der auf der Basisfläche vertikalen Quaderkanten sind zu CO' parallel, und es kommt darauf an, die auf CO' liegende Kante $z' = O'Q'$ zu finden, deren natürliche Länge z gegeben ist. Bei der Drehung der Ebene $CO\mathfrak{C}$ um die Gerade $C\mathfrak{C}$ beschreibt aber Q einen Kreis, dessen Ebene auf der Geraden $C\mathfrak{C}$ unseres Zeichenblattes Π senkrecht steht, und wenn O auf O'' gefallen ist, erreicht Q eine Endlage Q'' dergestalt, daß $Q''Q' \perp CO'$ ist. Macht man also auf $O''C$ die Strecke $O''Q'' = z$ und fällt $Q''Q' \perp CO'$, so ist Q' auf CO' festgelegt, und man findet P' entweder durch Darstellung des Quaders oder kürzer mittels des Parallelogramms $P_8'O'Q'P'$, das ein Rechteck darstellt.

5. Es ist hiernach nicht schwer, einen komplizierteren architektonischen Gegenstand darzustellen, dessen Form im wesentlichen durch den Grundriß und nicht allzuviel Vertikallinien verschiedener Länge festgelegt ist, siehe Fig. 97. Dabei wird vorzugsweise die Affinität zwischen der umgeklappten Ebene AO^cB und ihrem Bilde $AO'B$ zur Konstruktion verwendet werden. Die Figur zeigt, wie die Höhe des Sockels in der Umklappung $CO''\mathfrak{C}$ bestimmt werden kann, ohne das Bild selbst mit Hilfslinien zu überladen; auch wurde nicht der ganze Grundriß des Körpers axonometrisch dargestellt, weil die vielen Linien die

Fig. 97.

Übersichtlichkeit gestört hätten; das Heraufnehmen des Obeliskengrundrisses auf die obere Fläche des Sockels kostet zwar einige Hilfslinien mehr, wirkt aber weniger verwirrend als der Aufbau des ganzen Körpers über seinem Grundriß auf der Fläche $z = 0$.

§ 16. Zurückführung auf das Zweitafelsystem und Anwendungen.

1. Für die Darstellung geometrischer Gebilde aus Grund- und Aufriß reichen die Betrachtungen des § 15 wohl aus; häufig wird aber eine freiere Verwendung der orthogonalen Axonometrie erwünscht sein, die mit den Elementen operiert, durch die das Gebilde axonometrisch festgelegt ist. Für den einzelnen Punkt P sind das ursprünglich seine drei Koordinaten; es kommt zwar auf dasselbe hinaus, ist aber in konstruktiver Hinsicht vorteilhafter, wenn wir sagen: Ein Punkt P wird eindeutig festgelegt durch sein Bild P' und durch das Bild P_3' seiner Orthogonalprojektion auf die Ebene $z = 0$. Denn nach Figur 96 kann man sofort P_3^c und die Länge von PP_3 angeben. Als determinierende Elemente einer Geraden u wird man folgerichtig ihr Bild u und das Bild u_3' ihrer Orthogonalprojektion auf die Ebene $z = 0$ auffassen, während eine Ebene η eindeutig festgelegt sein wird, wenn man ihre Schnitte mit den drei Koordinatenebenen kennt. Es ist nun nicht schwer, auf diese Elemente die Axonometrie der Fundamentalkonstruktionen zu gründen, die das Schneiden von Geraden und Ebenen, Strecken- und Winkelabtragen, Lotfällen usw. betreffen. Rascher kommt man aber zum Ziel und erhält obendrein recht brauchbare Konstruktionsmethoden durch Zurückführung der orthogonalen Axonometrie auf das Verfahren des Zweitafelsystems.

2. Als erste Projektionsebene Π_1 betrachten wir die bisherige Zeichenebene Π, wozu sehr gut der Umstand paßt, daß wir die Orthogonalprojektion eines Punktes P auf Π mit P' bezeichnet, also durch einen Akzent kenntlich gemacht hatten, wie es im Zweitafelsystem üblich ist; zweite Projektionsebene oder Nebenrißebene, wie wir sagen wollen, wird dagegen die Ebene $\Pi_2 \equiv CO\mathfrak{C}$ sein, die ja in der Tat auf $\Pi_1 \equiv \Pi$ senkrecht steht.

Im Sinne dieses Zweitafelsystems sind bereits O' und O'' die beiden Projektionen des Punktes O. Damit O als ein hinter Π_1 gelegener Punkt erscheint, muß man die einseitig von $C\mathfrak{C}$ begrenzte Halbebene von Π_1 als die vordere betrachten, die den Punkt B enthält. Die Ebene $z = 0$ steht senkrecht auf Π_2, und hat $\mathfrak{C}A$ zur ersten, $\mathfrak{C}O''$ zur zweiten Spur; die zweite Projektion jedes in dieser Ebene

gelegenen Punktes muß also auf $\mathfrak{C}O''$ liegen. So findet man sofort zu P_3' die zweite Projektion P_3'', indem man von P_3' auf die Zweitafelachse $C\mathfrak{C}$ das Lot fällt und dieses mit $\mathfrak{C}O''$ zum Schnitt bringt. (Fig. 98). Wenn aber eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht, so steht ihre erste Projektion auf der ersten, die zweite Projektion auf der zweiten Spur der Ebene senkrecht (§ 7, Satz 12); es ist aber $p \equiv PP_3$ auf $z = 0$ senkrecht, und tatsächlich $p' \equiv P'P_3'$ auf der ersten Spur $A\mathfrak{C}$ von $z = 0$ senkrecht; die zweite Projektion p'' von p ist dann das Lot in P_3'' auf der zweiten Spur $\mathfrak{C}O''$. Das Lot $P'P'''$ aus P' auf $C\mathfrak{C}$ trifft p'' in P'', der zweiten Projektion von P. Durch P' und P_3' ist hiernach die zweite Projektion P'' eindeutig bestimmt, wie man auch umgekehrt aus P' und P'' eindeutig P_3' rekonstruieren kann, wie ein Blick auf Fig. 98 zeigt.

Der erste Spurpunkt $\mathfrak{P}$ der Geraden p wird dadurch bestimmt, daß seine zweite Projektion $\mathfrak{P}''$ außer auf p'' auch auf der Zweitafelachse liegt; das zugehörige $\mathfrak{P}'$ ist also der Punkt, in welchem p unsere Zeichenfläche Π durchstößt: Der Punkt P liegt somit in unserer Figur vor dem Blatte Π. Der Punkt $\mathfrak{P}'$ kann natürlich auch gefunden werden, indem man die durch die z-Achse und durch p gehende Ebene mit Π zum Schnitt bringt; die Schnittlinie CT trifft AB in einem Punkte T, der auch auf $O'P_3'$ liegt und hierdurch bestimmt ist.

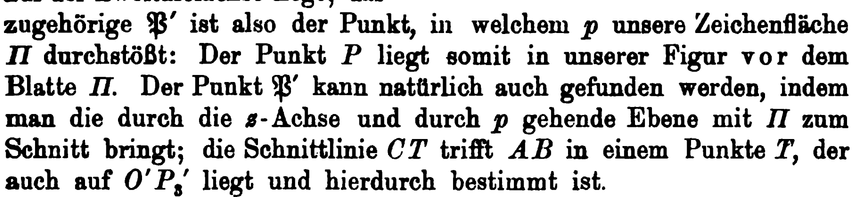


Fig. 98.

3. In der Figur 98 ist $P''P'''$ der erste Tafelabstand des Punktes P, d. h. der Abstand des Punktes von der Bildebene Π der axonometrischen Darstellung, so daß man sich nunmehr die Lage von P auf der Normale von Π in P' genau vorstellen kann. — Man löst jetzt leicht die Aufgabe, die wahre Länge einer Strecke PQ zu bestimmen, von der P', Q' und P_3', Q_3' gegeben sind. Auch findet man sofort den Nebenriß u'' einer Geraden u, die durch ihr Bild u' und das Bild u_3' ihrer Orthogonalprojektion u_3 auf die Ebene $z = 0$ gegeben ist, indem man zu zwei Punkten P, Q von u die Nebenrisse P'', Q'' bestimmt. Ist endlich eine Ebene η irgendwie durch Punkte oder Geraden festgelegt, deren erste Projektion man bereits hat, so lassen sich auch die zweiten Projektionen und darauf



die beiden Spuren finden. Diese einfachen Aufgaben bieten eine Fülle von Möglichkeiten, auf die wir nicht näher eingehen können; es genügt uns, einzusehen, daß es nicht schwer ist, die orthogonale Axonometrie mit dem Zweitafelsystem organisch zu verbinden. Damit ist unser Ziel erreicht. Wir lassen nun einige Anwendungen folgen.

4. In einer Ebene η, die zum Koordinatensystem beliebige Lage hat, sei ein Kreis gegeben; man soll ihn axonometrisch darstellen. Von η seien etwa die Schnittlinien WM und WN mit den Ebenen $y = 0$, $x = 0$ bildlich gegeben (Fig. 99); W sei der Schnittpunkt mit der z-Achse, M und N seien in der Bildebene gelegen. Dann ist $s \equiv MN$ die erste Spur der Ebene, und wenn E den Schnittpunkt von s mit der Achse $C\mathfrak{C}$ des Zweitafelsystems bezeichnet, so ist EW'' die zweite Spur, womit nebenbei die Aufgabe gelöst ist, die beiden Spuren einer Ebene zu finden. Zur Lösung der ersten Aufgabe wird man naturgemäß die Ebene η um ihre Spur s in die Bildebene Π klappen; es kommt

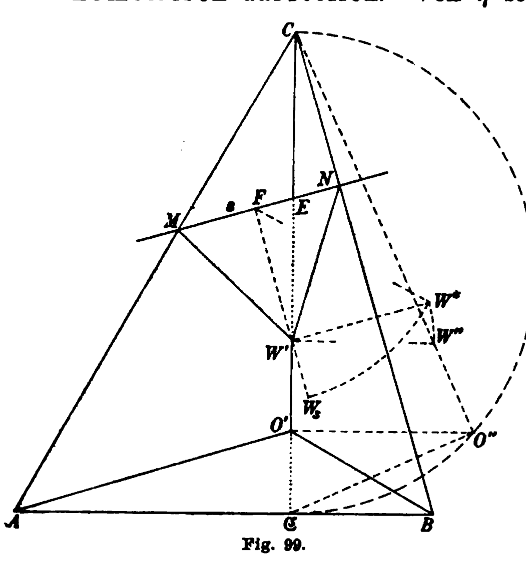


Fig. 99.

darauf an, die Endlage W_s des Punktes W zu finden; W beschreibt einen Kreis $\varkappa$, dessen Ebene auf s senkrecht steht, die Orthogonalprojektion W' von W durchläuft also das aus W' auf s zu fällende Lot $W'F$, dessen Fußpunkt F das Zentrum von $\varkappa$ ist. W_s liegt daher auf diesem Lote. Der Radius FW des Kreises $\varkappa$ ist Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks $FW'W$, dessen Kathete $W'W$ in der Ebene $\Pi_2 \equiv CO\mathfrak{C}$ liegt und die Länge $W'W''$ hat. Dieses Dreieck klappen wir um die Kathete FW' in die Bildebene um; in dieser Lage ist es aber konstruierbar, denn man erhält die fehlende Ecke W^*, indem man auf $W'F$ in W' das Lot errichtet und gleich $W'W''$ macht. Damit ist der Radius FW^* von $\varkappa$ gefunden; und es ist jetzt einfach $FW_s = FW^*$ zu machen. Zwischen dem axonometrischen Bilde der Ebene η und ihrer Umklappung besteht nach § 15, 4 eine affine Beziehung mit s als Affinitätsachse und W', W_s als einem Paare homologer Punkte. Die gestellte Aufgabe ist hiermit auf ein bekanntes

Problem zurückgeführt; auf die weitere Ausführung der Figur wollen wir verzichten.

Eine andere einfache Bestimmung von W_s benutzt die Umklappung der Dreiecke AOC und BOC in die Bildebene (Fig. 95), um die natürlichen Längen von MW und NW zu finden.

5. Zur Umlegung des Dreiecks $CO\mathfrak{C}$ genügt der Besitz der Punkte C, O', $\mathfrak{C}$, das Dreieck $CO''\mathfrak{C}$ genügt aber nach Fig. 98 zur Konstruktion des Nebenrisses P'' eines Punktes P, der durch P' und P_3' gegeben ist. Folglich kann in der orthogonalen Axonometrie ein Punkt P, der durch P' und P_3' gegeben ist, eindeutig rekonstruiert werden, wenn man vom Spurdreieck ABC weiter nichts kennt als die Punkte C, O', $\mathfrak{C}$.

Fig. 100.

Die Bilder der x-Achse und y-Achse sind hiernach entbehrlich. In dieser Weise ist die Figur 100

ausgeführt, wo man zwar die unbegrenzte Gerade AB, aber nicht die Punkte A und B kennt. Das Verfahren, mit der z-Achse allein zu konstruieren, eignet sich naturgemäß zur Darstellung von Rotationskörpern, die z zur Drehachse haben, aber auch zur Abbildung architektonischer Gegenstände. In Figur 100 ist zunächst die Aufgabe gelöst, einen auf $z = 0$ stehenden Rotationszylinder, der die z-Achse zur Achse hat, darzustellen; gegeben sind der Radius des Basiskreises und die Höhe. Das Bild des Basiskreises ist als Orthogonalprojektion eines Kreises in $z = 0$ um O nach § 11, 7 eine Ellipse mit dem Mittelpunkt O', deren Hauptachse gleich dem Durchmesser des Kreises und parallel zur Spur AB der Ebene z ist; die Nebenachse liegt daher auf $O'\mathfrak{C}$ und ist als Bild eines auf $O\mathfrak{C}$ liegenden Radius zu finden, indem man auf $O''\mathfrak{C}$ die Strecke $O''12''$ gleich dem Radius macht und auf $C\mathfrak{C}$ projiziert. Damit ist die Aufgabe bis auf Kleinigkeiten gelöst.

6. Auf dem soeben dargestellten Zylinder liege eine Schraubenlinie von gegebenem Steigungswinkel α, die ebenfalls abgebildet werden soll. Um hier nach dem Vorbild der Figur 94 vorgehen zu können, denken wir den Basiskreis in 12 gleiche Teile geteilt und die durch die Teilpunkte gehenden Erzeugenden des Zylinders gelegt. Zu diesem Zwecke brauchen wir die Umklappung der Ebene $z = 0$ und des in ihr enthaltenen Kreises um die Achse AB in die Bildebene. Ohne A und B zu kennen, findet man das umgelegte O^c auf $\mathfrak{C}C$ vermöge der Beziehung $\mathfrak{C}Q'' = \mathfrak{C}O^c$. Der Kreis ε^c um O^c mit dem Radius des Basiskreises ist dann die Umlegung des Basiskreises und zur Grundellipse ε' des bildlichen Zylinders affin; er wird mittels der Teilpunkte $1^c, 2^c, \ldots, 12^c$ in zwölf gleiche Teile zerlegt; durch Hinaufloten auf ε^c findet man $1', 2', \ldots, 12'$ und damit die Bilder der 12 Erzeugenden des Zylinders durch diese Punkte.

Unsere Figur ist zur Ersparung von Hilfslinien so angelegt, daß die Bilder der Erzeugenden paarweise zusammenfallen. Wir machen nun auf $\mathfrak{C}O''$ die Strecke DO'' gleich einem Zwölftel des Umfangs von ε^c und tragen in D an DO'' den gegebenen Steigungswinkel α der Schraubenlinie an. In dem so entstehenden Dreieck DEO'' ist $O''E$ die Strecke, die in Figur 94 durch $1_0 I^0$ wiedergegeben wird. Sie wird auf $C\mathfrak{C}$ projiziert und die Projektion sei d'. Dann kommt die Darstellung der Schraubenlinie darauf hinaus, $1'I' = d'$, $2'II' = 2 \cdot d'$, $3'III' = 3 \cdot d', \ldots$ zu machen, wo $I', II', III', \ldots$ die Bilder der Kurvenpunkte auf den Erzeugenden durch $1, 2, 3, \ldots$ sind.

7. Diese Konstruktion wird praktisch ausgeführt, indem man auf $O'C$ eine Skala mit dem Nullpunkt O' und dem Intervall d' anlegt und durch den

Skalenpunkt 1 die Parallele zu $O'1'$,
„ 2 „ „ „ $O'2'$

usw. zieht und mit der Erzeugenden durch $1', 2', \ldots$ in $I', II', \ldots$ zum Schnitt bringt. So entsteht eine sich unendlich oft wiederholende Kurve mit unendlich vielen zu $C\mathfrak{C}$ senkrechten Symmetrieachsen, von denen eine Art durch den Punkt III', die zweite Art durch IX' geht. Die Symmetrie ergibt sich unmittelbar aus der Konstruktion und ist bei der Achse durch IX' sichtbar gemacht.

8. Der Weg zur Tangentenkonstruktion dieser Kurve führt nach § 14 über den Richtungskegel der Schraubenlinie. Um zunächst seinen Nebenriß zu erhalten, tragen wir in $12''$ an $\mathfrak{C}O''$ den Steigungswinkel α an und erhalten so das Dreieck $12''O''S''$; es ist also $12''S'' \parallel DE$. Dann ist Dreieck $12''S''6''$ der Schnitt der Ebene $CO\mathfrak{C}$ mit dem Richtungskegel im Nebenriß, d. h. um $C\mathfrak{C}$ umgelegt. Die Projektion von S'' auf $C\mathfrak{C}$ liefert S', das Bild der Spitze des Richtungskegels. (Daß S' in unserer Figur auf einem Skalenpunkt liegt, ist Zufall.) Nach § 14 ist jetzt die Tangente

in I' parallel zu $S'10'$,
in II' „ „ $S'11'$,
in III' „ „ $S'12'$,
in IV' „ „ $S'1'$

usw. Durch Konstruktion dieser Tangenten wird das Bild der Kurve sehr genau.

9. Es ist nicht schwer, schließlich noch die Krümmungsradien in den Scheiteln $III', IX', \ldots$ zu bestimmen. Nach Satz 2 § 12 braucht man dazu den Neigungswinkel τ der Tangente und σ der Schmiegungsebene gegen die Bildebene Π. Die Schmiegungsebene hat aber nach § 14 gegen die Basis des Zylinders die konstante Neigung α, wie z. B. im Nebenrisse die Gerade $12''S''$ gegen $\mathfrak{C}O''$ diese Neigung hat. Die Basis des Zylinders ist aber selber gegen die Bildebene geneigt, und zwar ist $A\mathfrak{C}$ die erste, $\mathfrak{C}O''$ die zweite Spur der Basisebene. Folglich ist der Winkel, den $12''S''$ mit $C\mathfrak{C}$ bildet, unmittelbar der gesuchte Neigungswinkel σ_{III} der Schmiegungsebene zu III. Zieht man durch S'' die Parallele $\zeta\zeta$ zu $C\mathfrak{C}$, so treten, wie die Figur zeigt, bei S'' unmittelbar die Neigungswinkel σ_{III} und σ_{IX} auf. Da der Neigungswinkel der Tangente jedesmal dem der Schmiegungsebene gleich ist, so vereinfacht sich die Formel des Satzes 2 § 12 in

$$\varrho_1 = \varrho \cos^2 \sigma .$$



Der konstante Krümmungsradius der Schraubenlinie ist aber nach § 14, (3) gleich

$$\varrho = \frac{r}{\cos^2 \alpha},$$

wenn r den Radius des Basiskreises bezeichnet. In Fig. 100 ist $S''K \perp 12''S''$ gezogen; dann ist $12''K = \varrho$. Nun macht die Konstruktion von ϱ_1 weiter keine Schwierigkeit.

§ 17. Allgemeines über Perspektive.

1. Wir kommen nun zur ästhetisch vollkommensten Darstellungsart räumlicher Gebilde, zur Perspektive. Die Perspektive sucht den räumlichen Gegenstand so darzustellen, wie er uns beim Sehen mit einem unbewegt gehaltenen Auge O erscheint. Bringt man zwischen den Gegenstand und das Auge eine Glasscheibe, so erblickt man auf dieser ein scheinbares Bild, das mit so täuschender Treue den vom Gegenstand selber ausgehenden Sinneseindruck wiedergibt, daß man sich leicht in die Illusion hineinfinden kann, als hätte man nur dieses Bild, nicht den Gegenstand vor sich. Dieses scheinbare Bild will die Perspektive festhalten und in ein dauerndes verwandeln; soweit dabei nur das rein Gestaltliche des Bildes, nicht Farbe und Helligkeit in Betracht kommt, spricht man genauer von Linearperspektive. Mit dieser allein haben wir uns im folgenden zu beschäftigen.

2. Wenn die Glasscheibe so aufgestellt ist, daß wir sie, ohne unsere Stellung zu verändern, mit unseren Armen erreichen können, so wird man das scheinbare Bild vorläufig dadurch fixieren können, daß man seine Linien mittels eines Glasschreibstiftes nachfährt. So wird man z. B. am Fenster stehend das Bild der Straße auf die Fensterscheibe zeichnen. Will man von der Scheibe weiter zurücktreten, so kann man sich helfen, indem man die Fensterscheibe mit einem quadratischen Maschennetz bedeckt und das bei unbewegtem Auge gesehene Bild auf einem Papierblatt nachzeichnet, das mit demselben Maschennetz versehen ist. Schon Albrecht Dürer lehrte dieses Verfahren in seiner „Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit“, Nürnberg, 1525, wo es durch einen Holzschnitt erläutert ist, der in der posthumen lateinischen Ausgabe von 1538 fehlt.

3. Um das perspektivische Bild rein geometrisch zu gewinnen, ohne uns mit der Optik des menschlichen Auges auseinandersetzen zu müssen, bringen wir dicht vor das Auge ein Papierscheibchen



mit einem punktförmigen Loch O, durch das wir von nun an den Gegenstand betrachten wollen.

> Dann liegt jeder Punkt A des Gegenstandes zusammen mit seinem Bilde $\mathfrak{A}$ auf einer durch den Punkt O gehenden Geraden, einem Sehstrahl,

wie wir sagen wollen; denn ein kleiner zwischen O und A gebrachter Körper verdeckt immer nur dann das Bild $\mathfrak{A}$, wenn er auf dem Sehstrahl OA liegt. Das auf der Glasscheibe entstehende Bild ist also mathematisch gesprochen der Schnitt der vom Punkte O nach den Punkten des Gegenstandes hingehenden Sehstrahlen mit der Oberfläche der Scheibe. Hierauf beruht das geometrische Verfahren der Perspektive, das wir nun, um auch für Nichtmathematiker verständlich zu sein, mit den einfachsten Mitteln auseinandersetzen wollen.[1]) Zunächst einige Vorbemerkungen!

4. Der Punkt O, der ersichtlich nur dazu diente, von jedem Punkte des Gegenstandes nur einen Sehstrahl in das Auge dringen zu lassen, wie es auch bei punktförmig verengter Pupille der Fall sein würde, heißt fortan einfach der Gesichtspunkt. Die angeschaute Fläche der Glasscheibe wird durch die unbegrenzt gedachte Bildebene π ersetzt, an deren Stelle nachher beim praktischen Zeichnen das Zeichenblatt oder die Zeichentafel tritt.

Das Bild $\mathfrak{A}$ eines beliebigen Punktes A ist dann, wie bemerkt, der Schnittpunkt des Sehstrahls OA mit π; es wird also unbestimmt nur für den Punkt O selber und fällt ins Unendliche bei allen Punkten A, die in der zu π parallelen Ebene ω durch O liegen.

Die Punkte dieser Ebene ω werden natürlich überhaupt nicht gesehen, ebensowenig wie alle in der Nähe liegenden Punkte; die geometrische Konstruktion überschreitet hier, um ihre Zwecke zu erreichen, die Grenzen unserer Sinne.

Wir gehen jetzt umgekehrt von einem Punkte $\mathfrak{A}$ der Bildebene π aus und fragen nach dem Punkte A, dessen Bild $\mathfrak{A}$ ist. Da läßt sich feststellen:

Jeder Punkt $\mathfrak{A}$ der Bildebene ist das Bild der unendlich vielen Punkte A, die auf dem Sehstrahl $O\mathfrak{A}$ liegen.

5. Ist x eine nicht durch O gehende Gerade, so liegen die von O nach den Punkten dieser Geraden führenden Sehstrahlen in einer Ebene $\mathfrak{x}$; diese trifft die Bildebene π in einer Geraden $\mathfrak{x}$, dem Bilde

---

1) Aus diesem Grunde wird der Inhalt des § 1 hier teilweise noch einmal wiederholt.



von x. Auf $\mathfrak{x}$ liegen die Bilder aller Punkte von x. Wenn x der Ebene ω angehört, fällt ξ mit ω zusammen und $\mathfrak{x}$ liegt in seiner ganzen Erstreckung auf π unendlich fern; von allen anderen nicht durch O gehenden Geraden des Raumes reicht das Bild ins Endliche. Als Bild eines Sehstrahls wird man den Punkt auffassen müssen, den er mit π gemein hat, da er nach 4. alle Punkte dieses Strahls abbildet; er heißt der Spurpunkt des Sehstrahls.

6. Allgemein versteht man unter dem Spurpunkt $\mathfrak{S}_x$ einer Geraden x ihren Schnittpunkt mit π; der Spurpunkt einer zu π parallelen Geraden liegt in π unendlich fern. Der Spurpunkt einer Geraden ist, wie jeder Punkt der Bildebene, allemal sein eigenes Bild und legt daher das Bild der Geraden fest, sobald noch von irgend einem Punkte derselben die Abbildung bestimmt ist.

7. Diesen zweiten Punkt, der für die Abbildung einer Geraden entscheidend ist, nimmt man gern in einer ausgezeichneten Lage an, z. B. als unendlich fernen Punkt der Geraden. Das Bild $\mathfrak{F}_x$ des unendlich fernen Punktes einer Geraden x heißt Fluchtpunkt von $\mathfrak{x}$. Das ist so zu verstehen: Die Sehstrahlen nach den Punkten von x liegen, wie bemerkt wurde, in einer Ebene, die π in $\mathfrak{x}$ schneidet; alle diese Strahlen treffen π und bilden da je einen Punkt von x auf $\mathfrak{x}$ ab, nur der durch O zu x parallel verlaufende Sehstrahl bestimmt auf π einen Punkt $\mathfrak{F}_x$, der bei der antiken Auffassung des Parallelismus als Nichtschneiden nicht als Bild eines Punktes von x aufgefaßt werden kann, siehe Fig. 101, wo der größeren Anschaulichkeit wegen π wagerecht angenommen ist, während man sonst die Bildebene meistens aufrecht stellt. Die Geometrie der Alten kannte nur starre, unwandelbare Formen, während die neuere Geometrie die geometrischen Gestalten fließen und stetig in einander übergehen läßt. Von diesem Standpunkt wird man zu Figur 101 bemerken, daß, wenn der Punkt C auf x im Sinne des Pfeiles ohne

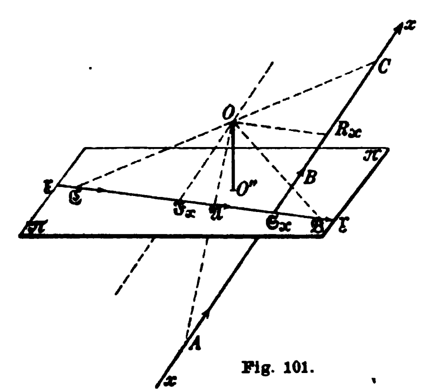


Fig. 101.

Ende weiter läuft, sein Bild $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{x}$ sich unbegrenzt dem Punkte $\mathfrak{F}_x$ nähert, während des der Strahl OC oder $O\mathfrak{C}$ aus der nicht parallelen Lage zu x stetig in die parallele übergeht. Die synthetische Geometrie wird dieser Tatsache gerecht, indem sie, wie bereits vorweggenommen wurde, jeder Geraden einen unendlich fernen Punkt

zuschreibt, der auch jeder dazu parallelen Geraden angehört; von diesem Punkte ∞ ist dann $\mathfrak{F}_x$, der Fluchtpunkt, das Bild.

Parallele Geraden, und nur diese, haben also im Bilde denselben Fluchtpunkt.

Nur wenn eine Gerade zu π parallel ist, fällt der Fluchtpunkt des Bildes ins Unendliche, weil dann $O\mathfrak{F}_x$ zu π parallel ist.

8. Auch der Gegensatz zwischen sich schneidenden und nichtschneidenden Ebenen wird in der neueren Geometrie überbrückt durch Einführung des unendlich Fernen. Zwei Ebenen schneiden einander immer, nur kann die Schnittgerade auf ihnen unendlich fern liegen; dann sind sie parallel.

Parallele Ebenen haben dieselbe unendlich ferne Gerade. Die unendlich fernen Punkte aller auf einer Ebene liegenden Geraden erfüllen die unendlich ferne Gerade dieser Ebene. Diese Auffassungsweise bewährt sich auch in der Perspektive, indem sie zu ausnahmslosen Gesetzen führt. Die Strahlen, die durch O zu allen Geraden einer nicht zu π parallelen Ebene α parallel gezogen werden, bestimmen eine zu α parallele Ebene; diese trifft π in einer Geraden, die man als Bild der Gesamtheit der unendlich fernen Punkte von α ansprechen muß, und da dieses Bild eine Gerade ist, so ist es nur konsequent, die unendlich fernen Punkte auf α selber sich in gerader Linie geordnet zu denken. Das Bild f_α der unendlich fernen Geraden einer Ebene α heißt Fluchtlinie; auf ihr liegen also die Bilder der unendlich fernen Punkte aller Geraden der Ebene.

Für jede zu α parallele Ebene liefert unsere Konstruktion von f_α dieselbe Fluchtlinie, übereinstimmend damit, daß man parallelen Ebenen dieselbe unendlichferne Gerade zuschreibt. Zu parallelen Ebenen gehört also bei perspektiver Abbildung dieselbe Fluchtlinie. Nur wenn eine Ebene zu π parallel ist, liegt die Fluchtlinie im Unendlichen.

9. In Figur 101 ist auch der Punkt R_x der Geraden x sichtbar gemacht, dessen Bild ins Unendliche fällt, dessen Sehstrahl also zu π parallel ist und daher der durch O zu π parallel gelegten Ebene ω angehört.

Durch R_x und $\mathfrak{S}_x$ wird x in drei Strecken zerlegt: in die endliche Strecke $R_x\mathfrak{S}_x$ und ihre beiderseitigen unendlichen Verlängerungen $R_x\infty$, $\mathfrak{S}_x\infty$; ebenso zerfällt $\mathfrak{x}$ in die endliche Strecke $\mathfrak{F}_x\mathfrak{S}_x$ und ihre unendlichen Verlängerungen $\mathfrak{F}_x\infty$, $\mathfrak{S}_x\infty$. Die Figur 101 zeigt durch die Abbildung dreier Punkte A, B, C und durch die beigesetzten Pfeile:

Es bilden sich die Strecken

$$\infty\,\mathfrak{S}_x,\ \mathfrak{S}_x R_x,\ R_x\,\infty$$

von x auf die Strecken

$$\mathfrak{F}_x\mathfrak{S}_x,\ \mathfrak{S}_x\,\infty,\ \infty\,\mathfrak{F}_x$$

von $\mathfrak{x}$ ab, und dem Bewegungssinn A, B, C entspricht der Sinn $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$.

Da bei den Voraussetzungen der praktischen Malerei die Glastafel, vom Gesichtspunkt O aus beurteilt, immer vor dem Gegenstand liegt, so wird von der Geraden x nur der Teil $\infty\,\mathfrak{S}_x$ in Betracht kommen; im Bilde schaut man also die Gerade $\mathfrak{x}$ nur in ihrer Erstreckung zwischen Spurpunkt und Fluchtpunkt.

§ 18. Perspektive mit Hilfe der Tafellote.

1. Für die Ausführung perspektivischer Konstruktionen, der wir uns nun zuwenden, ist es wichtig, sich mit der Abbildung einiger zur Bildebene in ausgezeichneter Lage befindlichen Geraden vertraut zu machen. Da sind zuerst die Tafellote zu betrachten, d. h. die auf der (als Tafel gedachten) Bildebene senkrechten Geraden. Aus § 17, 7 entnimmt man:

Der Fluchtpunkt $\mathfrak{F}_x$ einer Geraden x liegt allemal auf dem zur Geraden parallelen Sehstrahl,

daher liegt der Fluchtpunkt eines Tafellotes auf dem aus O auf die Tafel gefällten Lote OO'' und ist sein Fußpunkt. Man nennt allgemein den Punkt A'', in dem das aus einem Punkte A auf die Ebene π gefällte Lot diese trifft, die Orthogonalprojektion des Punktes A; wir wollen sie durch einen Doppelakzent von der Bezeichnung des Punktes A unterscheiden: A''.

Die Tafellote haben also ihren Fluchtpunkt in der Orthogonalprojektion O'' des Gesichtspunktes O.

Sie geben sich, wie es sein muß, durch den gemeinschaftlichen Fluchtpunkt als Parallelen zu erkennen.

Durch Angabe der Orthogonalprojektion A'' und des Tafelabstandes AA'' ist die Lage eines Punktes A gegen die Tafel π am einfachsten fixiert; in dieser Weise werden wir insbesondere den Gesichtspunkt O selber festlegen.

Sein Tafelabstand $d = OO''$ heißt die Distanz, der Kreis mit d als Radius um O'' als Mittelpunkt in der Bildebene π heißt Distanzkreis.

2. Dieser Kreis ist der Ort wichtiger Punkte:

> Auf dem Distanzkreise liegen nämlich die Fluchtpunkte der Geraden, die gegen die Bildebene unter einem Winkel von 45^0 geneigt sind;

denn der Sehstrahl $O\mathfrak{F}_t$ nach dem Fluchtpunkte $\mathfrak{F}_t$ einer solchen Geraden t ist als Parallele zu dieser Geraden selber unter 45^0 gegen π geneigt. Daher ist $OO''\mathfrak{F}_t$ ein bei O'' rechtwinkliges Dreieck, von dem ein und folglich auch der andere spitze Winkel einen halben

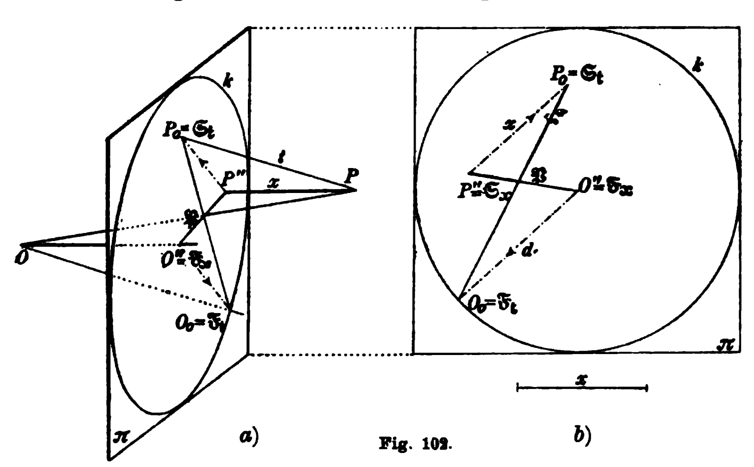


Fig. 102.

Rechten ausmacht. Daher ist $O''\mathfrak{F}_t = O''O = d$. In der Figur 102a) ist dieser Sachverhalt durch eine Skizze veranschaulicht, in 102b) sehen wir die Bildebene π in gerader Daraufsicht vor uns mit O'' und dem Distanzkreis.

3. Diese Figur erläutert ferner die Fundamentalkonstruktion der Perspektive:

> Der Gesichtspunkt O und ein beliebiger Punkt P sind durch Angabe ihrer Orthogonalprojektionen O'', P'' auf die Bildebene π und ihrer Tafelabstände $d = OO''$, $x = PP''$ gegen π festgelegt: man soll das Bild $\mathfrak{P}$ von P bestimmen.

Das geschieht durch Darstellung des Tafellotes $x = PP''$ und einer durch P gehenden 45^0-Linie. Der Spurpunkt von x ist P'', der Fluchtpunkt O'', das Bild also $P''O''$, siehe Figur 102b). Eine 45^0-Linie erhalten wir durch Umlegen von $x = P''P$ in die Ebene π, indem wir von P'' aus in π nach irgend einer von $P''O''$ verschiedenen Richtung $P''P_0 = x$ abtragen und P_0 mit P verbinden; dann ist $P_0P''P$ ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck und

$t = PP_0$ eine unter 45° gegen die Bildebene geneigte Gerade. Ihr Spurpunkt ist $\mathfrak{S}_t \equiv P_0$, ihr Fluchtpunkt $\mathfrak{F}_t = O_0$ liegt auf der durch O zu PP_0 gezogenen Parallelen, das Bild ist $P_0 O_0$. Die definitive Konstruktion sieht man in Figur 102b):

> Man trägt in der Bildebene π von P'' aus nach beliebiger, aber nicht durch O'' gehender Richtung die Strecke $P''P_0 = x$ ab und zieht zu ihr durch O'' und von O'' beginnend die Parallele in dem mit $P''P_0$ übereinstimmenden oder dazu entgegengesetzten Sinne, je nachdem der Punkt P auf derselben oder auf der entgegengesetzten Seite von π liegt wie O. Diese Parallele trifft den um das Zentrum O'' mit dem Radius d beschriebenen Distanzkreis in einem Punkte O_0, dessen Verbindungsgerade mit P_0 die Gerade $P''O''$ in $\mathfrak{P}$ schneidet.

Unter der normalen Voraussetzung der Malerei, daß das Objekt P vom Gesichtspunkt O aus betrachtet hinter der Bildebene liegt, haben die parallelen Strecken $P''P_0$ und $O''O_0$ stets entgegengesetzten Sinn.

Hätte man in Figur 102a) die Strecke P_0P'' auf $O''P''$ senkrecht angenommen, so könnte die Figur 102b) als durch Umklappung der starren Figur $OO''P''PO$ entstanden, angesehen werden; O_0P_0 wäre dann der umgeklappte Sehstrahl OP. Ist P_0P'' auf $O''P''$ nicht senkrecht, so fällt $OO''P''PO$ beim Umklappen auch nicht auf die in der Ebene π verzeichnete Figur; man mag aber bei Betrachtung der Figur 102b) immerhin an jene Umklappung denken, um sich den Sinn der Pfeile $P''P_0$ und $O''O_0$ gut einzuprägen. Denn auf dem anschaulichen Verständnis der Figur 102b) beruht die ganze geometrische Perspektive.

4. Wenn diese Figur eine so geringe räumlich plastische Wirkung ausübt, so liegt das daran, daß sie der frei rekonstruierenden Phantasie zu wenig Stützen bietet; ein Punkt und zwei Geraden sind ein zu dürftiger Gegenstand. Es genügt aber, wie die folgenden Figuren zeigen, den bescheidensten architektonischen Gegenstand mit ins Bild zu übernehmen, um den Linien dieser abstrakten Konstruktionsfigur Leben zu verleihen. Bei diesen Anwendungen benutzen wir außer den Tafelloten und 45°-Linien noch eine dritte häufig vorkommende Schar gerader Linien, nämlich die Tafelparallelen, d. h. die zur Bildebene parallelen Geraden.

> Eine Tafelparallele ist stets auch zu ihrem Bilde parallel,

denn beide Geraden treffen sich im Spurpunkt, und dieser liegt nach § 17, 6 unendlich fern; oder auch: beide Geraden liegen in einer

durch den Gesichtspunkt gehenden Ebene, und diese trifft die Bildebene π, da die gegebene Gerade zu π parallel ist, in einer zu dieser Geraden parallelen Geraden. Daraus folgt weiter:

Untereinander parallele Tafelparallelen erscheinen auch im Bilde als Parallelen.

5. Jetzt bietet das Verständnis der Figur 103 keine Schwierigkeiten mehr: Eine aus gleichgroßen Quadern gebildete Mauer, die längs einer vertikalen Kante k rechtwinklig um die Ecke geht, soll auf einer Bildebene π perspektivisch dargestellt werden, die mit der (vertikalen) Oberfläche des links von k liegenden Mauerteils identisch ist. Die Figur ist entweder verkleinert wiederzugeben, oder man stellt sich vor, was der Anschaulichkeit wegen vorzuziehen ist, daß nur ein verkleinertes Modell der Mauer abgebildet werden soll. Der Gesichtspunkt O sei festgelegt durch Angabe seiner Orthogonalprojektion O'' und des Distanzkreises. Um also die Figur 103 vom richtigen Gesichtspunkte O aus zu betrachten, errichte man, dem Augenmaß nach, auf der Druckseite in O'' nach oben das Lot und mache es gleich dem Radius des Distanzkeises, sein Endpunkt ist dann O.

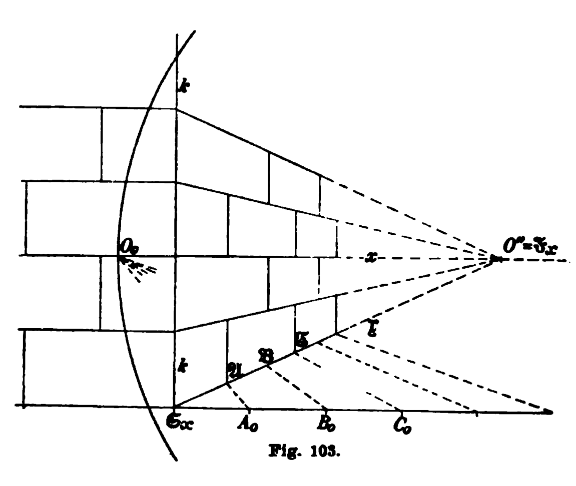


Fig. 103.

6. Da der links von k liegende Mauerteil mit seiner Oberfläche in die Bildebene fällt, so erscheinen dort die Vorderflächen der Quader in ihrer natürlichen Gestalt und können ohne weiteres abgebildet werden. Die Fläche des rechten Mauerteils dagegen steht auf der Bildebene senkrecht, die wagerechten Mauerfugen sind also Tafellote und ihre Bilder gehen folglich durch O''. Sie können also eingezeichnet werden. Jetzt kommt es nur noch auf die Abbildung der lotrechten Mauerfugen an. Diese sind nach 5. auch im Bilde zu k parallel und werden also bestimmt sein, sobald man die Bilder $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ ihrer Schnittpunkte $A, B, C, \ldots$, mit der untersten wagerechten Fuge hat.

Diese legen wir aber einfach mit Hilfe der Figur 102 in die Bild-

ebene um, und zwar, um Linien zu sparen, auf die (verlängerte) unterste wagerechte Fuge des linken Mauerteils. Da in der Figur 103 der Punkt O' selber auf einer wagerechten Fuge dieses Mauerteils angenommen ist, so fällt auch $O''O$ nach der Umlegung auf diese Fuge und O kommt, als O_0, auf den Distanzkreis zu liegen. Die Punkte $A_0, B_0, C_0, \ldots$ sind jetzt einfach im Abstand der am linken Mauerteil auftretenden Vertikalfugen abzutragen, worauf $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ durch die Geraden O_0A_0, O_0B_0, $O_0C_0, \ldots$, die Bilder gewisser 45^0-Linien, bestimmt werden. Die Dreiecke $A_0\mathfrak{S}_x\mathfrak{A}$, $B_0\mathfrak{S}_x\mathfrak{B}$, $C_0\mathfrak{S}_x\mathfrak{C}, \ldots$ sind die Bilder rechtwinkeliger und zugleich gleichschenkeliger Dreiecke, die außer dem rechten Winkel nur noch Winkel von 45^0 haben. An der Hand der Figur 103 wird nun auch das anschauliche Verständnis der Figur 102 keine Schwierigkeiten mehr bereiten.

7. Zur Darstellung mittels der Tafellote eignen sich besonders solche architektonische Gegenstände oder Modelle, die im wesentlichen durch parallele Geraden bestimmt sind, z. B. Einblicke in Zimmer, Straßen, Tunnels, falls die Bildebene π auf der Richtung dieser Parallelen senkrecht angenommen wird. Man spricht dann wohl von gerader Ansicht. Um die zur Konstruktion 102 erforderliche Längenmessung der Tafellote bequem vornehmen zu können, empfiehlt es sich, die Perspektive an geeigneten leicht zugänglichen Modellen einzuüben. Ein ganz vorzügliches sorgfältig abgestuftes Übungsmaterial bieten die bekannten Steinbaukasten von F. Ad. Richter & Co., Rudolstadt. Gleichzeitig lernt der Nichtmathematiker aus den beigegebenen Grundrißheften soviel von der Darstellungsweise dieser Risse, als wir im folgenden voraussetzen müssen, um uns vom Gebrauch der Modelle ganz frei zu machen. Zur Unabhängigkeit von Modellen nötigt noch ein anderer Grund.

An den Baumeister tritt oft die Aufgabe heran, von einem Bauwerk, daß er sorgfältig in Grundriß und Aufriß entworfen hat, ein perspektivisches Bild anzufertigen, um die künstlerische Wirkung des Gebäudes besser beurteilen zu können. Da ist man also von vornherein auf Grund- und Aufriß angewiesen. Da der Aufriß fast nur zur Entnahme von Höhen über dem Grundriß dient, so ist für das Verständnis derartiger Konstruktionen eine tiefere Kenntnis des Zweitafelsystems meist nicht erforderlich.

8. Die Figur 104 wird noch ohne Beigabe eines Grundrisses verständlich sein. Aus einer rechteckigen Längshalle mit gewölbter Decke ist die Stirnwand $ABCDE$ herausgenommen, um einen Einblick zu ermöglichen. Ihre (durchsichtig gedachte) Ebene dient als Zeichenebene. Der Gesichtspunkt ist durch Angabe der Orthogonal-

projektion O'' und (eines Stückes) des Orthogonalkreises kenntlich gemacht. Der Lernende wird gebeten, für den Anfang die Betrachtung der Figur aus dem richtig rekonstruierten Punkte O nicht zu unterlassen, der im Abstande $O''O_0$ senkrecht über O liegt. Durch die Stellung der Bildebene π senkrecht zu der Richtung des prismatischen Raumes werden seine Längskanten zu Tafelloten; ihre Bilder gehen also durch O''. Die Länge der Halle sei gleich der dreifachen Breite AB. Es gilt also, auf der durch $\mathfrak{a} \equiv AO''$ dargestellten Kante die Länge $3 \cdot \overline{AB}$ abzutragen. Das leistet wieder die Fundamentalkonstruktion

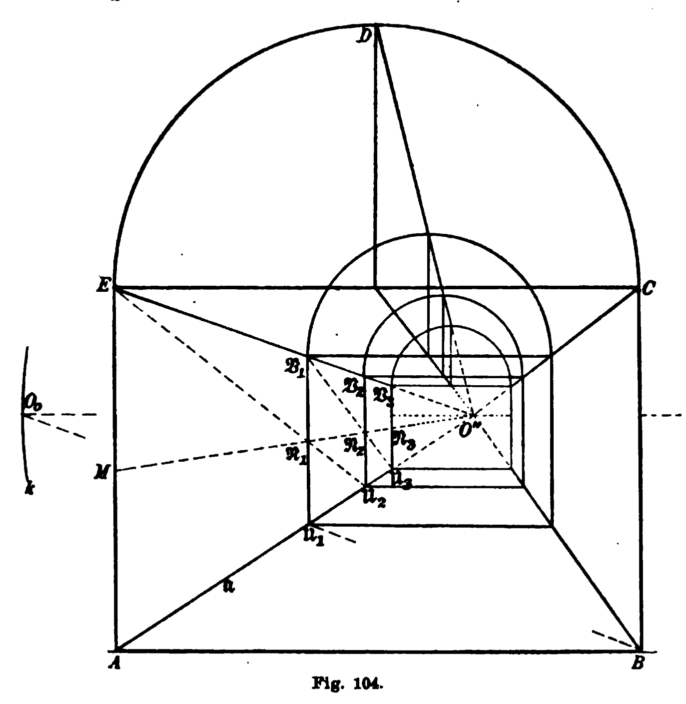


Fig. 104.

der Figur 102, indem man diese Kante um ihren Spurpunkt A in die Bildebene legt, und zwar am einfachsten gleich auf AB; dann fällt $O''O$ auf die durch O'' zu AB nach links gezogene Parallele, und zugleich natürlich auf den Distanzkreis. Jetzt müßte man auf AB von A aus nach rechts $AU_3 = 3 \cdot AB$ abtragen und den Schnittpunkt $\mathfrak{U}_3$ von O_0U_3 mit AO'' bestimmen. Das wäre dann der gesuchte Endpunkt der Kante $\mathfrak{a}$. Der Punkt U_3 würde aber außerhalb des Raumes fallen, auf den wir uns mit Absicht beschränken wollen, und so müssen wir uns auf andere Weise helfen.

Zunächst bringen wir O_0B selber mit AO'' zum Schnitt. Dann bestimmt den Schnittpunkt $\mathfrak{U}_1$ zusammen mit A eine Strecke, die in



natura gleich AB ist. Diese soll nun perspektivisch noch zweimal auf $\mathfrak{a}$ abgetragen werden um $\mathfrak{U}_3$ zu finden, es sollen also $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_3$ so bestimmt werden, daß $AU_1 = U_1U_2 = U_2U_3$ wird. Mit anderen Worten: es sollen $A, \mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3$ Bilder von sukzessiven Punkten einer Reihe äquidistanter Punkte sein, eine Aufgabe, die sich unter anderen auch bei der Abbildung getäfelter Decken oder Fußböden darbietet; zur Lösung versehen wir denn auch die darzustellende linke Wand AU_3V_3E mit einer Art von Täfelung, die in Figur 105 verkleinert abgebildet ist. Durch die Parallelen AE, U_1V_1, U_2V_2, U_3V_3 zerfällt die ganze Wand in drei gleiche Rechtecke, deren jedes durch die Gerade MN_3, die die Mitten von AE und U_3V_3 verbindet, noch einmal halbiert wird. Wegen der Kongruenz dieser 6 Rechtecke ist die Diagonale EN_1 von EMN_1V_1 auch Diagonale von $N_1U_1U_2N_2$; ebenso geht die Gerade V_1N_2 auch durch U_3. Diese Rechtecke nebst Diagonalen werden nun einfach mit in die Abbildung aufgenommen: Zunächst bestimmt man den Mittelpunkt M von AE und verbindet ihn mit O''. Diese Gerade ist dann das Bild von MN; sie trifft die durch U_1 zu AE gezogene Parallele $\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_1$ in $\mathfrak{N}_1$, und $E\mathfrak{N}_1$ trifft $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{U}_2$; die durch $\mathfrak{U}_2$ zu AE gezogene Parallele $\mathfrak{U}_2\mathfrak{V}_2$ trifft MO'' in $\mathfrak{N}_2$, und $\mathfrak{V}_2\mathfrak{N}_2$ trifft $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{U}_3$. Damit ist die Hilfsaufgabe gelöst.

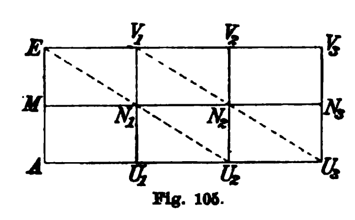


Fig. 105.

Um die perspektive Raumeinteilung schärfer hervorzuheben, ist durch die Kanten U_1V_1, U_2V_2, U_3V_3 je ein zur Bildebene paralleler Querschnitt des Saales gelegt und abgebildet, wodurch der ganze Raum in drei kongruente Teile zerlegt wird. Auch ist ein Stützwerk des Gewölbes eingezeichnet, dessen Konstruktion wohl ohne weiteres aus der Figur verständlich ist.

§ 19. Eine zusammengesetzte Aufgabe.

1. Aus der Begrenztheit des Zeichenblattes, der Kürze der Lineale und Zirkel, sowie aus den Forderungen des bequemen und genauen Konstruierens ergeben sich beim perspektivischen Zeichnen zahlreiche Abänderungen der Fundamentalkonstruktion und kleine Hilfsaufgaben, deren Lösung sich den jedesmal gegebenen Verhältnissen anzupassen hat. Dabei sollte man in erster Linie stets nach den Hilfen sehen, die sich aus der besonderen Natur des abzubildenden Gegenstandes selber gewinnen lassen. Wenn z. B. an einem architektonischen Objekte eine quadratische Platte vorkommt, auf der eine zweite größere oder kleinere ruht, so decken sich die aufeinander fallenden Quadrate oft

auch in den Diagonalen; es empfiehlt sich dann, auch die Diagonalen mit abzubilden, wenn auch nur als Hilfslinien. Ferner achte man darauf, welche Kanten und Linien des Objektes in einer und derselben Ebene liegen, speziell in einer zur Zeichenfläche π parallelen Ebene. Es treten dann Vereinfachungen der Fundamentalkonstruktion ein, die wir noch zu untersuchen haben, und häufig läßt sich die Zahl der Anwendungen dieser Konstruktion bedeutend verringern, z. B. in Figur 106 von einigen sechzig auf knapp ein Dutzend.

2. Es sei nun insbesondere eine Figur $ABCD\ldots$ darzustellen, die ganz einer zur Bildebene π parallelen Ebene σ angehört; σ möge, den Verhältnissen der praktischen Malerei entsprechend, hinter π liegen und zwar im Abstande s. Dann haben die Punkte $A, B, C, \ldots$ von ihren Orthogonalprojektionen A'', B'', C'', . auf π je denselben Abstand s und sind aus A'', B'', C'', ... und s eindeutig rekonstruierbar. Die von den Punkten A'', B'', C'', .. gebildete Figur ist aber zu der in σ gegebenen Figur $ABC\ldots$ kongruent, diese fällt auf jene, wenn man σ parallel zu sich um die Strecke s näher schiebt (immer von O aus beurteilt). Außer den Punkten A, B, C, ... bilden wir nun auch ihre Tafellote AA'', BB'', CC'', ... perspektivisch ab. Die Bilder $\mathfrak{A}A''$, $\mathfrak{B}B''$, $\mathfrak{C}C''$, ... dieser Lote gehen nach § 18, 1 durch die Orthogonalprojektion O'' des Gesichtspunktes O, während die Punkte A'', B'', C'', ... als Punkte der Bildebene π je mit dem eigenen Bilde zusammenfallen. Nun ist aber jede Strecke AB in σ einerseits zu ihrer Orthogonalprojektion $A''B''$, andererseits nach § 18, 4 zu ihrem Bilde $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ parallel. Daher besteht in der Zeichenebene π zwischen den Punkten A'', B'', C'', ..., die wir uns nebst der Strecke

$$s = AA'' = BB'' = CC'' = \cdots$$

gegeben denken, und den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... folgende Beziehung der Ähnlichkeit bei ähnlicher Lage:

I. Jedem Punkte A'' entspricht ein bestimmter Punkt $\mathfrak{A}$ und umgekehrt.

II. Die Verbindungsgerade je zweier zugeordneter Punkte geht durch O''.

III. Beschreibt A'' eine Gerade a'', so beschreibt $\mathfrak{A}$ eine dazu parallele Gerade $\mathfrak{a}$.

Diese Beziehung ist festgelegt, sobald man zu einem Punkte A'' den zugeordneten Punkt $\mathfrak{A}$ kennt, vorausgesetzt, daß O'' gegeben ist.

Denn um zu einem beliebigen Punkte B'' den zugehörigen $\mathfrak{B}$ zu finden, hat man zu beachten, daß $\mathfrak{B}$ erstens auf $B''O''$ und zweitens auf der Parallelen durch $\mathfrak{A}$ zu $A''B''$ liegt, wodurch $\mathfrak{B}$ bestimmt ist. Es genügt also zur Darstellung der ebenen Figur $ABCD\ldots$ eine einmalige Anwendung der Fundamentalkonstruktion, um zu A den Bildpunkt $\mathfrak{A}$, zu A'' also den zugeordneten Punkt $\mathfrak{A}$ zu finden.

3. Einem Dreieck $A''B''C''$ entspricht ein Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ derart, daß $A''B'' \parallel \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $B''C'' \parallel \mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $C''A'' \parallel \mathfrak{C}\mathfrak{A}$ ist. Beide Dreiecke haben daher an entsprechenden Ecken dieselben Winkel, ist das eine also gleichschenkelig, so ist es auch das andere. Allgemein können wir also sagen:

In der Beziehung der Ähnlichkeit bei ähnlicher Lage einander zugeordnete Figuren stimmen in sämtlichen einander zugeordneten Winkeln überein.

Wir beweisen ferner:

Zwei gleichen Strecken $A''B''$ und $C''D''$ sind zwei gleiche Strecken $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ zugeordnet.

Ist nämlich X'' ein Punkt, der weder auf der Geraden $A''B''$, noch auf der Geraden $C''D''$ liegt, und zieht man $X''Y''$ gleich und parallel $A''B''$, $X''Z''$ gleich und parallel $C''D''$, so sind $A''B''Y''X''$ und $C''D''Z''X''$ stets zwei Parallelogramme. Nach III. sind ihnen ebenfalls zwei Parallelogramme $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{Y}\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{Z}\mathfrak{X}$ zugeordnet, daher ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{D} = \mathfrak{X}\mathfrak{Z}$. Entweder werden nun die gleichen Strecken $X''Y''$, $X''Z''$ zusammenfallen, dann tun es auch $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{X}\mathfrak{Z}$, woraus sofort $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$ folgt; oder es ist $Y''X''Z''$ ein gleichschenkeliges Dreieck. Damit ist auch $\mathfrak{Y}\mathfrak{X}\mathfrak{Z}$ gleichschenkelig, also $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}\mathfrak{Z}$ und nach dem Vorangehenden: $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$.

Damit ist der Satz bewiesen. Ein besonderer Fall davon ist:

Einem Kreise entspricht wieder ein Kreis, zwei gleichen Kreisen entsprechen zwei gleiche Kreise.

Die Abbildung der Ebene σ ist hiernach sehr leicht auszuführen, die Ähnlichkeitslehre würde noch manche Handhabe geben, wir wollen jedoch keinen Gebrauch davon machen.

4. Nach diesen Vorbereitungen stellen wir uns folgende Aufgabe: Die ebene Decke eines Saales von quadratischem Grundriß soll mit einem Gemälde geschmückt werden, das von der Mitte des Saales, genauer von einem bestimmten Gesichtspunkte O aus gesehen den Eindruck macht, als setzten sich die Saalwände samt ihrer architektonischen Gliederung noch durch ein Stockwerk fort.

Dieses fingierte Stockwerk, das für sich wieder als ein Saal, der „obere Saal", betrachtet werden kann, dem allerdings der Boden fehlt, sei durch Grundriß und Aufriß gegeben; ferner die genaue Lage des Gesichtspunktes O durch seine Orthogonalprojektion O'' auf die Zimmerdecke und durch die Distanz $d = OO''$.

Wie erreicht der Maler die beabsichtigte perspektivische Täuschung?

Wir können antworten: Prinzipiell, indem er den gedachten oberen Saal auf der Zimmerdecke perspektivisch darstellt mit O als Gesichtspunkt. Es gilt nur, die allgemeinen Gesetze der Perspektive den besonderen Verhältnissen der Aufgabe anzupassen.

5. Denken wir uns die Decke des Saales als eine (durchsichtige) Bildebene π mit dem oberen Saale starr verbunden, desgleichen das Lot OO'' auf π, so können wir uns vor allem die Betrachtung des oberen Saales bequemer machen, indem wir ihn umgekippt denken, so daß die Ebene π in vertikale, die Gerade OO'' in horizontale Lage kommt. Wir blicken dann von O aus durch π in einen rechteckigen Raum, dessen an π stoßenden Flächen mit einer architektonischen Gliederung versehen sind, die allerdings einen wunderlichen Eindruck machen wird. Aber im ganzen ist es doch eine Figur vom Typus der Figur 104, deren Darstellung uns keine besonderen Schwierigkeiten bereiten wird. Hat man einmal die Einsicht gewonnen, daß einfach die Konstruktionsgesetze der vorangehenden Figuren einzugreifen haben, so steht nichts mehr im Wege, die Ebene π in ihrer natürlichen Lage als Decke des gegebenen Saales zu belassen. Jedenfalls wollen wir, um keine Verwirrung aufkommen zu lassen, die Ausdrücke horizontal und vertikal gebrauchen, wie sie dem fingierten oberen Saale in seiner natürlichen Lage zukommen würden.

6. Da wir die vier Wände des oberen Saales als architektonisch gleich behandelt voraussetzen wollen, so genügt die Darstellung einer Hälfte des Saales. Ihr Grundriß ist in Figur 106a) durch den äußeren Rand dieser Figur gegeben; die obere Abschlußlinie der Figur ist die Halbierungslinie des Gesamtgrundrisses, O'' also der Mittelpunkt des vollständigen Grundrisses und zugleich Orthogonalprojektion von O. Die Strecke $O''D$ ist die Distanz d. Daß diese gleich der halben Quadratseite ist, wird übrigens nirgends benutzt. Auf dem gegebenen halben Grundrisse nun erheben sich vier Halbsäulen und zwei Viertelsäulen (in den Ecken), die oben die Decke stützen. Alle sechs Säulen sind, wenn man sie vervollständigt denkt, vollkommen gleich; in Figur 106b sieht man eine umgelegte halbe Säule im Aufriß, in Figur 106c ist der Grundriß ihres Aufsatzes detailliert. Die Säule



Fig. 106.

steht auf einem mit einer Platte abgedeckten Sockel von quadratischem Grundriß und ist aus sechs gleich großen Trommeln aufgebaut. Die Säulenachse wird von den horizontalen Oberflächen des Sockels, der Platte, der Trommeln und der Bestandteile des Aufsatzes in den Punkten $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_9, A_{10}$ getroffen, die in Figur b eingetragen sind.

7. Da von allen Säulen die Ecksäulen im Bilde am längsten ausfallen werden, so beginnt man die Darstellung am besten an einer Ecksäule, etwa an der linken Säule II. Die von dieser Säule an die anderen herübergenommenen Maße werden dann verkleinert und damit ihre unvermeidlichen Fehler. Das Bild der Achse der Säule II ist durch O'' und den Spurpunkt $A \equiv \mathfrak{A}$ festgelegt. Um die Bilder $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ von $A_1, A_2, \ldots$ zu erhalten, wird die Achse unter Anwendung der Fundamentalkonstruktion des § 18 einfach auf die Seite AE des halben Grundrißquadrates umgelegt. Der Punkt O fällt dann auf D. Die Achse der Säule wird nebst ihren Teilpunkten auf AE abgetragen. Die Strahlen (in Figur a strichpunktiert) von D nach diesen Punkten treffen AO'' in $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{10}$.

8. Nun werden die Sockel dargestellt. Die Bilder der Vertikalkanten gehen durch O'' und durch die Eckpunkte der Grundrisse. Die oberen Grenzflächen sämtlicher Sockel liegen in einer zu π parallelen Ebene, die von π den Abstand AA_1 hat, sind also im Bilde nach 6. halbierte Quadrate, deren Diagonalen zu denen des Grundrisses parallel laufen. Diese Diagonalen legen die Ecken der betreffenden Flächen auf den Vertikalkanten fest. Zur Konstruktion der Platte auf Sockel III ist in Figur a) bei III der Grundriß AA_{10} zur Diagonale der Platte (nach Figur c) eingezeichnet, die Mittelpunkte $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ der unteren und oberen Grenzfläche der Platte sind von der Säule II herübergenommen mittels Parallelen zu AE. Durch $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ gehen dann die Bilder der Diagonalen der unteren und oberen Plattenfläche parallel zu AA_{10} und treffen $O''\mathfrak{A}_{10}$ in zwei Eckpunkten der Platte, von denen aus dann die ganze Platte konstruiert ist. Bei der Anlage der Figur müssen natürlich auch die im definitiven Bild unsichtbaren Kanten eingetragen werden.

9. Die zylindrischen Säulen denken wir uns durch den Sockel bis auf die Bodenfläche π fortgesetzt; dann ruht z. B. die Säule III auf π mit kreisförmiger Grundfläche, die aus Figur c) entnommen und bei III eingetragen ist. Der Kreis berührt übrigens den quadratischen Grundriß des Sockels. Die geraden Linien der Säule bilden sich, da sie auf der Bildebene senkrecht stehen, als Geraden durch O''



nach den Punkten des Basiskreises ab. Die Tangenten von O'' an diesen Kreis bestimmen den Umriß der vollen Säule. Da aber die Säulen I und III zur Hälfte in der Wand stecken, kommt bei III nur die Tangente an den dort eingetragenen Halbkreis in Betracht, die andere Umrißlinie ist die Fortsetzung der Sockelkante. Bei den Ecksäulen, z. B. bei V, wird der Umriß natürlich auf beiden Seiten durch die Verlängerungen von Sockelkanten gebildet.

10. Zur Erhöhung der Anschaulichkeit sind die Lagerfugen der Säulentrommeln ebenfalls abgebildet. Entsprechende, d. h. in derselben Parallelebene zu π enthaltene, Lagerfugen sämtlicher Säulen erscheinen als Kreise mit gleichem Radius (nach 6), deren Mittelpunkte bei II als $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ konstruiert sind und von dort auf die anderen Säulen übernommen werden (siehe bei I und II in Figur a). Auch die Lagerfugen der aus Quadern gebildeten Mauern sollen durch $A_1, A_2, \ldots$, im Bilde also durch $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ gehen. Die Oberflächen der Quader und Säulentrommeln liegen also jedesmal in derselben Ebene. Daraus ergibt sich bei den Ecksäulen eine Kontrolle der Zeichnung. Dort müssen nämlich, wie in Figur a bei Säule V zu ersehen ist, die Lagerfugen des Mauerwerks mit denen der Trommeln an den Grenzlinien des Säulenschaftes aneinanderstoßen.

11. Die Konstruktion des Säulenaufsatzes ist in Figur a bei der Säule III zu ersehen. Für das Gesimse, dem sich die Sockelplatten einfügen, ist vereinbart, daß es ebenso weit aus der Wand hervorragen soll, als die Sockelplatten über den Sockel greifen. Dann müssen auch die Bilder der Kanten des Gesimses in denselben Abständen aufeinander folgen wie beim Bilde des Sockels; die Konstruktion ist also sehr einfach. Damit ist die Aufgabe erledigt.

§ 20. Die Normalebenen der Bildebene.

1. Die Körper, die wir bis jetzt dargestellt haben, zeichnen sich durch das Vorherrschen einer Kantenrichtung aus, auf der wir die Bildebene senkrecht stehen ließen, um diese Kanten zu Tafelloten zu machen und mittels der Fundamentalkonstruktion abzubilden. Gibt man der Bildebene eine andere Stellung, oder tritt an dem Körper überhaupt keine Kantenrichtung hervor, so würde man zwar immer die Tafellote durch die wichtigsten Eckpunkte als Hilfslinien einführen können, brächte damit aber leicht zu viel Linien in die Konstruktion. Zweckmäßiger ist es, sich in diesem Falle nach Ebenen umzusehen, die auf der Bildebene π senkrecht stehen und zugleich

an dem abzubildenden Gegenstande von Bedeutung sind, und diese Ebenen als Ganzes abzubilden. Von einer solchen Ebene wollen wir, den Verhältnissen der praktischen Malerei entsprechend nur die von O aus gesehen hinter π liegende Hälfte in Betracht ziehen und eine der beiden Seiten dieser Halbebenen als ihre Schauseite bezeichnen; handelt es sich um eine Wand, Decke oder einen Fußboden, so wird man natürlich unter der Schauseite die einzige sichtbare Seite dieser ebenen Flächen verstehen; die Schauseite der Zeichenebene π sei die von O aus angeschaute. Ist nun η eine auf π senkrechte Halbebene, die hinter π verläuft, so läßt sie sich um ihre Schnittgerade s_η mit π, ihre Spur, nach zwei Richtungen umklappen, bis sie auf π fällt; nämlich entweder direkt, so daß die Schauseite von η

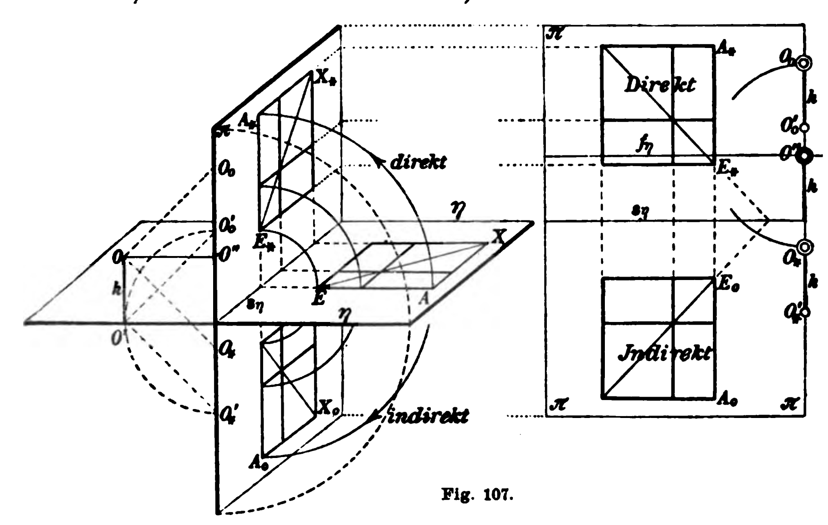


Fig. 107.

auf die Rückseite von π fällt oder indirekt, so daß die Rückseite von η auf die von π zu liegen kommt. Sind auf der Schauseite von η irgend welche Figuren verzeichnet, und ist π durchsichtig, so sieht man von O aus bei direkter Umklappung die Figuren in ihrer wirklichen Gestalt, bei indirekter Umklappung aber nur, wenn auch η durchsichtig ist, und dann spiegelbildlich verkehrt. Dieser Sachverhalt wird durch die Figuren 107a) und b) erläutert; Figur 107b) zeigt das Ergebnis der beiden Umklappungen; aus dem Punkt A der Figur geht durch direkte Umklappung A_*, durch indirekte A_0 hervor.

Legt man noch durch den Gesichtspunkt O zu AA_* und AA_0 die Parallelen OO_* und OO_0, so können wir sagen:

Jeder Punkt X von η fällt durch direkte oder indirekte Umklappung von η auf einen Punkt X_* oder X_0

der Bildebene π, derart, daß alle Geraden XX_* parallel zu OO_* verlaufen, alle Geraden XX_0 parallel zu OO_0. Nur von den Punkten der Spur s_η entspricht jeder bei beiden Arten der Umklappung sich selbst.

Wir nennen O_* den direkten, O_0 den indirekten Drehpunkt der Ebene η.

2. Nach dieser Vorbereitung läßt sich das Prinzip der Abbildung von η auf π so aussprechen:

Um die Punkte von η durch Umlegen ihrer Tafellote mittels der Fundamentalkonstruktion des § 18 auf π abzubilden, werden die Tafellote, die ja sämtlich in der Ebene η enthalten sind, nicht jedes für sich und in beliebiger Richtung umgelegt, sondern man klappt gleich die ganze Ebene η um. Den unendlich vielen Umlegungen von Tafelloten, die so auf einen Schlag erzielt werden, entspricht eine und dieselbe Umlegung $O''O_*$ oder $O''O_0$ von $O''O$, je nachdem die Umklappung von η direkt oder indirekt ist.

Damit ist das ganze Konstruktionsverfahren gegeben; es ist auch unmittelbar aus dem Schlußergebnisse von 1. abzulesen, wenn man beachtet, daß

O_* der Fluchtpunkt, X_* der Spurpunkt der 45°-Linie XX_*,
O_0 „ „ X_0 „ „ „ „ XX_0

ist:

Der Bildpunkt $\mathfrak{X}$ von X liegt hiernach

mit X_* und O_* in einer Geraden, dem Bilde von XX_*,
„ X_0 „ O_0 „ „ „ „ „ „ XX_0.

und könnte als Schnittpunkt dieser Geraden gefunden werden. Wir ziehen aber noch die Tafellote heran: Ist x das Lot aus X auf π und $\mathfrak{S}_x$ sein Spurpunkt, so gehen durch diesen auch die Geraden x_* und x_0, auf die x durch direkte oder indirekte Umklappung von η zu liegen kommt. Das Bild $\mathfrak{x}$ von x ist die Gerade $\mathfrak{S}_x O''$ und ist ein weiterer Ort für $\mathfrak{X}$, der in Verbindung mit einer der Geraden X_*O_* oder X_0O_0 den Punkt $\mathfrak{X}$ bestimmt.

3. Das hieraus sich ergebende Konstruktionsverfahren wollen wir auf Fig. 107 anwenden, jedoch unter einer unwesentlichen Abänderung der darzustellenden ebenen Figur aus Gründen der Deutlichkeit. Gegeben sei:

a) die Lage des Gesichtspunktes durch seine Orthogonalprojektion O'' auf π und durch den Distanzkreis $\varkappa$;

b) die der Halbebene η angehörige Figur $ABCEFG$ durch eine ihrer Umklappungen um die Spurlinie s_η von η.

In Figur 108 ist sowohl die direkte Umklappung $A_* B_* C_* E_* F_* G_*$ gegeben, die ganz auf die rechteckig begrenzte Fläche π fällt, als auch die indirekte $A_0 B_0 C_0 E_0 F_0 G_0$, die eine Verlängerung η_0 von π erfordert, dafür aber die Bildfläche für das Bild frei läßt. Das Lot von O'' auf s_η trifft den Distanzkreis $\varkappa$ oben im indirekten Drehpunkt O_0, unten im direkten O_*, wozu Figur 107 zu vergleichen ist.

Zu dem Bilde $\mathfrak{A}$ von A verhelfen uns jetzt drei verschiedene Konstruktionen:

α) Man verbindet den Fußpunkt $\mathfrak{S}_x$ des aus A_* auf s_η gefällten Lotes x_* mit O'' und bringt diese Gerade mit $A_* O_*$ zum Schnitt (direkte Umklappung);

β) man verbindet den Fußpunkt $\mathfrak{S}_x$ des aus A_0 auf s_η gefällten Lotes x_0 mit O'' und bringt diese Gerade mit $A_0 O_0$ zum Schnitt (indirekte Umklappung);

γ) man bringt $A_* O_*$ mit $A_0 O_0$ zum Schnitt (kombiniertes Verfahren).

Fig. 108.

Das Verfahren γ) ist in Figur 108 nicht gezeigt, weil die Linie $\mathfrak{S}_x O''$ als Bild der Geraden ABC nicht zu entbehren ist; die Methode α) ist bei $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ angewandt, β) bei $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$. Dem Vorzug der Methode β), die Bildebene π von der umgeklappten Figur $A_0 B_0 C_0 E_0 F_0 G_0$ frei zu lassen, steht der Nachteil der großen Verbindungslinien $O_0 G_0$, $O_0 F_0$, $O_0 E_0$ usw. gegenüber, wozu bei $O_0 C_0$, $O_0 B_0$, $O_0 A_0$ die spitzwinkligen Schnitte mit $\mathfrak{S}_x O''$ kommen würden; auch erfordert das Verfahren bei großen Bildern ein sehr großes Reißbrett, an dem nicht bequem zu arbeiten ist. Geringer ist der Mangel anzuschlagen, daß die Figur $A_0 B_0 C_0 E_0 F_0 G_0$ das Spiegelbild der wirklich gegebenen ist, denn man wird von dieser ohnehin eine Pause nehmen müssen, und diese gibt auf durchsichtigem Pausleinen ausgeführt auf ihrer Schriftseite die direkte, auf der Rückseite die indirekte Figur.

4. In Figur 108 ist noch eine Gerade f_η punktiert, die durch O'' zu s_η parallel läuft; sie würde in Fig. 107 a) der Schnitt von π mit der durch O gehenden Parallelebene zu η sein und als solche die Parallelen durch O zu den Geraden von η enthalten. Daher ist f_η die Fluchtlinie von η. Daß sie die Bilder der unendlich fernen Punkte von η enthält, würde anschaulicher hervortreten, wenn man η als mit quadratischen Platten belegten Fußboden oder als getäfelte Wand oder Decke eines Zimmers darstellte, was sowohl nach dem Beispiel der Figur 108 als auch einfacher nach der Methode des vorigen Paragraphen geschehen kann, falls die Kanten jener Plättchen oder der Täfelung teils zu π parallel, teils dazu senkrecht verlaufen.

5. Das Verfahren der Figur 108 führt uns nun noch weiter, indem es ermöglicht, gerade Linien von η als Ganzes in Perspektive zu setzen. Sei nämlich wieder in π gegeben:

a) Der Gesichtspunkt O durch seine Orthogonalprojektion O'' und den Distanzkreis $\varkappa$;

b) die auf π senkrechte Ebene η durch ihre Spur s_η und die Fluchtlinie f_η;

c) überdies die indirekte Umklappung p_0 einer in η gelegenen Geraden p, deren Bild $\mathfrak{p}$ bestimmt werden soll. (Figur 109.)

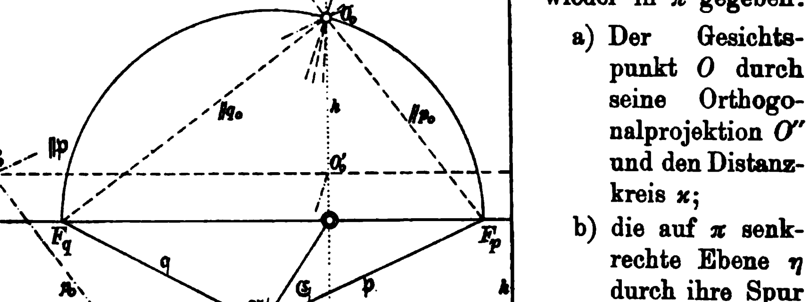


Fig. 109.

Der dieser Umklappung der Ebene η entsprechende Drehpunkt O_0 liegt wie in Fig. 108. Wir nehmen auf p_0 einen Punkt A_0 an und fällen aus A_0 auf s_η das Lot x_0. Dieses kann als Umklappung eines Tafellotes x betrachtet werden, dessen Spurpunkt $\mathfrak{S}_x$ im Schnittpunkt von x_0 mit s_η liegt. Das Bild $\mathfrak{x}$ von x ist die Gerade $\mathfrak{S}_x O''$; sie wird von $O_0 A_0$ im Bilde $\mathfrak{A}$ des Punktes A getroffen. Das ist nun ein Punkt, durch den das Bild $\mathfrak{p}$ der Geraden p gehen muß. Der

Schnittpunkt $\mathfrak{S}_p$ der Geraden p_0 mit s_η ist aber der Spurpunkt von p. Daher ist $\mathfrak{S}_p\mathfrak{A}$ das Bild $\mathfrak{p}$ von p.

6. Sind noch weitere Punkte $B, C, \ldots$ der Geraden p darzustellen, die durch ihre Umklappungen $B_0, C_0, \ldots$ auf p_0 gegeben seien, und wird die Gerade $\mathfrak{p}$ von den Geraden $O_0B_0, O_0C_0, \ldots$ in den Bildern $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ dieser Punkte getroffen, so entspricht jedem Punkte C_0 von p_0 ein Punkt $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{p}$, der mit dem Punkte C_0 auf einer Geraden durch O_0 liegt. Rückt C_0 auf p_0 ins Unendliche, so wird O_0C_0 zu p_0 parallel und trifft $\mathfrak{p}$ in einem Punkte $\mathfrak{F}_p$, dem Bilde des unendlich fernen Punktes von p. Der Ort aller unendlich fernen Punkte von η ist aber die Fluchtlinie f_η von η; auf dieser muß also der Fluchtpunkt $\mathfrak{F}_p$ von p liegen. Es folgt:

Der Fluchtpunkt $\mathfrak{F}_p$ jeder Geraden p der Ebene η liegt:

1. auf der Fluchtlinie f_η von η;
2. auf der Parallelen durch O_0 zur Geraden p_0 und und auch auf der Parallelen durch O_* zur Geraden p_*, die aus p durch indirekte oder direkte Umklappung hervorgehen.

Die einfachste Konstruktion des Bildes $\mathfrak{p}$ von η ergibt sich also durch Verbindung des Spurpunktes und Fluchtpunktes von p, falls diese Punkte auf das Blatt fallen; sonst müßte man zwei beliebige Punkte von p darstellen und die Verbindungslinie ihrer Bilder ziehen.

7. Wir stellen noch eine zweite in η verlaufende Gerade q durch den Punkt A dar, die durch indirekte Umklappung von η in q_0 übergehe; die Gerade q_0 können wir uns willkürlich geben, natürlich so, daß q_0 durch A_0 geht. Ist $\mathfrak{S}_q$ der Schnittpunkt von q_0 mit s_η, $\mathfrak{F}_q$ der Schnittpunkt der durch O_0 zu q_0 gezogenen Parallelen mit f_η, so ist $\mathfrak{S}_q\mathfrak{F}_\eta$ das Bild $\mathfrak{q}$ von q. Da die Geraden $O_0\mathfrak{F}_p$, $O_0\mathfrak{F}_q$ als Parallelen zu p_0 und q_0 konstruiert sind, so bilden sie auch dieselben Winkel wie p_0, q_0 und wie p, q selber, also:

Hat man eine auf der Bildebene normale Ebene η in die Bildebene geklappt, so schließen die Verbindungsgeraden des zugehörigen Drehpunktes mit den Fluchtpunkten $\mathfrak{F}_p$, $\mathfrak{F}_q$ zweier Geraden p, q der Ebene η dieselben Winkel ein wie die Geraden p, q selber, stehen also aufeinander senkrecht, wenn auch p und q aufeinander senkrecht stehen.

Ist das Bild $\mathfrak{p}$ von p gegeben, und errichtet man auf der Verbindungsgeraden des Fluchtpunktes $\mathfrak{F}_p$ mit einem der Drehpunkte in diesem Punkte (und in der Ebene π) das Lot, so trifft dieses die

Fluchtlinie f_η von η im Fluchtpunkte $\mathfrak{F}_q$ aller in η gelegenen oder zu η parallelen Lote q auf p, d. h. jede Gerade $\mathfrak{q}$ durch $\mathfrak{F}_q$ in der Bildebene kann als Bild einer bestimmten auf p senkrechten Geraden q angesehen werden, die in η liegt oder zu η parallel ist. In Fig. 109 ist q als Lot von p in η angenommen.

8. Bis jetzt haben wir immer nach dem Bild des unendlich fernen Punktes einer Geraden gefragt; jetzt sei in Figur 109 umgekehrt der Punkt P_0 der Geraden p_0 aufzusuchen, dessen Bild $\mathfrak{P}$ unendlich fern liegt. Ohne uns auf die Ausführungen in § 17 zu berufen, können wir einfach so schließen: Da $\mathfrak{P}$ und P_0 stets auf einer Geraden durch O_0 liegen, so muß diese, soll $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{p}$ im Unendlichen liegen, parallel zu $\mathfrak{p}$ gezogen werden und trifft dann p_0 in dem gesuchten Punkte P_0. Die parallelen und gleichen Strecken $\mathfrak{S}_p\mathfrak{F}_p$ und O_0P_0 haben auch gleiche Orthogonalprojektionen auf O_0O''. Das Lot aus P_0 auf O_0O'' trifft also diese Gerade in einem Punkte O_0', der von O_0 denselben Abstand h hat, wie die Spurlinie s_η von der Fluchtlinie f_η. Nach Figur 107 ist also O_0' die Umlegung des Punktes O' der Ebene η, durch den das aus O auf η gefällte Lot OO' geht. Da dieser Punkt von der Geraden p_0 unabhängig definiert ist, so folgt:

Durchläuft ein Punkt Q_0 die Gerade P_0O_0', so liegt der zugehörige Bildpunkt $\mathfrak{Q}$ von Q stets im Unendlichen in der Richtung O_0Q_0.

Die Gerade P_0O_0' ist offenbar durch die Umklappung von η hervorgegangen aus der Geraden, in der η von der Ebene ω des § 17, 4. getroffen wird, die durch O parallel zu π läuft.

Eine nützliche Anwendung des Satzes über Q_0 ist die: Rückt Q_0 auf P_0O_0' in die Lage O_0', so liegt das zu Q_0 gehörige Bild unendlich fern auf O_0O'', wovon man sich auch durch einen Blick auf Fig. 107a überzeugen kann. Die Gerade A_0O_0' möge s_η in $\mathfrak{S}$ treffen; dann geht das Bild von AO' selber durch $\mathfrak{S}$ und läuft parallel zu O_0O'', und daher steht $\mathfrak{A}\mathfrak{S}$ auf s_η senkrecht; zur Bestimmung von $\mathfrak{A}$ kann also der Satz dienen:

Die Gerade A_0O_0' (bzw. A_*O_*') trifft allemal s_η in einem Punkte $\mathfrak{S}$, so daß $\mathfrak{A}\mathfrak{S}$ auf s_η senkrecht steht.

In Figur 108 ist diese Konstruktion auch für die direkte Umklappung von η sichtbar gemacht, und zwar am Punkte E_*: Die Gerade E_*O_*' trifft s_η in einem Punkte $\mathfrak{S}$ derart, daß $\mathfrak{S}\mathfrak{E}$ auf s_η senkrecht steht.

9. Diese Sätze erleiden eine Modifikation, wenn die Geraden s_η und f_η zusammenfallen, d. h. wenn die Ebene η, die immer auf π senkrecht stehen soll, durch O geht.



Dann fallen die Bilder aller Punkte von η auf die Spurlinie s_η von η, die jetzt zugleich auch Fluchtlinie von η ist. Wird irgendein Punkt A der Ebene η mit dieser umgeklappt, und verbindet man den so in π erhaltenen Punkt mit dem Drehpunkt, so trifft die Verbindungsgerade die Spurlinie s_η im Bildpunkt $\mathfrak{A}$ von A. Geht eine Gerade x von η durch diese Umklappung in $\mathfrak{x}$ über, so trifft $\mathfrak{x}$ die Gerade s_η im Spurpunkt von x, und die Parallele zu $\mathfrak{x}$ durch den Drehpunkt bestimmt auf s_η den Fluchtpunkt von x.

Das folgt einerseits aus den vorangegangenen Sätzen durch Grenzübergang, wenn man s_η mit f_η zusammenfallen läßt, andererseits auch unmittelbar aus Fig 107, wenn man O auf der (verlängerten) Fläche η annimmt.

§ 21. Grundrißverfahren und Horizontverfahren.

1. Auf den Sätzen des § 20 beruht das Grundrißverfahren der Perspektive, das auf die Abbildung aller Objekte anwendbar ist, deren geometrische Gestalt durch Grundriß und Aufriß bestimmt werden kann. Hierher gehören alle architektonischen Gegenstände, wie Häuser, Straßen, Zimmereinblicke, Denkmäler und dergl. Als Grundrißebene dient in der Regel die horizontale Bodenebene η, auf der das Bauwerk errichtet ist. Fällt man von einem Punkte P auf η das Lot, und ist P' sein Schnittpunkt mit η, so heißt P' bekanntlich der Grundriß von P; beschreibt P eine Gerade U, so durchläuft P' in η eine Gerade u', den Grundriß von u. In dieser Weise sei nun der Grundriß aller wichtigen Kanten des darzustellenden Gegenstandes gegeben, und man mache sich klar, wie dieser vom Grundriß aus allmählich entsteht. Es sei auf die in § 18 genannten Steinbaukasten verwiesen, an denen man die Deutung von Grundrissen spielend einüben kann. Weniger wichtig ist uns der Aufriß, er dient nur zur Entnahme von vertikalen Höhen.

2. Für die passendste Wahl des Gesichtspunktes O lassen sich keine bindenden Vorschriften geben. In der Regel geht man so vor, daß man in der Bodenebene η zuerst den Grundriß O' des Punktes O auswählt; dann vereinbart man die Höhe h, in der sich der Punkt O vertikal über O' befinden soll. Denkt man um den ungefähren Mittelpunkt C des zu entwerfenden Bildes einen Kreis geschlagen, der nur so groß ist, daß er das Bild gerade einschließt, so entsteht durch Verbindung des Punktes O mit den Punkten der Kreislinie ein Kegel;

von dem verlangt werden muß, daß er bei O nicht zu stumpf ist; der größte Winkel zwischen zwei Strahlen des Kegels sollte i. a. nicht über 30^0—45^0 gehen. Für die Höhe h ist einigermaßen die Forderung bestimmend, daß die Gerade OC auf der Bildebene am besten beinahe senkrecht steht, also C in die Nähe von O'' fällt. Das Bild ist in der Nähe von O'' am wenigsten verzerrt. Manchmal hat man Grund, nicht gerade den mittleren Teil des Bildes, sondern einen anderen, der besorders deutlich werden soll, in die Nähe von O'' zu rücken. Das ist Sache des Geschmackes und der Erfahrung.

3. Die Bildebene π läßt man auf der Bodenebene η stets senkrecht stehen.

> Dadurch werden die natürlichen „Vertikalen", d. h die Lote auf der horizontalen Bodenebene, zu Tafelparallelen und sind daher nach § 18 zueinander und zu ihren Bildern parallel.

Die vertikalen Kanten eines Hauses erscheinen daher auch im Bilde als parallele Geraden. Das ist eine der Hilfen, die das Auge braucht, um aus dem Bilde den Gegenstand reproduzieren zu können, soweit das ohne geometrische Konstruktionen angenähert möglich ist. Stünde π auf η nicht senkrecht, so würden die Bilder der Vertikalen durch einen Punkt gehen, ein Anblick, an den wir infolge mangelhafter Ausbildung des perspektivischen Sehens nicht gewöhnt sind; unsere stets geschäftige Phantasie ersetzt eben auf Grund der Erfahrung das wirklich gesehene Bild des Objektes durch das rasch rekonstruierte Objekt selber, ohne daß wir uns des wirklich gesehenen Bildes recht bewußt werden. Daß Vertikalen in der Tat nach obenhin konvergent erscheinen (vgl. Fig. 106) ist uns i. a. um so weniger geläufig, als die Malerei uns nur selten darauf aufmerksam macht.

4. Um die Lage von π anzugeben, trägt man in der Grundrißebene η die Schnittgerade s_η von π mit der Ebene η, die sogenannte Bodenlinie ein; die Anordnung ist etwa in Fig. 107 zu ersehen, und Fig. 107b zeigt, wie man aus den beiden Drehpunkten O_* und O_0 der direkten oder indirekten Umklappung von η die Lagen O_*' und O_0' des Grundrisses O' von O findet, wenn die Höhe $h = OO'$ gegeben ist. Umgekehrt läßt sich nach dieser Figur O_* aus O_*' oder O_0 aus O_0' ableiten.

Zieht man durch O zu allen horizontalen Geraden die Parallelen, so liegen diese in einer Ebene durch O, die zur horizontalen Ebene η parallel ist und π in einer Geraden f_η trifft, die durch O'' geht und

zur Bodenlinie s_η, der Spur von η, parallel ist, siehe Fig. 107b. Auf dieser Geraden f_η, der Fluchtlinie von η, liegen die Bilder der unendlich fernen Punkte aller horizontalen (d. h. zu η parallelen) Geraden Da sie speziell die Bilder der unendlich fernen Punkte der Bodenebene η selber enthält, so wird sie der „Horizont“ genannt; Horizont und Bodenlinie haben voneinander den Abstand $h = OO'$.

5. Das Verfahren der Grundrißmethode besteht nun einfach darin, daß man η in die Bildebene klappt, nach § 20 zunächst den Grundriß perspektivisch abbildet und dann das Objekt über dem Grundriß aufbaut; läßt man η durch O gehen, so fallen s_η und f_η zusammen und die Grundrißmethode wird zur Horizontmethode. Wie man im einzelnen vorgeht, wird am besten an Beispielen gezeigt. Nur eine öfter auftretende Hilfsaufgabe wollen wir vorher noch allgemein lösen: Von einer zur Bildebene π parallelen Strecke $AB = x$ kennt man das Bild $\mathfrak{A}$ des einen Endpunktes und die Lage $\mathfrak{x}$ der Geraden, der die Strecke angehört; man soll das Bild $\mathfrak{B}$ des anderen Endpunktes B finden, wenn die Länge x der Strecke AB gegeben ist. Der am häufigsten vorkommende Spezialfall dieser Aufgabe ist der, daß A ein Punkt der Grundrißebene und AB ein Lot auf derselben, also eine Vertikale ist; in diesem Falle nimmt man auf dem Horizonte f_η einen beliebigen

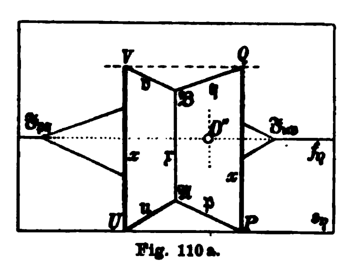


Fig. 110a.

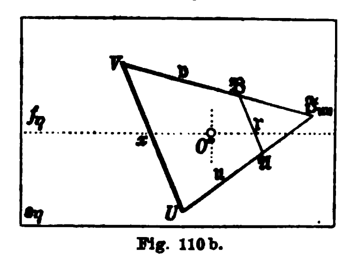


Fig. 110b.

Punkt $\mathfrak{F}_{uv}$ an (Fig. 110a), bringt die Gerade $\mathfrak{F}_{uv}\mathfrak{A}$ mit s_η zum Schnitt und zieht durch den Schnittpunkt U zu $\mathfrak{x}$ die Parallele, auf der man UV gleich der gegebenen Strecke $x = AB$ macht. Dann trifft $V\mathfrak{F}_{uv}$ die Gerade $\mathfrak{x}$ im gesuchten Punkte $\mathfrak{B}$. Denn die Geraden $U\mathfrak{F}_{uv}$, $V\mathfrak{F}_{uv}$ sind die Bilder $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ zweier parallelen Geraden u, v, und $U\mathfrak{A}\mathfrak{B}V$ ist das Bild eines Parallelogramms $UABV$, von dem die Seite UV in der Bildebene liegt und die gegebene Länge x hat. Wiederholt man die Konstruktion mit einem anderen Punkte $\mathfrak{F}_{pq}$ von f_η (Fig. 110a), indem man $\mathfrak{F}_{pq}$ mit $\mathfrak{A}$ und dem nun gefundenen Punkte $\mathfrak{B}$ verbindet und durch den Schnittpunkt P von $\mathfrak{F}_{pq}\mathfrak{A}$ mit s_η die Parallele zu UV zieht, so trifft diese die Gerade $\mathfrak{F}_{pq}\mathfrak{B}$ in einem Punkte Q, so daß $PQ = UV$ ist. (Satz von Desargues.)

6. Im allgemeinen Falle der Aufgabe wird in der Regel das Bild $\mathfrak{u}$ einer Geraden bekannt sein, die durch A geht; $\mathfrak{u}$ geht also durch $\mathfrak{A}$. Dann bestimme man den Spurpunkt U und den Fluchtpunkt $\mathfrak{F}_{uv}$ dieser Geraden (Fig. 110b), mache $UV \parallel \mathfrak{x}$ und gleich der gegebenen Strecke $x = AB$, worauf die Gerade $\mathfrak{F}_{uv}V$ von $\mathfrak{x}$ in dem gesuchten Punkte $\mathfrak{B}$ getroffen wird. Wiederum ist nämlich $U\mathfrak{A}\mathfrak{B}V$ das Bild eines Parallelogramms, von dem eine Seite UV in der Bildebene π liegt und die vorgeschriebene Länge hat.

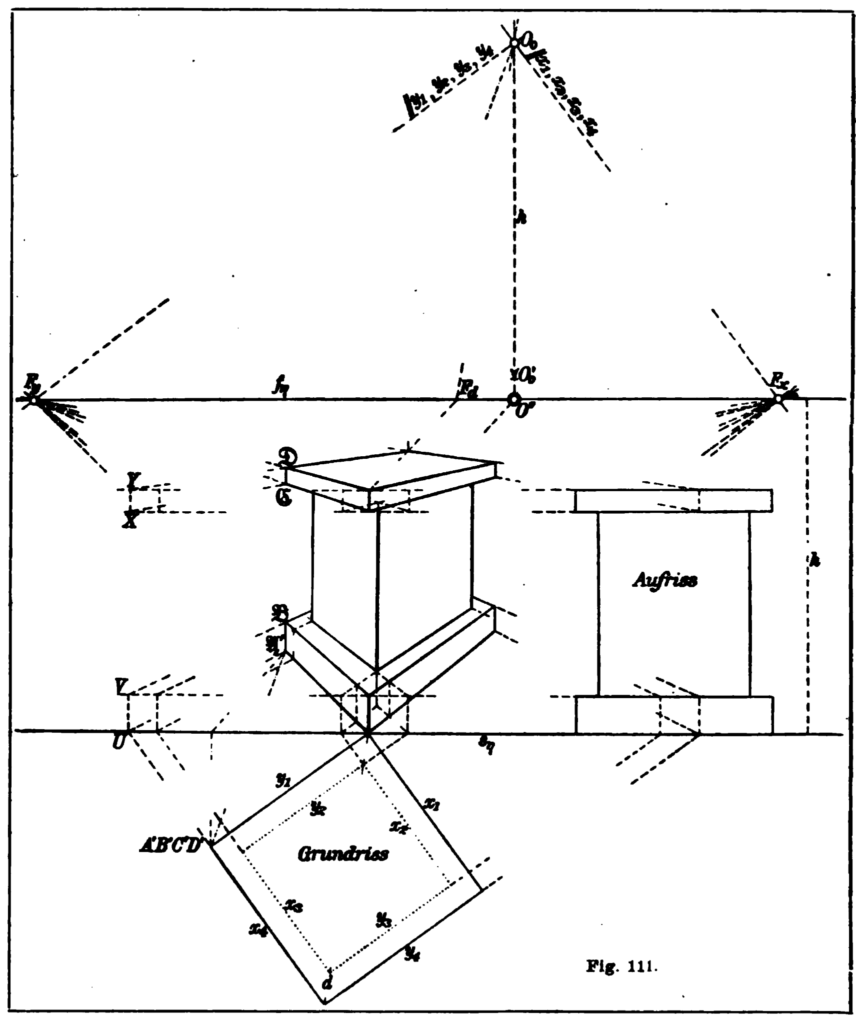


Fig. 111.

7. Jetzt wollen wir zunächt den Sockel einer Säule darstellen, der uns in Grund- und Aufriß gegeben sei (Fig. 111). Den Stand-

punkt wählen wir in O_*' (bei indirekter Umklappung), die Schnittlinie s_η der Bodenebene und der Bildebene legen wir durch die eine Ecke des Grundrisses; die Höhe von O über O' sei h. Dann läuft die Fluchtlinie f_η der Bodenebene, also der Horizont, parallel zu s_η im Abstande h, und Fig. 107 zeigt, auf welcher Seite von s_η. Das Lot aus O_*' auf f_η trifft diese Gerade in O'', und O_* liegt auf diesem Lote von O_*' aus im Abstande h. Damit sind alle Stücke zur Rekonstruktion des Punktes O bestimmt.

Die Ausführung des perspektivischen Bildes beginnt mit dem Grundriß, der nach § 20 abgebildet wird. Zur Kontrolle der Genauigkeit sind bei der Darstellung des Punktes A' zwei Methoden angewandt: Einmal ist A' direkt nach Fig. 102 mittels eines Tafellotes abgebildet (strichpunktierte Hilfslinien); außerdem aber sind die Geraden x und y mittels Spurpunktes und Fluchtpunktes dargestellt; F_x ist der Fluchtpunkt x_1, x_2, x_3, x_4, ebenso F_η Fluchtpunkt von y_1, y_2, y_3, y_4. Dieses letzte Verfahren hat ersichtlich vor dem ersten den Vorzug, daß hiernach gleich der ganze Grundriß abgebildet wird.

8. Der Aufbau des Körpers über dem Bilde des Grundrisses setzt den Aufriß voraus; dieser braucht aber nicht über dem Grundriß in richtiger Lage zu stehen, was bei unserer Figur offenbar stören würde, er kann vielmehr seitlich verschoben werden, wenn nur sein Abstand von der Spur s_η richtig bleibt, die ja als trennende Achse der Tafeln η und π des Zweitafelsystems zu betrachten ist, auf das wir Grundriß und Aufriß beziehen. Um nun z. B. den Punkt B, dessen Grundriß B' mit A' zusammenfällt, in Perspektive zu setzen, bedienen wir uns des in Fig. 110a erklärten Verfahrens: Die Gerade x_4, auf der A' liegt, trifft s_η im Punkte U, und die zu x_4 parallele Kante des Sockels trifft die Zeichenebene in einem Punkte V, den wir sofort konstruieren können, da UV auf s_η senkrecht stehen muß und die Größe der Strecke UV aus dem Aufrisse zu entnehmen ist. Die Gerade VF_x bestimmt daher $\mathfrak{B}$ auf der durch $\mathfrak{A}'$ zu UV gezogenen Parallelen. Nach demselben Verfahren werden $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ gefunden. Man sieht unmittelbar in der Figur, daß UF_xV ein Parallelstreifen von der Höhe UV ist; daher stellt $U\mathfrak{A}'\mathfrak{B}V$ ein Parallelogramm dar, und zwar genauer ein Rechteck, da VUF_x das Bild eines rechten Winkels ist. Nach demselben Verfahren sind die übrigen Eckpunkte des Körpers konstruiert. Der Fluchtpunkt F_d der Diagonale d der unteren und der oberen Platte dient zur Kontrolle.

9. Geht die Grundrißebene durch den Gesichtspunkt O, so wird, wie bemerkt, die Grundrißmethode zur Horizontmethode.



Als Beispiel ist in Fig. 112 eine regulär sechskantige prismatische Säule gewählt, deren Schnitt mit der durch O gehenden Horizontalebene η als Grundriß bezeichnet und um den Horizont f_η indirekt

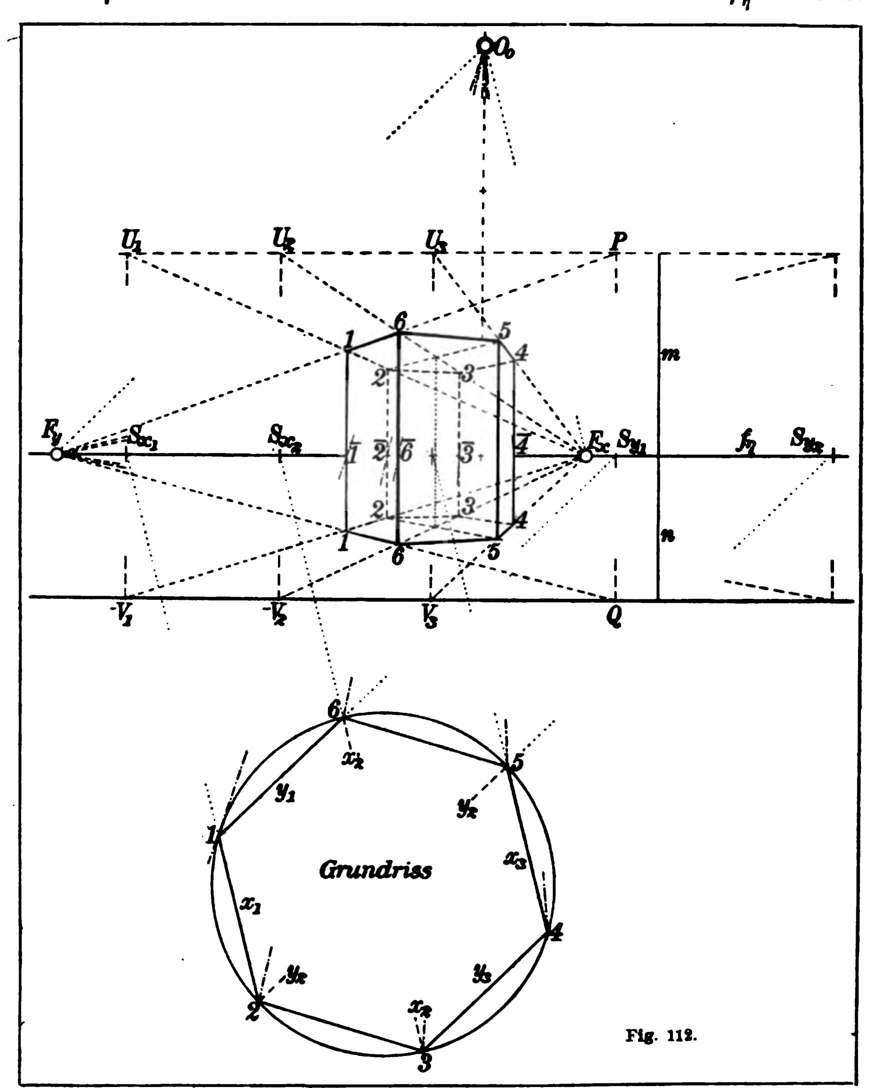


Fig. 112.

umgeklappt ist; O_0 ist also mit dem Punkte O_0' der Fig. 107 identisch. Die Geraden, die O_0 mit den Ecken 1, 2, 3, 4, 5, 6 des Grundrisses verbinden, treffen den Horizont f_η in den sechs Punkten $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}$, durch welche die Bilder der sechs Vertikalkanten des Prismas gehen. Dasselbe sei oben und unten durch je eine Horizontalebene begrenzt,

die von der Ebene η den Abstand m bzw. n haben mögen. Im Abstande m bzw. n von f_η werden parallel zu f_η die Geraden U_1P und V_1Q gezogen, die eine oberhalb, die andere unterhalb f_η. Um nun die Endpunkte der sechs Kanten abzubilden, bedienen wir uns wieder des an Fig. 110 gezeigten Verfahrens. Wir ziehen zu diesem Zwecke die drei rechteckigen und vertikalstehenden Flächen in Betracht, die durch die Vertikalkanten des Prismas und durch die horizontalen Kanten 21, 36, 45 der unteren und der oberen Grenzfläche bestimmt werden. Der Fluchtpunkt der Richtungen 21, 36, 45 oder x_1, x_2, x_3 sei F_x, also $O_0F_x \| x_1$. Die Spurpunkte von x_1, x_2, x_3 seien $S_{x_1}, S_{x_2}, S_{x_3}$. Die in diesen Punkten auf f_η errichteten Lote treffen die Geraden U_1P, V_1Q in U_1, U_2, U_3 und V_1, V_2, V_3. Die im Bilde durch $\overline{1}$ gehende Vertikalkante des Prismas wird von den Geraden F_xV_1, F_xU_1 in den beiden Bildern 1, 1 der Endpunkte dieser Kante getroffen. So werden die beiden horizontalen Abschlußflächen des Körpers dargestellt.

10. Das Bild des unteren Sechseckes ist festgelegt, sobald man eine Ecke abgebildet hat. Zur Erhöhung der Genauigkeit, und um zu zeigen, wie man sich zu helfen hat, wenn der eine oder andere Schnittpunkt unzugänglich ist, enthält unsere Figur mehr Hilfslinien, als unbedingt erforderlich sind. Es ist einerseits der Parallelismus der Strecken 21, 36, 45, andererseits der Strecken 16, 25, 34 benutzt; zu der einen Richtung gehört der Fluchtpunkt F_x, zur anderen F_y. Die Gerade V_1Q ist der Schnitt der Bildebene mit der unteren Abschlußebene des Prismas, also mit der Bodenebene, auf der dieses ruht. Auf dieser Ebene steht das Rechteck senkrecht, das im Bilde durch U_1V_1 1 1 dargestellt ist; man sieht so unmittelbar, daß die Kante 11 die richtige Länge hat.

11. Ein Vergleich mit der Figur 111 zeigt, daß der Vorzug der Horizontmethode in der raschen und scharfen Fixierung der Schnittpunkte der Vertikalen mit dem Horizonte besteht, während sich die Festlegung der Endpunkte dieser Geraden nicht umständlicher gestaltet als wie beim Grundrißverfahren. Bei diesem bildet aber die Fixierung der Endpunkte den Anfang und dient somit jedesmal zur Festlegung der ganzen Strecke, während beim Horizontverfahren erst noch der Schnittpunkt mit dem Horizonte zu bestimmen ist. Das Horizontverfahren wird also nur da von Vorteil sein, wo die Figur sehr viele Vertikalkanten hat oder wo das Bild des Grundrisses infolge niedrigen Horizontes zu unscharf wird, als daß man sich auf die Genauigkeit seiner Ecken verlassen könnte. Man wird das Horizontverfahren ersichtlich auch in Verbindung mit der Grundrißmethode

anwenden, wenn der darzustellende Gegenstand so kompliziert ist, daß er beim Aufbau über dem Grundrisse allein zuviel Hilfslinien im Bilde des Grundrisses erfordern würde.

§ 22. Perspektive unter erschwerten Umständen.

1. Bei komplizierteren Aufgaben wird man die vorangehenden Methoden in geschickter Weise zu kombinieren suchen; es gehört dazu Übung und Erfahrung, prinzipielle Schwierigkeiten treten aber nicht auf. Lästiger sind oft die Verlegenheiten, die aus der Begrenztheit des Zeichenblattes sich ergeben. Zu ihrer Überwindung kann man i. a. zwei Wege einschlagen: Entweder wird man die Schwierigkeiten technisch zu überwinden suchen, oder geometrisch-konstruktiv.

2. Der am meisten vorkommende Fall ist der, daß ein viel gebrauchter Fluchtpunkt außerhalb des Zeichenblattes fällt. Hat man einen großen Tisch zur Verfügung, auf dem man das Zeichenblatt befestigen kann, so wird man den betreffenden Fluchtpunkt einfach mittels eines großen Lineals oder eines gespannten Zwirnfadens auf dem Tische ermitteln und mittels eines Reißstiftes markieren. Ein um diesen Stift geschlungener und mittels eines kleinen Gewichtes gespannter Zwirnfaden dient dann in ebenso einfacher wie bequemer Weise zur Konstruktion der von jenem Punkt kommenden Geraden, indem man das Lineal vorsichtig an den Faden heranschiebt. Bei einiger Übung ist das Verfahren auch zu ganz umfangreichen Darstellungen brauchbar und macht die Fluchtpunktschienen entbehrlich, die durchaus nicht genauer arbeiten.

3. Nicht selten wird man sich auf geometrischem Wege helfen können. Man wird natürlich immer zum Ziele kommen, wenn man die Zeichnung zunächst in verkleinertem Maßstabe entwirft; bedenklich ist nur, daß bei der darauf folgenden Vergrößerung sich auch die unvermeidlichen Ungenauigkeiten vergrößern. Davon abgesehen kann dieses Verfahren sehr empfehlenswert sein, wenn es mit der Konstruktion des Bildes in organischen Zusammenhang gebracht wird. Am wichtigsten ist dabei die Ähnlichkeit bei ähnlicher Lage mit O'' als äußerem Ähnlichkeitspunkt (vgl. § 19, 2). Eine einfache Anwendung zeigt die Figur 113. Gegeben sind Spur s_η und Fluchtlinie f_η der Bodenebene η, sowie die Orthogonalprojektion O'' des Gesichtspunktes O auf die Bildebene π und der halbe Tafelabstand $O''\Omega$. Von einer auf η errichteten Freitreppe hat man den Grundriß [und Aufriß mit der trennenden Achse xx] in indirekter

Umklappung. Dagegen fällt die Umklappung O_0' von O' außerhalb des Blattes. Ebenso sind die Fluchtpunkte F_x und F_y der beiden wagrechten Kantenrichtungen der Treppenstufen unzugänglich.

4. Der Punkt O_0' müßte auf $O''\Psi$ (s. Fig.) nach oben hin im Abstande $2 \cdot O''\Omega$ liegen; mit $\frac{1}{2}O_0'$ wollen wir den Punkt bezeichnen, der

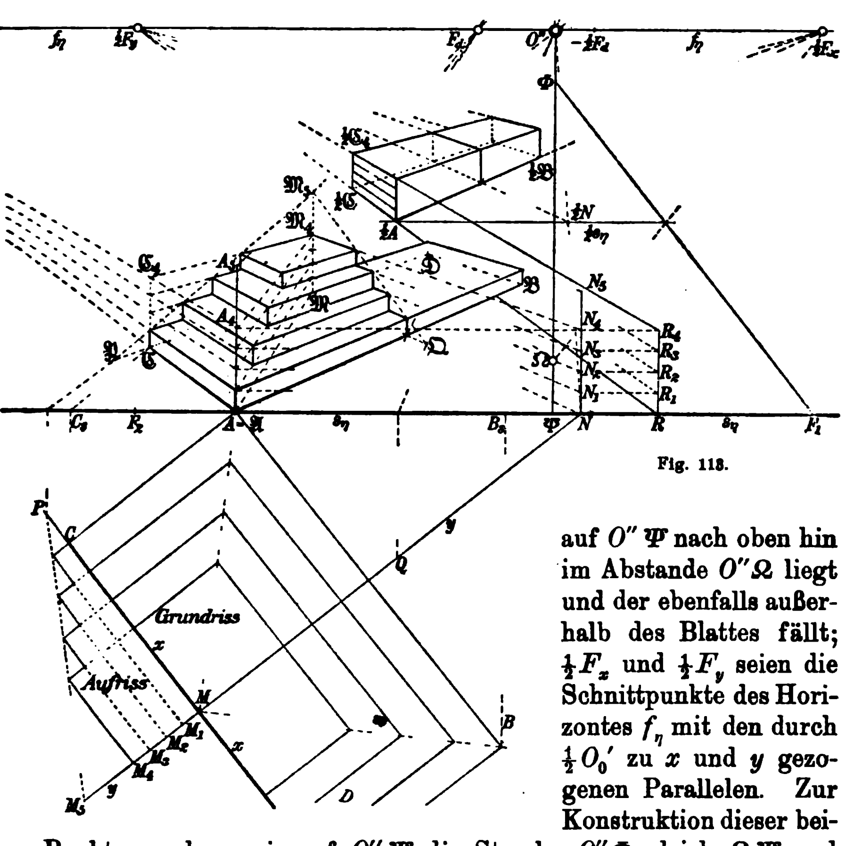


Fig. 118.

auf $O''\Psi$ nach oben hin im Abstande $O''\Omega$ liegt und der ebenfalls außerhalb des Blattes fällt; $\frac{1}{2}F_x$ und $\frac{1}{2}F_y$ seien die Schnittpunkte des Horizontes f_η mit den durch $\frac{1}{2}O_0'$ zu x und y gezogenen Parallelen. Zur Konstruktion dieser beiden Punkte machen wir auf $O''\Psi$ die Strecke $O''\Phi$ gleich $\Omega\Psi$ und ziehen durch Φ zu x und y die Parallelen, die s_η in F_1 und F_2 treffen mögen, darauf tragen wir die Strecken ΨF_1 und ΨF_2 von O'' aus auf f_η nach rechts und links ab und erhalten $\frac{1}{2}F_x$ und $\frac{1}{2}F_y$ als ihre Endpunkte: Das Dreieck $F_2\Phi F_1$ ist nämlich offenbar das heruntergeschobene Dreieck mit den Ecken $\frac{1}{2}F_y$, $\frac{1}{2}O_0'$, $\frac{1}{2}F_x$.

5. Das Hilfsverfahren, daß wir nun anwenden wollen, läuft darauf hinaus, das zu entwerfende Bild erst im Verhältnisse 2 : 1 verkleinert anzulegen, und zwar unter Beibehaltung von O'' und f_η,

während die neue Spurlinie $\frac{1}{2}s_\eta$ den Abstand $O''\Psi$ halbieren wird. Für das verkleinerte Bild sind $\frac{1}{2}F_x$, $\frac{1}{2}F_y$ die richtigen Fluchtpunkte von x und y, $\frac{1}{2}O_0'$ ist die richtige indirekte Umlegung von O', und die Punkte $\frac{1}{2}O_0'$, $\frac{1}{2}F_x$, $\frac{1}{2}F_y$ sind den Punkten O_0', F_x, F_y in einer Ähnlichkeitsbeziehung mit O'' als äußerem Ähnlichkeitspunkte zugeordnet. Der auf s_η liegenden Ecke A des Grundrisses entspricht in dieser Beziehung der Punkt $\frac{1}{2}A$, in dem $\frac{1}{2}s_\eta$ von der Geraden $O''A$ getroffen wird, und die Geraden $\frac{1}{2}A\frac{1}{2}F_x$ und $\frac{1}{2}A\frac{1}{2}F_y$ sind in der verkleinerten Abbildung die Bilder der Kanten AB und AC des Grundrisses. Im großen Bilde entspricht A sich selbst als $\mathfrak{A}$, und die Parallelen durch $\mathfrak{A}$ zu $\frac{1}{2}A\frac{1}{2}F_x$ und zu $\frac{1}{2}A\frac{1}{2}F_y$ sind die Bilder von AB und von AC. Das Bild $\mathfrak{C}$ von C findet man jetzt einfach mittels des Tafellotes CC_s aus C auf s_η, dessen Bild durch den Fußpunkt C_s dieses Lotes und durch O'' geht. Zu $\mathfrak{C}$ konstruiert man erst im verkleinerten Bilde $\frac{1}{2}\mathfrak{C}$ mittels der Geraden $\mathfrak{C}O'$, die $\frac{1}{2}A\frac{1}{2}F_y$ in $\frac{1}{2}\mathfrak{C}$ trifft, zieht $\frac{1}{2}\mathfrak{C}\frac{1}{2}F_x$, und hierzu die Parallele durch $\mathfrak{C}$ als Bild der hinteren Kante CD des Grundrisses. Ebenso fällt man $BB_s \perp s_\eta$, bringt $O''B_s$ mit $\frac{1}{2}A\frac{1}{2}F_x$ in $\frac{1}{2}\mathfrak{B}$ zum Schnitt und zieht zu $\frac{1}{2}\mathfrak{B}\frac{1}{2}F_y$ durch $\mathfrak{B}$, den Schnittpunkt von $O''B_s$ mit der als Ganzem konstruierten Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, die Parallele. Jetzt ist das Rechteck des Grundrisses vollständig abgebildet, und zugleich ist auch sein verkleinertes Bild gewonnen.

6. Der Aufbau der Treppe über $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ erfolgt am besten von dem Punkte $\mathfrak{M}$ aus, dem Bilde des Mittelpunktes M der Strecke CD. Die durch M zur Kantenrichtung y gezogene Parallele trifft s_η in N und $O''N$ trifft $\frac{1}{2}s_\eta$ in $\frac{1}{2}N$; die Parallele durch N zu $\frac{1}{2}N\frac{1}{2}F_y$ ist dann das Bild von MN und trifft $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{M}$. Auf den Geraden MA, MB liegen 16 Eckpunkte der Treppenstufen. Zu $MA \equiv d$ wird durch Ω die Parallele gezogen, die f_η in dem Punkte $-\frac{1}{2}F_d$ trifft, dem durch Spiegelung an O'' der richtige Punkt $\frac{1}{2}F_d$ entsprechen würde. Der Fluchtpunkt F_d selber liegt auf f_η links von O'' im doppelten Abstande des Punktes $-\frac{1}{2}F_d$. Die Gerade AF_d bestimmt aufs neue $\mathfrak{M}$, während umgekehrt die Bestimmung von F_d mittels der Geraden $A\mathfrak{M}$ wegen zu großer Ungenauigkeit vermieden wurde.

7. In N errichten wir auf s_η das Lot, tragen darauf die Höhen der vier Treppenstufen, die aus dem Aufriß zu entnehmen sind, ab und erhalten so N_1, N_2, N_3, N_4. Die Parallelen durch diese Punkte zu s_η treffen das in A auf s_η errichtete Lot in vier Punkten, die wir A_1, A_2, A_3, A_4 nennen wollen, ohne die Bezeichnungen in die Figur einzutragen, und die Verbindungsgeraden dieser vier Punkte mit F_d

treffen die in $\mathfrak{M}$ errichtete Vertikale in den (ebenfalls nicht eingetragenen) Punkten $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}_4$. Mit M_5 ist im Aufrisse der Punkt bezeichnet, in welchem die in M errichtete Vertikale von der Ebene geschnitten wird, die durch die wagerechten Oberkanten der vier Treppenstufen geht. Diese Ebene trifft die Geraden MC und MN in den Punkten P und Q, deren Bilder mittels der Tafellote konstruiert werden. Ferner machen wir auf AA_4 die Strecke $AA_5 = MM_5$ und ziehen die Gerade A_5F_d, die $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_4$ in $\mathfrak{M}_5$, dem Bilde von M_5, trifft. Jetzt trifft $\mathfrak{M}_5\mathfrak{Q}$ die Geraden $\mathfrak{M}_iN_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ in den vier Punkten, durch welche die Bilder der wagrechten Oberkanten zu ziehen sind; diese vier Bildgeraden werden festgelegt, indem man die Gerade $\mathfrak{M}_5A_1$ zieht, die die vier Geraden $A_i\mathfrak{M}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ ebenfalls in vier Punkten jener Kantenbilder trifft.

8. Ähnlich könnte man bei der Darstellung der wagrechten Kanten von der Richtung y verfahren. In Figur 113 ist jedoch ein anderer Weg eingeschlagen, der die im Verhältnis $2:1$ verkleinerte Figur benutzt: die Gerade $\frac{1}{2}F_y\frac{1}{2}A$ trifft s_η in R, dort ist auf s_η das Lot errichtet und mit den Geraden A_iN_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ zum Schnitt gebracht. Die Verbindungsgeraden von $\frac{1}{2}F_y$ mit den so erhaltenen Schnittpunkten R_1, R_2, R_3, R_4 bestimmen vier Richtungen, zu denen parallel wir durch A_1, A_2, A_3, A_4 vier Gerade legen, die die in $\mathfrak{C}$ errichtete Vertikale in vier Punkten $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{C}_4$ treffen; die Gerade $\mathfrak{M}_5\mathfrak{P}$ wird nunmehr von den vier Geraden $\mathfrak{C}_i\mathfrak{M}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ in den vier Punkten geschnitten, durch die die Bilder der vier wagerechten und zu y parallelen Oberkanten der Treppenstufen gehen. Diese Punkte verbinden wir mit den entsprechenden Punkten auf $\mathfrak{M}_5A_1$. Der weitere Verlauf der Konstruktion ergibt sich jetzt von selbst. Um den Blick auf die verkleinerte Figur frei zu halten, ist nur die halbe Treppe abgebildet.

Weiter wollen wir hier nicht gehen.

Zur Vertiefung des Studiums der Perspektive sind mathematische Vorkenntnisse nicht zu entbehren. Außer dem jüngst erschienenen ausführlichen Lehrbuche von G. Hauck ist immer noch die vortreffliche „Freye Perspective“ von J. H. Lambert (2. Aufl., Zürich 1774) zu empfehlen.

Vierter Abschnitt.

Graphische Statik.

§ 23. Freie Vektoren.

1. Eine Strecke AB auf einer Geraden x kann von einem beweglichen Punkte in zwei verschiedenen „Sinnen" oder „Richtungssinnen" durchlaufen werden, die wir mit (A, B) und (B, A) bezeichnen wollen (Fig. 114). Zwei in dem „Sinne" (A, B) und (C, D) genommene Strecken AB und CD der Geraden x haben gleichen Sinn, wenn ein Punkt, der die Gerade ohne umzukehren stetig durchläuft, beide Strecken in ihrem Sinne oder beide gegen ihren Sinn durchläuft; andernfalls haben sie entgegengesetzte Sinne.

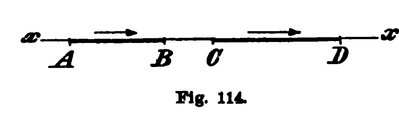


Fig. 114.

2. Ein Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 115) bestimmt zwei entgegengesetzte „Sinne", in denen ein Punkt seinen Umfang stetig durchlaufen kann ohne umzukehren, nämlich die Sinne (A, B, C, D) und (D, C, B, A). Der Umkehrung des Umlaufssinnes entspricht auch die Umkehrung des Sinnes jeder Seite. Durchläuft ein Punkt P den Umfang des Parallelogramms im einen oder anderen Sinne, so wird der Halbstrahl MP, der vom Mittelpunkt des Parallelogramms nach P geht, sich um M im einen oder anderen Sinne drehen. Es ist oft wünschenswert, den Drehungen in einer Ebene, der Zeichenebene, bestimmte Vorzeichen zuzuordnen. Betrachtet man die Zeichenebene, wie gewöhnlich, immer von der einen Seite, auf der man zeichnet, so soll eine in ihr stattfindende Drehung positiv oder negativ genannt werden, je nachdem sie gegen oder mit dem Sinne der Uhrzeigerdrehung erfolgt. Errichtet man auf der Schriftseite der Ebene eine Normale, so ist positive Drehung so viel als Rechtsdrehung im Sinne des § 82 des II. Bandes.

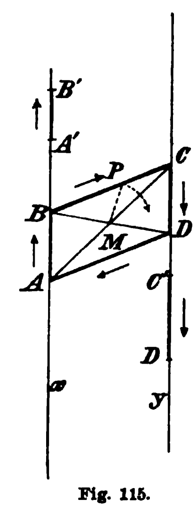


Fig. 115.

3. Die Sinne (A', B') und (C', D') zweier paralleler Strecken $A'B'$ und $C'D'$ auf zwei Geraden x, y definieren wir als entgegengesetzt oder als gleich, je nachdem zwei einander kongruente Strecken AB und CD von x und y, die mit $A'B'$ bzw. $C'D'$ im Sinne übereinstimmen, in der Reihenfolge AB, BC, CD, DA verbunden ein Parallelogramm ergeben oder nicht.

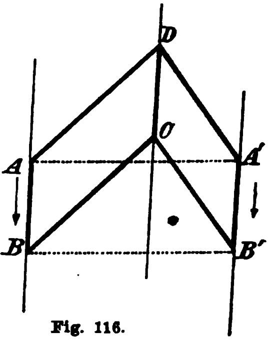


Fig. 116.

4. Seien (Fig. 116) AB, $A'B'$ und DC drei kongruente, auf parallelen Geraden gelegene Strecken und der Sinn (D, C) sowohl dem Sinne (A, B) als dem Sinne (A', B') gleich, dann ist (C, D) sowohl dem Sinne (A, B) als dem Sinne (A', B') entgegengesetzt und folglich (A, B, C, D) und (A', B', C, D) der Umlaufssinn je eines Parallelogramms (während z. B. (A, B, D, C) keinem Parallelogramm zugehört). Jetzt ist auch $AA' \| BB'$ und $ABB'A'$ ein Parallelogramm, folglich sind die Sinne (A, B) und (A', B') einander gleich, d. h.: Wenn zwei parallele Strecken mit einer dritten zu ihnen parallelen Strecke im Sinn übereinstimmen, so stimmen sie auch untereinander im Sinn überein.

5. Unter einem freien Vektor $\mathfrak{a}$ verstehen wir eine Strecke von bestimmter Länge a, von bestimmter Richtung und bestimmtem Sinn, die aber im übrigen frei beweglich ist, d. h. durch jede andere Strecke ersetzt werden kann, die mit ihr in diesen drei Bestimmungsstücken übereinstimmt. Dabei wollen wir, wie üblich, zwei Geraden gleiche Richtung zuschreiben, wenn sie parallel sind. Mitunter wird unter dem Wort Richtung auch der Sinn mit einbegriffen und, man spricht dann wohl auch von Pfeilrichtung. Zwei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ heißen einander nur dann gleich, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, wenn sie in Länge und Pfeilrichtung übereinstimmen; wir sagen dann auch, es seien dieselben Vektoren. Zwei Vektoren heißen entgegengesetzt, wenn sie parallel und kongruent sind, aber entgegengesetzten Sinn haben; den zu $\mathfrak{a}$ entgegengesetzten Vektor bezeichnen wir mit $\bar{\mathfrak{a}}$. Die Vektoren werden auch Richtungsgrößen, oder gerichtete Strecken, Stäbe usw. genannt.

Wenn ein von den Punkten A, B begrenzter Vektor $\mathfrak{a}$ oder $\boldsymbol{AB}$ den Sinn (A, B) hat, so heißt A sein Anfangspunkt, B sein Endpunkt.

Soll eine Strecke AB als Vektor aufgefaßt werden, so bezeichnen wir sie mit $\boldsymbol{AB}$; um einen Vektor durch ein einziges Zeichen auszudrücken, bedienen wir uns der Frakturbuchstaben $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$;

unter $a, b, c, \ldots$ verstehen wir dann die (absoluten) Längen dieser Vektoren.

6. Unter der geometrischen Summe $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n$ von n Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$, zunächst in dieser bestimmten Reihenfolge, verstehen wir einen Vektor $\boldsymbol{OA_n}$, den man erhält, indem man von irgend einem Punkte O ausgehend $\boldsymbol{OA_1} = \mathfrak{a}_1$, $\boldsymbol{A_1A_2} = \mathfrak{a}_2$, $\boldsymbol{A_2A_3} = \mathfrak{a}_3, \ldots$, $\boldsymbol{A_{n-1}A_n} = \mathfrak{a}_n$ anträgt (Fig. 117). Konstruiert man, von einem anderen Punkte O' ausgehend, ebenso $\boldsymbol{O'A_1'} = \mathfrak{a}_1$, $\boldsymbol{A_1'A_2'} = \mathfrak{a}_2, \ldots, \boldsymbol{A_{n-1}'A_n'} = \mathfrak{a}_n$, so ist $\boldsymbol{O'A_n'} = \boldsymbol{OA_n}$. Dabei ist durchaus nicht etwa vorausgesetzt, daß die Vektoren alle in einer Ebene liegen müssen; liegt die Figur $OA_1A_2 \ldots A_n$ nicht in einer Ebene, so sei Fig. 117 eine Parallelprojektion der räumlichen Figur. Aus der Definition der Gleichheit des Sinnes von Vektoren folgt, daß $OA_1A_1'O'$, $A_1A_2A_2'A_1', \ldots$, $A_{n-1}A_nA_n'A_{n-1}'$ Parallelogramme sind; daher ist $\boldsymbol{OO'} = \boldsymbol{A_1A_1'} = \cdots = \boldsymbol{A_nA_n'}$, also $OA_nA_n'O'$ ein Parallelogramm und daher $\boldsymbol{OA_n} = \boldsymbol{O'A_n'}$, w. z. b. w.

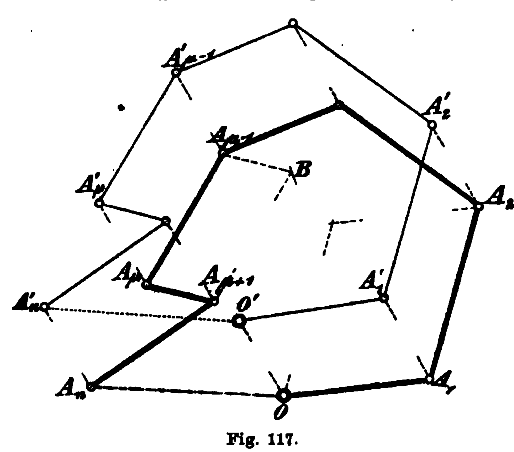


Fig. 117.

Die Vektoren der graphischen Statik sind in der Regel Kräfte (nicht Geschwindigkeiten); die Figur $OA_1A_2 \ldots A_n$ heißt darum kurz das Krafteck, auch Kräftepolygon, und die Gerade OA_n wird die Schlußseite oder Schlußlinie des Kraftecks genannt.

7. Ändert man in der Summe $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_\mu + \mathfrak{a}_{\mu+1} + \cdots + \mathfrak{a}_n$ die Reihenfolge von zwei nebeneinander stehenden Summanden, wie $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, oder $\mathfrak{a}_\mu$ und $\mathfrak{a}_{\mu+1}$, so stimmt das zugehörige, von O ausgehende Krafteck mit dem obigen bis auf zwei Seiten überein, wie in Figur 117 für die Vertauschung von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ sowie von $\mathfrak{a}_\mu$ und $\mathfrak{a}_{\mu+1}$ angedeutet ist. Im letzten Falle ist nämlich von Fig. 117 der Teil $OA_1A_1 \ldots A_{\mu-1}$ ohne weiteres brauchbar; darauf hat man $\boldsymbol{A_{\mu-1}B} = \mathfrak{a}_{\mu+1}$ zu machen; daher ist $BA_{\mu-1}A_\mu A_{\mu+1}$ ein Parallelogramm und $\boldsymbol{BA_{\mu+1}} = \boldsymbol{A_{\mu-1}A_\mu} = \mathfrak{a}_\mu$ die nächste Seite des neuen Kraftecks, das von $A_{\mu+1}$ bis A_n wieder mit dem ursprünglichen identisch ist. Der Vektor $\boldsymbol{OA_n}$ wird also nicht geändert, wenn man zwei nebeneinander stehende Summanden in $\mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_n$ vertauscht.

8. Daraus folgt aber sofort der **Hauptsatz der geometrischen Summation:**

Die geometrische Summe von n Vektoren ist von der Reihenfolge der Vektoren unabhängig.

Der Übergang von der Reihenfolge $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n$ zu $\mathfrak{a}_{\nu_1} + \mathfrak{a}_{\nu_2} + \cdots + \mathfrak{a}_{\nu_n}$, wo also $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ eine Umstellung der n Zahlen $(1, 2, \ldots, n)$ ist, kann nämlich immer so vollzogen werden, daß man in der Folge $(1, 2, \ldots, n)$ zwei nebeneinander stehende Elemente vertauscht, in der so erhaltenen Folge wieder zwei, dann wieder zwei usw., bis man nach einer endlichen Zahl von Vertauschungen nebeneinander stehender Elemente zur Anordnung $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ gelangt. Ist ν_1 nicht schon mit 1 identisch, sondern etwa mit der r^{ten} Zahl der Reihe $(1, 2, \ldots, r, \ldots, n)$, so vertausche man in dieser die r^{te} Zahl mit der links vorangehenden, in der neuen Folge die $r-1^{\text{te}}$ Zahl mit der vorangehenden, in der neuen Folge die $r-2^{\text{te}}$ Zahl mit der vorangehenden usw., bis nach r Schritten die Zahl $r = \nu_1$ an den Anfang gerückt ist. Mit den übrigen $n-1$ Zahlen hat man dann ähnlich zu verfahren, um ν_2 an die zweite Stelle zu bringen usw. Nach dem Schlußsatze des Art. 7 bleibt bei allen diesen Vertauschungen der Vektor OA_n ungeändert, wenn man nur den Anfangspunkt O des Kraftecks festhält, und damit ist der Hauptsatz bewiesen.

9. Wir ändern jetzt den Gleichheitsbegriff der (freien) Vektoren, oder vielmehr, wir werden im eigentlichen Sinne nicht mehr von gleichen Vektoren, sondern nur noch von gleichen Summen sprechen, indem wir definieren: $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + \cdots + \mathfrak{b}_m$, wenn beide Summationen zwei im Sinne der früheren Definition gleiche Vektoren ergeben. Das Gleichheitszeichen besagt jetzt so viel als: „ergibt denselben Vektor wie die Summation ...". Dieser neuen Auffassung läßt sich aber die alte unterordnen durch Einführung des uneigentlichen Vektors $\mathfrak{a} + \bar{\mathfrak{a}}$, der aus der Summe zweier entgegengesetzter Vektoren gebildet ist. Macht man, um die geometrische Summe zu erhalten, $OA = \mathfrak{a}$, $AB = \bar{\mathfrak{a}}$, so fällt B mit O zusammen, und der Vektor OB, der die Summe $\mathfrak{a} + \bar{\mathfrak{a}}$ darstellt, erhält die Länge Null, während Richtung und Sinn unbestimmt bleiben. Wir bezeichnen diesen Vektor mit Null und setzen $\mathfrak{a} + \bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{b} + \bar{\mathfrak{b}} = \mathfrak{o}$, indem wir alle Vektoren Null als gleich betrachten. Daher ist $\mathfrak{c} + \mathfrak{o} = \mathfrak{c}$. da die Summationen links und rechts denselben Vektor $\mathfrak{c}$ ergeben, Da nun offenbar die Operation $+ (\mathfrak{a} + \bar{\mathfrak{a}})$ das Ergebnis einer Summation nicht ändert, sondern nur die Art seiner Entstehung, auf die es nicht ankommt, so dürfen entgegengesetzte Vektoren in einer Summe

nach Belieben weggelassen oder eingefügt werden. Betrachtet man jetzt den Vektor $\mathfrak{c}$ als uneigentliche Summe $\mathfrak{c} + \mathfrak{a} + \bar{\mathfrak{a}}$, so erscheint auch $\mathfrak{c}$ als Ergebnis einer Operation, allerdings der Identitätssetzung, und man kann in diesem Sinne auch $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ aussagen. Ob man die Gleichung $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ auf diesem Wege einführt oder noch in die Definition verlegt, jedenfalls muß man sich bewußt werden, daß in dieser Gleichung das Zeichen = unmittelbar nicht dasselbe sagt wie in der Gleichung $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c} + \mathfrak{d} + \mathfrak{e}$, die gilt, wenn die Summationen rechts und links denselben Vektor ergeben. Ist $\mathfrak{a}$ der die Summe $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n$ darstellende Vektor, also $\mathfrak{a} = OA_n$ (Fig. 117), so dürfen wir nunmehr

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}$$

setzen, eine Gleichung, die aussagt, daß die Summation links denselben Vektor $\mathfrak{a}$ ergibt wie die Identitätssetzung der rechten Seite. Deutet man diese Gleichung, wie es auch wohl üblich ist, dahin, daß die Operation links den Vektor $\mathfrak{a}$ „als Resultat ergibt“, so könnte man eine Gleichung wie $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c} + \mathfrak{d} + \mathfrak{e}$ ohne eine Erweiterung dieser Definition nicht lesen.

Auf alle Fälle liegt also eine Änderung der ursprünglichen Begriffe vor. Die alte Definition, daß gleich sei, was sich in allen Urteilen gegenseitig vertreten könne, ist wissenschaftlich unbrauchbar, erstens, weil man nicht alle Urteile im voraus kennt, der Begriff der Gleichheit aber vor allen Urteilen feststehen muß, wenn er zum Hilfsmittel der Erkenntnis werden soll; zweitens, im Sinne dieser Definition nicht einmal $1 + 1 = 2$ ist. Denn in dem Urteile „$1 + 1$ ist ein Binom“ kann $1 + 1$ nicht durch 2 ersetzt werden. Gleichheit gibt es immer nur, wie die mittelalterlichen Philosophen es ausdrückten, „secundum aliquid“, d. h. unter einem ganz bestimmten Gesichtspunkte, im vorliegenden Falle unter dem der geometrischen Summation, und in dieser einen Beziehung ist Gleichheit so viel wie Identität, im vorliegenden Falle Identität der Schlußseiten des Kraftecks.

Die zahlreichen Gleichheitsbegriffe, die man in der Mathematik immer wieder mit demselben Zeichen = bezeichnet, stimmen alle darin überein, daß aus $A = B$, $B = C$ immer $A = C$ folgt. So ist es offenbar auch bei der Summation der Vektoren.

§ 24. Gebundene Vektoren an demselben Angriffspunkte.

1. Bis jetzt waren die Vektoren frei, d. h. unter Wahrung von Länge, Richtung und Sinn beliebig verschiebbar, und alle in diesen drei Bestimmungsstücken übereinstimmenden Vektoren galten als gleich.



Ein Vektor $\mathfrak{a}$ heißt an einen Punkt O, seinen „Angriffspunkt“, „gebunden“, wenn O die einzige mögliche Lage des Anfangspunktes von $\mathfrak{a}$ ist. Den an O gebundenen Vektor $\mathfrak{a}$ bezeichnen wir mit $(\mathfrak{a}, O)$, lies „$\mathfrak{a}$ an O“. Zwei derartige Vektoren $(\mathfrak{a}, O)$ und $(\mathfrak{a}', O')$ sollen nur dann gleich heißen, wenn O' mit O zusammenfällt und $\mathfrak{a}'$ als freier Vektor gleich $\mathfrak{a}$ ist. Um die zwei Arten der Gleichheit, um die es sich hier handelt, die Gleichheit freier und die Gleichheit gebundener Vektoren, wenigstens für den Anfang scharf auseinander zu halten, wollen wir bei gebundenen Vektoren lieber von Äquivalenz sprechen und uns des Äquivalenzzeichens $\simeq$ statt des Gleichheitszeichens bedienen. Nach Definition ist also $(\mathfrak{a}, O) \simeq (\mathfrak{a}', O')$, wenn $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$ und O' mit O zusammenfällt. Genau wie in Artikel 9 des § 23 erweitern wir sofort den Äquivalenzbegriff, indem wir die Summation gebundener Vektoren vom Typus $(\mathfrak{a}, O)$ definieren durch

$$(\mathfrak{a}_1, O) + (\mathfrak{a}_2, O) + \cdots + (\mathfrak{a}_n, O) \simeq (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n, O) \simeq (\mathfrak{a}, O)$$

für

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n,$$

d. h. die an denselben Angriffspunkt gebundenen Vektoren werden wie freie Vektoren summiert, die erhaltene Summe $\mathfrak{a}$ aber wieder an O gebunden. Das geschieht nach § 23 mit Hilfe eines Kraftecks $OA_1A_2 \ldots A_n$, dessen Anfangspunkt man am praktischsten mit O zusammenfallen läßt; die Schlußlinie OA_n des Kraftecks stellt dann den Vektor $(\mathfrak{a}, O)$ in richtiger Lage dar.

2. Nach dem Hauptsatze der Summation freier Vektoren ist auch die Summe an denselben Angriffspunkt gebundener Vektoren von der Reihenfolge der Summation unabhängig, d. h. es gilt bei der Addition das kommutative Gesetz.

Es gilt ferner auch das assoziative Gesetz, das wir ganz allgemein so aussprechen können: Teilt man das System $(\mathfrak{a}_1, O)$, $(\mathfrak{a}_2, O), \ldots, (\mathfrak{a}_n, O)$ in r Gruppen von beliebiger Anordnung und beliebigem Umfang, und bildet man erst die Summe jeder dieser Gruppen, so ist die Summe dieser Teilsummen der Gesamtsumme $(\mathfrak{a}, O)$ des Systems äquivalent. Denn sind etwa $(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k)$, $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$, $(\mu_1, \ldots, \mu_m), \ldots, (\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ die Indizes der $\mathfrak{a}$ in diesen r Gruppen und $OK_1K_2 \ldots K_kL_1L_2 \ldots L_lM_1M_2 \ldots M_mS_1S_2 \ldots S_s$ das Krafteck der n Vektoren in dieser Anordnung, also z. B. $OK_1 = \mathfrak{a}_{\varkappa_1}$, $L_2L_3 = \mathfrak{a}_{\lambda_3}, \ldots,$ so ist $OK_1K_2 \ldots K_k$ ein Krafteck der ersten Gruppe, $K_kL_1L_2 \ldots L_l$ ein solches der zweiten, ..., und die Gesamtsumme OS_s der n Vektoren wird auch erhalten durch Summierung der Vektoren OK_k, K_kL_l, $L_lM_m, \ldots$. Denkt man diese

an O gebunden, so ist also in der Tat $OS_s \simeq \sum_{\varkappa}(\mathfrak{a}_{\varkappa}, O) + \sum_{\lambda}(\mathfrak{a}_{\lambda}, O) + \cdots$, w. z. b. w.

3. Wenn die letzte Ecke A_n des Kraftecks $OA_1 \ldots A_n$ von n Vektoren $(\mathfrak{a}_1, O), \ldots, (\mathfrak{a}_n, O)$ mit der ersten Ecke O zusammenfällt, wenn also $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$ ist, so ist $(\mathfrak{a}_1, O) + (\mathfrak{a}_2\ O) + \cdots + (\mathfrak{a}_n, O) \simeq (\mathfrak{o}, O)$ der an O gebundene Vektor Null.

Fügt man einem System an O gebundener Vektoren noch beliebig viel Systeme der Art $(\mathfrak{o}, O)$ bei, so wird die Summe nicht geändert, denn das ursprüngliche Krafteck $\mathfrak{S}$ wird dann nur durch Zusatzseiten erweitert, die von einer Ecke von $\mathfrak{S}$ ausgehen und zu ihr zurückkehren. — Wir beschränken uns von nun an auf Vektoren, die in einer Ebene liegen.

4. Während so die Summation von Vektoren an demselben Angriffspunkte eine durchaus eindeutige Lösung hat, zu der man allerdings auf unbegrenzt viele Weisen gelangen kann, ist die umgekehrte Aufgabe, einen gegebenen Vektor $(\mathfrak{a}, O)$ als Summe von n (unbekannten) Vektoren $(\mathfrak{a}_1, O), \ldots, (\mathfrak{a}_n, O)$ von gegebenen Richtungen an demselben Anfangspunkte O darzustellen, wie man sofort sieht, für $n \geqq 3$ unbestimmt; man kann dann noch die Längen von $n-2$ Summanden willkürlich vorschreiben. Sind es etwa die $n-2$ letzten und ist $(\mathfrak{b}, O)$ ihre Summe, so hat man noch $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ aus

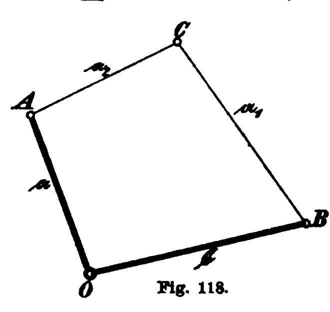


Fig. 118.

$$(\mathfrak{a}, O) \simeq (\mathfrak{b}, O) + (\mathfrak{a}_1, O) + (\mathfrak{a}_2, O)$$

zu bestimmen. Wären $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ bekannt, so hätte man zur Ermittelung von $\mathfrak{a} = \boldsymbol{OA}$ erst $\boldsymbol{OB} = \mathfrak{b}$, $\boldsymbol{BC} = \mathfrak{a}_1$, $\boldsymbol{CA} = \mathfrak{a}_2$ abzutragen; daraus folgt: man mache $\boldsymbol{OB} = \mathfrak{b}$, $\boldsymbol{OA} = \mathfrak{a}$ und ziehe durch B eine Parallele zur gegebenen Richtung von $\mathfrak{a}_1$, durch A eine Parallele zur gegebenen Richtung von $\mathfrak{a}_2$. Ist C der Schnittpunkt dieser Parallelen, so ist $\mathfrak{a}_1 = \boldsymbol{BC}$, $\mathfrak{a}_2 = \boldsymbol{CA}$, und damit ist die Aufgabe der Vektorenzerlegung in diesem Falle gelöst. Die Richtungen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ dürfen nicht übereinstimmend angenommen werden.

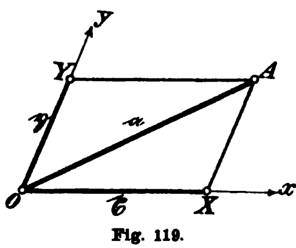


Fig. 119.

Soll $(\mathfrak{a}, O)$ nur in Vektoren von zwei verschiedenen Richtungen x und y zerlegt werden, so ziehe man durch O sowie durch den Endpunkt A von $(\mathfrak{a}, O)$ zu diesen Richtungen die Parallelen. Die in O aneinander stoßenden Seiten $\boldsymbol{OX}$, $\boldsymbol{OY}$ des so entstandenen Parallelogramms lösen dann die Aufgabe.

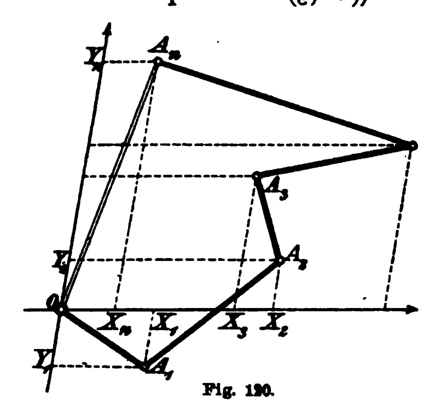
Dieselbe hat also nur eine Lösung: $\boldsymbol{OA} \simeq \boldsymbol{OX} + \boldsymbol{OY}$; die Vektoren $\boldsymbol{OX}$, $\boldsymbol{OY}$ heißen die Komponenten von $\boldsymbol{OA}$ oder $(\mathfrak{a}, O)$ in der x- und in der y-Richtung. Steht y auf x senkrecht, so ist die x-Komponente OX einfach die senkrechte Projektion von OA auf x.

Man benutzt die Zerlegung der an O gebundenen Vektoren in zwei durch O gehende Komponenten zur analytischen Behandlung der Geometrie der Vektoren, die in einer Ebene (x, y) liegen. Der Vektor $(\mathfrak{a}, O)$ wird dann durch seine beiden Komponenten $(\mathfrak{x}, O)$, $(\mathfrak{y}, O)$, wo $\mathfrak{x} = \boldsymbol{OX}$, $\mathfrak{y} = \boldsymbol{OY}$, festgelegt und die weitere Untersuchung nur an den Komponenten geführt. Sind $(\mathfrak{x}_\nu, O)$, $(\mathfrak{y}_\nu, O)$ die Komponenten von $(\mathfrak{a}_\nu, O)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, so hat der Summenvektor

$$(\mathfrak{a}_1, O) + (\mathfrak{a}_2, O) + \cdots + (\mathfrak{a}_n, O) \simeq (\mathfrak{a}, O),$$

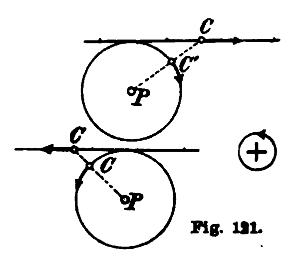
den wir mit $(\mathfrak{a}, O)$ bezeichnen wollen, die Komponenten:

$$(\mathfrak{x}, O) \simeq (\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \cdots + \mathfrak{x}_n, O),$$
$$(\mathfrak{y}, O) \simeq (\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{y}_2 + \cdots + \mathfrak{y}_n, O),$$


Fig. 120.

wie ein Blick auf Figur 120 zeigt. Der Summation oder Zusammensetzung der Vektoren $(\mathfrak{a}_\nu, O)$ entspricht also die algebraische (auf das Vorzeichen Rücksicht nehmende) Addition der Komponenten $\mathfrak{x}_\nu$ und $\mathfrak{y}_\nu$. Man wird bemerken, wenn y senkrecht auf x angenommen wird, daß die an O gebundenen Vektoren der (x, y)-Ebene sich summieren wie komplexe Zahlen $z_\nu = x_\nu + iy_\nu$ in der komplexen Zahlenebene. Der komplexen Zahl z_ν entspricht der Vektor $(\mathfrak{a}_\nu, O) \simeq (\mathfrak{x}_\nu, O) + (\mathfrak{y}_\nu, O)$ (vgl. Bd. I, 1. Aufl., § 47; 2. u. 3. Aufl., § 51).

5. Ein Vektor bestimmt zu jedem Punkte P, der nicht auf ihm liegt, in eindeutiger Weise einen „Drehsinn", den wir den Drehsinn des Vektors in O nennen; legt man nämlich in der durch P und den Vektor gehenden Ebene einen Kreis um P als Zentrum und ordnet jedem Punkte C des Vektors den auf dem Halbstrahl PC liegenden Kreispunkt C' zu, so wird, wenn C den Vektor in seinem Sinne durchläuft, C' den Kreis ebenfalls in einem bestimmten Sinne durchlaufen. Dieser Sinn wird für alle konzentrischen Kreise derselbe sein, entweder bei allen Kreisen dem Uhrzeiger folgen oder ihm entgegengehen. Dem einen Drehsinne ordnet man eines der Zeichen + oder — zu, dem anderen das entgegengesetzte, was in der


Fig. 121.

Figur 121 durch eine kleine Marke in der Weise geschehen ist, daß der Drehung gegen den Uhrzeigersinn das Pluszeichen entspricht (§ 23, 2). An dieser Festsetzung wollen wir festhalten. Drehung gegen den Uhrzeigersinn heißt nach § 23, 2 positiv, in dem Uhrzeigersinn negativ.

Unter dem Drehmoment des Vektors $(\mathfrak{a}, O)$ in dem Punkte P versteht man das Produkt aus der (positiven) Länge a des Vektors und dem (positiven) Abstande des Punktes von $\mathfrak{a}$, versehen mit positivem oder negativem Vorzeichen, je nachdem der Vektor positive oder negative Drehung um P bestimmt. Für die analytische Behandlung ist es bequemer, sich den Sachverhalt so zu denken, daß die Länge a des Vektors $(\mathfrak{a}, O)$ positiv, der Abstand $\mathfrak{a}^P$ des Punktes P von $\mathfrak{a}$ dagegen positiv oder negativ genommen wird, je nachdem der Vektor um P positive oder negative Drehung bestimmt. Den so definierten Abstand a^P nennen wir den Dreharm des Vektors in P. Das Drehmoment des Vektors $(\mathfrak{a}, O)$ im Punkte P ist dann gleich dem Produkte aa^P aus der Länge und dem Dreharm des Vektors in P.

6. Geometrisch läßt sich das Moment aa^P, zunächst abgesehen vom Vorzeichen, deuten als doppelter Inhalt des Dreiecks OAP, das der Punkt mit dem Vektor $(\mathfrak{a}, O) \simeq \boldsymbol{OA}$ bestimmt, siehe Figur 122, 123. Um auch noch das Vorzeichen zu berücksichtigen, beachten wir, daß die Pfeilrichtung von OA auf dem Umfange des Dreiecks OAP einen bestimmten Umlaufssinn OAP festlegt, und den so orientierten Flächeninhalt wollen wir als positiv oder negativ bezeichnen, jenachdem der Umlaufssinn der Figur 122 oder 123 entspricht.

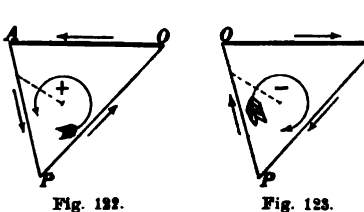


Fig. 122. Fig. 123.

Durchläuft ein Punkt X den Umfang des Dreiecks OAP in dem durch OA festgelegten Sinn, und ist J irgendein Punkt im Innern des Dreiecks, so dreht sich der Strahl JX im Falle 122 positiv, im Falle 123 negativ. Das Vorzeichen des Dreiecksinhaltes entspricht also dem Vorzeichen dieses Drehsinnes.

Wir nehmen jetzt zwei Vektoren $(\mathfrak{a}, O) \simeq \boldsymbol{OA}$ und $(\mathfrak{b}, O) \simeq \boldsymbol{OB}$ an, um ihre Momente in einem derselben Ebene angehörigen Punkte P zu vergleichen mit dem Momente des Vektors $\boldsymbol{OC} \simeq \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}$. Bestimmen alle drei Vektoren in P negative Drehung (wie in Fig. 124), so sind die Abstände a^P, b^P, c^P negativ und daher:

$$-aa^P = 2 \times \text{Dreieck } OAP = OP \cdot h_A,$$
$$-bb^P = 2 \times \text{Dreieck } OBP = OP \cdot h_B,$$
$$-cc^P = 2 \times \text{Dreieck } OCP = OP \cdot h_C,$$

wo h_A, h_B, h_C die positiven Abstände der Punkte A, B, C von OP bezeichnen. Nun ist aber, wie in der Figur 124 ersichtlich gemacht ist,

$$h_C = h_A + h_B, \tag{1}$$

also ist

$$aa^P + bb^P = cc^P. \tag{2}$$

Bestimmen die drei Vektoren in P positive Drehung, so gilt die Formel (1) ebenfalls; denn kehrt man den Sinn von $(\mathfrak{a}, O)$ und $(\mathfrak{b}, O)$ in $(\bar{\mathfrak{a}}, O)$ und $(\bar{\mathfrak{b}}, O)$ um, so kehrt sich auch der von $(\mathfrak{c}, O)$ um, die Vektoren

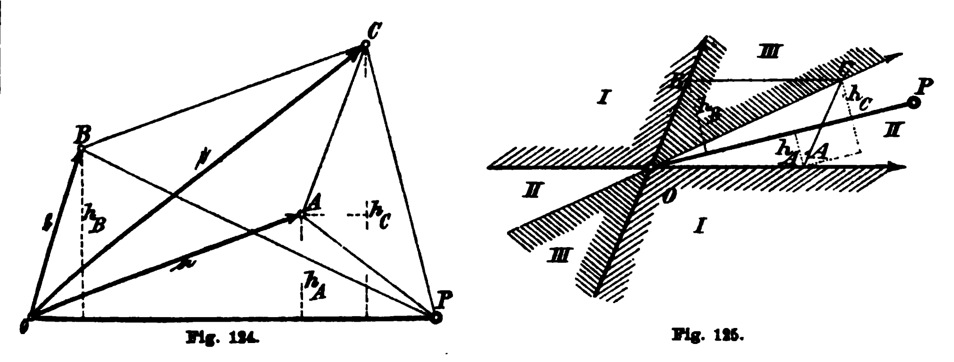


Fig. 124. Fig. 125.

bestimmen dann in P negative Drehung, und es ist $a\bar{a}^P + b\bar{b}^P = c\bar{c}^P$. Da aber $\bar{a}^P = -a^P$, $\bar{b}^P = -b^P$, $\bar{c}^P = -c^P$, so bleibt Formel (1) auch in diesem Falle richtig und gilt folglich in dem Gebiete I der Figur 125.

Ist in P der Drehsinn von $(\mathfrak{a}, O)$ positiv, der von $(\mathfrak{b}, O)$ und $(\mathfrak{c}, O)$ negativ, so sind in (1) h_B, h_C durch $-h_B, -h_C$ zu ersetzen (Fig. 125). Da jetzt aber $bb^P = -OP \cdot h_B$, $cc^P = -OP \cdot h_C$ wird, so bleibt (2) richtig. Kehrt man, wie soeben, den Sinn von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ um, so bleibt (2) immer noch bestehen und gilt somit auch im Gebiete II der Figur. Da $\mathfrak{a}$ vor $\mathfrak{b}$ keinen Vorzug hat, so gilt sie auch im dritten Gebiete der Figur und damit allgemein.

7. Diese Formel läßt sich noch verallgemeinern. Ist in einer Ebene

$$(\mathfrak{a}_1, O) + (\mathfrak{a}_2, O) + \cdots + (\mathfrak{a}_n, O) \simeq (\mathfrak{a}, O)$$

gegeben und $(\mathfrak{c}_\nu, O) \simeq (\mathfrak{a}_1, O) + \cdots + (\mathfrak{a}_\nu, O)$, so ist nach (2):

$$a_1 a_1^P + a_2 a_2^P = c_2 c_2^P, \quad c_2 c_2^P + a_3 a_3^P = c_3 c_3^P, \ldots,$$
$$c_{n-1} c_{n-1}^P + a_n a_n^P = c_n c_n^P = aa^P,$$

also

$$(3)\qquad \begin{aligned} a a^P &= a_1 a_1^P + a_2 a_2^P + \cdots + a_n a_n^P, \\ a &= |\,\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n\,|, \end{aligned}$$

wenn allgemein $|\,\mathfrak{z}\,|$ die Länge von $\mathfrak{z}$ bezeichnet. So ergibt sich der „Momentensatz“:

> Das Moment einer Summe von Vektoren an demselben Angriffspunkte und in derselben Ebene, bezogen auf einen beliebigen Drehpunkt P in dieser Ebene, ist gleich der Summe der Momente der einzelnen Summanden, bezogen auf denselben Drehpunkt.

Es kann nicht beirren, daß hier das Wort Summe das eine Mal eine geometrische, im zweiten eine algebraische Summe bedeutet, da Vektoren nicht algebraisch, Momente nicht geometrisch summiert werden; in der vorgetragenen Form prägt sich der Satz am leichtesten dem Gedächtnis ein.

8. Wie man auf Grund der Ausführungen des Artikels 4 die Länge des Vektors $(\mathfrak{a}, O)$ aus den Komponenten $\mathfrak{x}_\nu$, $\mathfrak{y}_\nu$ der Vektoren $(\mathfrak{a}_\nu, O)$ berechnet, wenn noch die Neigungswinkel der $\mathfrak{a}_\nu$ gegen die x gegeben sind, kann man aus Bd. II, § 58, 1 unmittelbar ersehen. Erinnert man sich, daß die Hessesche Normalform der Gleichung einer Geraden $\mathfrak{a}$ in einer Ebene η, wenn man die Koordinaten x, y eines nicht auf $\mathfrak{a}$ liegenden Punktes P einsetzt, den Abstand dieses Punktes P von $\mathfrak{a}$ mit einem bestimmten Vorzeichen angibt (Bd. II, § 57), so wird man auf eine einfache analytische Darstellung des Dreharmes und des Momentes geführt, die wir noch in bequemere Form bringen wollen. Ist $\mathfrak{a}$ die Gerade, auf der der Vektor $(\mathfrak{a}, \Omega)$ liegt (Fig. 126a, 126b), so fällen wir vom Koordinatenanfang O auf $\mathfrak{a}$ das Lot OF und legen ihm den Sinn (O, F) oder (F, O) bei, je nachdem $\mathfrak{a}$ um O positive oder negative Drehung bestimmt. Der Dreharm a^0 wird also im Sinne (O, F) positiv oder negativ gemessen, je nachdem positive oder negative Drehung vorliegt. Als Neigungswinkel α des so orientierten Lotes gegen die x-Achse betrachten wir den Winkel, durch den man die $+x$-Achse um O positiv

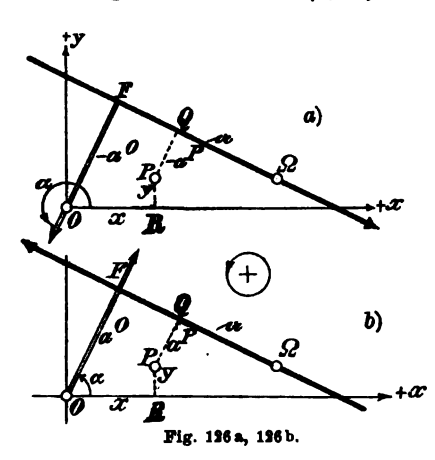


Fig. 126a, 126b.

drehen muß, bis die $+x$-Richtung mit der des Lotes zusammenfällt. Fällt man noch von einem Punkte P der Ebene auf $\mathfrak{a}$ und die x-Achse die Lote PQ, PR, von denen das erste als Dreharm an P, das andere als Ordinate mit Vorzeichen gemessen werde, so haben die Seiten des Streckenzuges $ORPQ$ sowie seine Orthogonalprojektion OF die in den Figuren 126a, 126b, angegebenen absoluten Längen. Daher ist in Figur 126a:

$$-a^O = x\cos(\alpha - 180^0) + y\sin(\alpha - 180^0) - a^P$$

oder

$$a^P = a^O - x\cos\alpha - y\sin\alpha;$$

in Figur 126b:

$$a^O = x\cos\alpha + y\sin\alpha + a^P$$

oder

$$a^P = a^O - x\cos\alpha - y\sin\alpha;$$

also in beiden Fällen übereinstimmend:

$$a^P = a^O - x\cos\alpha - y\sin\alpha. \tag{4}$$

Nach dieser Formel ist also der Dreharm a^P des Vektors $(\mathfrak{a}, \Omega)$ an P zu berechnen, wenn der Dreharm a^O am Anfangspunkte der Koordinaten sowie seine Neigung α gegen die x-Achse gegeben sind.

Liegt P auf $\mathfrak{a}$, so ist der Dreharm gleich Null, und

$$a^O - x\cos\alpha - y\sin\alpha = 0 \tag{5}$$

ist daher die Gleichung der Geraden $\mathfrak{a}$, auf welcher der Vektor liegt.

Diese Gleichung befindet sich in der Hesseschen Normalform, und wir wollen den Ausdruck $a^P = a^O - x\cos\alpha - y\sin\alpha$, der mit den Koordinaten eines nicht auf $\mathfrak{a}$ liegenden Punktes P der Ebene gebildet ist, die Hessesche Normalform von $\mathfrak{a}$ nennen.

9. Sind jetzt in der Ebene mehrere Vektoren $(\mathfrak{a}_1, \Omega), \ldots, (\mathfrak{a}_n, \Omega)$ an einem Angriffspunkte Ω gegeben und ist $(\mathfrak{a}, \Omega)$ ihre Summe, α_ν der Neigungswinkel des Lotes a_ν^O gegen die $+x$-Richtung nach den Bestimmungen des Artikels 8, so ist

$$a_\nu^P = a_\nu^O - x\cos\alpha_\nu - y\sin\alpha_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Daraus berechnet sich a^P nach (3) durch die Formel

$$aa^P = a_1 a_1^P + \cdots + a_n a_n^P = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu a_\nu^O - x\sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu \cos\alpha_\nu - y\sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu \sin\alpha_\nu, \tag{7}$$
$$a = |\mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_n|,$$

wiederum in der Hesseschen Normalform, vorausgesetzt, daß a nicht verschwindet, wo a^P unbestimmt wird.

§ 25. Linienflüchtige Vektoren.

1. Wenn zwei Vektoren an verschiedene Angriffspunkte gebunden sind, so lassen sie sich nach unseren bisher verabredeten Operationsregeln nicht zueinander in Beziehung setzen. Um das zu ermöglichen, erschaffen wir eine neue Art von gebundenen Vektoren, die wir „linienflüchtige" nennen. Ein Vektor heißt linienflüchtig, wenn er auf einer bestimmten Geraden, seiner „Angriffslinie", liegen muß, auf dieser aber beliebig verschoben werden kann. Der an eine Angriffslinie x gebundene Vektor $\mathfrak{a}$ werde mit $(\mathfrak{a}, x)$, lies „$\mathfrak{a}$ auf x", bezeichnet. Er läßt sich auffassen als ein Vektor $(\mathfrak{a}, O)$, dessen Angriffspunkt O auf x verschiebbar ist; die an Angriffspunkte gebundenen Vektoren gehen in die an Angriffslinien gebundenen über durch das Verschiebungsaxiom (Axiom A), daß der Angriffspunkt auf der den Vektor enthaltenden Geraden (zum Zweck der Summierung) frei verschoben werden darf. Hat man mehrere linienflüchtige Vektoren an denselben Angriffspunkt verlegt, so sollen sie dort summiert werden wie Vektoren, die an einen Punkt gebunden sind, und es soll dabei erlaubt sein:

I. dem gegebenen System $\mathfrak{S}$ noch Systeme von (linienflüchtigen) Vektoren an bestimmten Angriffspunkten zuzufügen, wenn in jedem dieser Punkte die Summe der zugefügten Vektoren verschwindet — Axiom der Zufügbarkeit sich „hebender" Systeme (Axiom B),

II. jeden linienflüchtigen Vektor an einem bestimmten Angriffspunkte O zu ersetzen durch irgend ein System von linienflüchtigen Vektoren an O, das jenen Vektor zur Summe hat — Axiom der Zerlegbarkeit (Axiom C).

Man kann übrigens das Axiom B als in C enthalten ansehen, wenn man die sich hebenden Systeme als Zerlegung der Null ansieht und die Zufügbarkeit der Null mit Axiom C ausdrücklich postuliert.

2. Es ist zu untersuchen, ob bei dieser großen Freiheit der Konstruktion überhaupt noch etwas herauskommt, das sich wie eine Summe der gegebenen Vektoren verhält. Wir beschränken uns dabei auf Vektoren in derselben Ebene η, und zwar sollen alle Vektoren in dieser Ebene linienflüchtig sein.

Indem wir den Gleichheitsbegriff uns wiederum für die freien Vektoren vorbehalten, wollen wir die für linienflüchtige Vektoren zu definierende Gleichheit, wie bei den gebundenen (§ 24, 1), als „Äqui-

valenz“ (mit dem Zeichen $\simeq$) benennen. Es soll nur dann $(\mathfrak{a}, x) \simeq (\mathfrak{b}, y)$ heißen, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ und x mit y identisch ist, d. h. wenn die freien Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gleich sind und auf derselben Angriffslinie liegen; auf dieser dürfen sie aber an verschiedenen Stellen liegen. Um diese Definition nicht wiederholt erweitern zu müssen, definieren wir gleich allgemein:

Ein System $\mathfrak{S}$ von linienflüchtigen Vektoren in einer Ebene, das auch aus einem einzigen Vektor bestehen kann, heißt einem anderen System $\mathfrak{T}$ dieser Ebene äquivalent, $\mathfrak{S} \simeq \mathfrak{T}$, wenn sich $\mathfrak{S}$ auf Grund der Axiome A, B, C und der Summationsgesetze der gebundenen Vektoren in $\mathfrak{T}$ überführen läßt.

3. Von der Äquivalenz gelten die wichtigen Sätze:

Satz 1. Wenn $\mathfrak{S} \simeq \mathfrak{T}$, so ist auch $\mathfrak{T} \simeq \mathfrak{S}$.

Satz 2. Wenn $\mathfrak{S} \simeq \mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}' \simeq \mathfrak{T}$, so ist auch $\mathfrak{S} \simeq \mathfrak{S}'$.

Wenn $\mathfrak{S}$ durch Anwendung der Axiome A, B, C in $\mathfrak{T}$ übergeht, so soll sich auch $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{S}$ zurückverwandeln lassen. Die Verwandlung von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{T}$ geschieht:

a) durch Verschiebung des einen Vektors $\boldsymbol{OA}$ auf der Geraden OA in die Lage $\boldsymbol{O'A'}$; man erreicht dasselbe Resultat, wenn man erst zu $\boldsymbol{OA}$ den entgegengesetzten Vetor $\boldsymbol{O\bar{A}}$ addiert und $\boldsymbol{O'A'} = \boldsymbol{OA}$ hinzufügt; $\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{O\bar{A}} = \mathfrak{o}$, und $\boldsymbol{O'A'}$ bleibt übrig; die Verschiebung kann also durch Addition erzeugt werden;

b) durch Anwendung des Axioms B; diese wird ebenfalls ihrer Definition nach durch Addition erreicht;

c) durch Anwendung des Axioms C; die Auflösung von $(\mathfrak{a}, O)$ in $(\mathfrak{a}_1, O) + \cdots + (\mathfrak{a}_n, O)$ wird erreicht, indem man zu $(\mathfrak{a}, O)$ die Vektoren $(\bar{\mathfrak{a}}, O)$, $(\bar{\mathfrak{a}}_1, O), \ldots, (\bar{\mathfrak{a}}_n, O)$ addiert.

Der Übergang von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{T}$ kann also durch eine Reihe von Additionen erreicht werden. Um also $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{S}$ zurückzuführen, füge man zu $\mathfrak{T}$ den letzten Summanden mit umgekehrtem Sinn, dann ebenso den vorletzten, ..., schließlich den ersten, ebenfalls mit umgekehrtem Sinn, und es bleibt $\mathfrak{S}$ übrig.

Wenn man $\mathfrak{S}$ nach Satz 2 in $\mathfrak{T}$ verwandelt hat, führe man $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{S}'$ über; durch Aneinanderreihen beider Operationen geht $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}'$ über, und dann ist nach Satz 1 auch $\mathfrak{S}'$ in $\mathfrak{S}$ umformbar.

4. Sind nun in η zwei Vektoren $(\mathfrak{a}, x)$ und $(\mathfrak{b}, y)$ gegeben, deren Angriffslinien x, y sich in einem Punkte C schneiden, so ist bei der

Summation erlaubt, die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ auf x und y nach C als Anfangspunkt zu verschieben, d. h. sie durch $(\mathfrak{a}, C)$ und $(\mathfrak{b}, C)$ zu ersetzen. Als Vektoren an C können dann $(\mathfrak{a}, C)$ und $(\mathfrak{b}, C)$ nach § 24 zu einem Vektor CC' an C zusammengesetzt werden, der nun wieder auf der Geraden CC' verschiebbar ist und mit einem weiteren Vektor $(\mathfrak{c}, z)$, dessen Angriffslinie z die Gerade CC' in einem Punkte Z trifft, zusammengesetzt werden kann: Man mache $ZZ' = CC'$ und $Z'S = \mathfrak{c}$; dann ist also der Vektor ZS, gebunden an die Gerade ZS, das Ergebnis der Summation von $(\mathfrak{a}, x)$, $(\mathfrak{b}, y)$ und $(\mathfrak{c}, z)$ (Fig. 127).

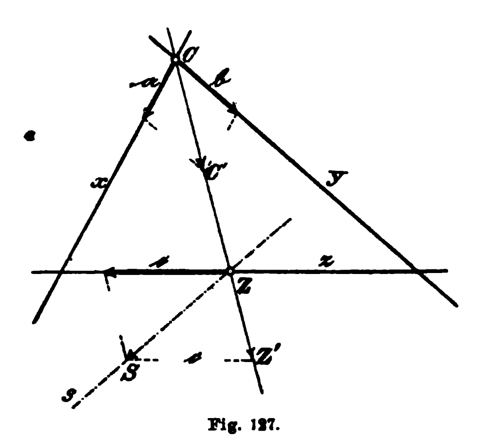


Fig. 127.

Unter Erweiterung des Äquivalenzbegriffes wie in § 24, 1 setzen wir:

$$(\mathfrak{a}, x) + (\mathfrak{b}, y) + (\mathfrak{c}, z) \simeq (ZS, ZS).$$

Nun war $CC' = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $ZS = ZZ' + Z'S = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$, und wenn wir die Gerade ZS mit s bezeichnen, so ist demnach

$$(\mathfrak{a}, x) + (\mathfrak{b}, y) + (\mathfrak{c}, z) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}, s).$$

5. Das geht so weiter, wenn noch mehr Vektoren in der Ebene η gegeben sind, vorausgesetzt, daß immer die zuletzt erhaltene Angriffslinie von der des zunächst zu addierenden Vektors geschnitten wird. Sind dagegen die Angriffslinien u, v zweier Vektoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ parallel, so versagt die Methode und überhaupt das Axiom A.

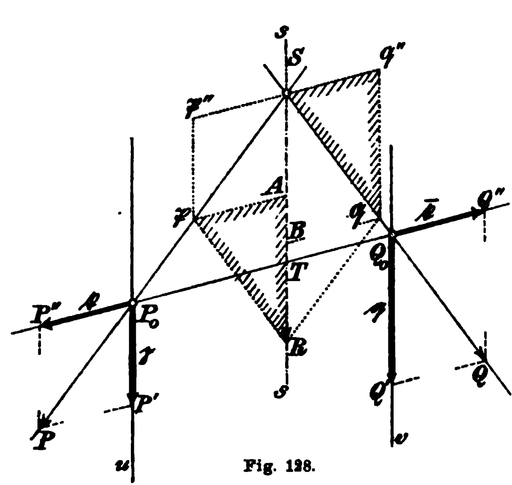


Fig. 128.

In diesem Falle führt das Axiom der Zufügbarkeit sich hebender Systeme zum übersichtlichen Resultate (Figur 128). Man fixiert auf u und v irgendwo Angriffspunkte P_0, Q_0 von $(\mathfrak{p}, u)$ und $(\mathfrak{q}, v)$, macht $P_0P' = \mathfrak{p}$, $Q_0Q' = \mathfrak{q}$ und fügt zwei Vektoren $\mathfrak{k}$ und $\overline{\mathfrak{k}}$ von beliebiger Länge $\mathfrak{k}$ auf P_0Q_0 als Angriffslinie hinzu:

$$P_0P'' = \mathfrak{k}, \; Q_0Q'' = \overline{\mathfrak{k}}.$$

Ist jetzt

$$\boldsymbol{P_0P} = \boldsymbol{P_0P'} + \boldsymbol{P_0P''} = \mathfrak{p} + \mathfrak{k}, \quad \boldsymbol{Q_0Q} = \boldsymbol{Q_0Q'} + \boldsymbol{Q_0Q''} = \mathfrak{q} + \bar{\mathfrak{k}}$$

und schneiden sich die Geraden P_0P und Q_0Q in einem (im Endlichen gelegenen) Punkte S, so kann man $\boldsymbol{P_0P}$ und $\boldsymbol{Q_0Q}$ an S als Anfangspunkt verlegen und dort summieren. Sei etwa $\boldsymbol{S\mathfrak{P}} = \boldsymbol{P_0P}$, $\boldsymbol{S\mathfrak{Q}} = \boldsymbol{Q_0Q}$ und $\boldsymbol{SR} = \boldsymbol{S\mathfrak{P}} + \boldsymbol{S\mathfrak{Q}}$, so hat der Vektor $\boldsymbol{SR}$, gebunden an die Gerade SR, die s heißen möge, als Summe des Systems $(\mathfrak{p}, u)$, $(\mathfrak{q}, v)$ zu gelten, und wir setzen, unter abermaliger Erweiterung des Äquivalenzbegriffes (durch Axiom C):

$$(\mathfrak{p},\ u) + (\mathfrak{q},\ v) \simeq (\boldsymbol{SR},\ s).$$

Ist nun $\boldsymbol{S\mathfrak{P}''} = \boldsymbol{P_0P''} = \mathfrak{k}$, $\boldsymbol{S\mathfrak{Q}''} = \boldsymbol{Q_0\bar{Q}''} = \mathfrak{k}$, wo also $\mathfrak{P}''$, S, $\mathfrak{Q}''$ auf einer Parallelen zu P_0Q_0 liegen, so ist $\boldsymbol{\mathfrak{P}''\mathfrak{P}} = \mathfrak{p}$, $\boldsymbol{\mathfrak{Q}''\mathfrak{Q}} = \mathfrak{q}$, und wenn man noch $\boldsymbol{SA} = \mathfrak{P}''\mathfrak{P}$, $\boldsymbol{SB} = \mathfrak{Q}''\mathfrak{Q}$ abträgt, so ist $\boldsymbol{SA} = \mathfrak{p}$,

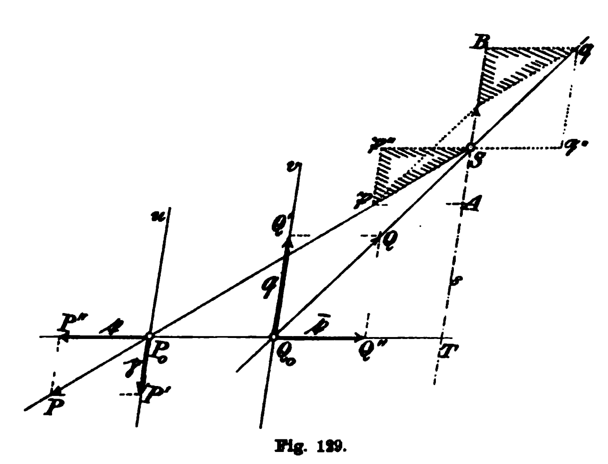


Fig. 129.

$\boldsymbol{SB} = \mathfrak{q}$. Also liegen A und B auf der Parallelen durch S zu u (und v). Jetzt ist

$$\boldsymbol{SR} = \boldsymbol{S\mathfrak{P}} + \boldsymbol{S\mathfrak{Q}} = \boldsymbol{SA} + \boldsymbol{S\mathfrak{P}''} + \boldsymbol{SB} + \boldsymbol{S\mathfrak{Q}''} = \boldsymbol{SA} + \boldsymbol{SB} = \mathfrak{p} + \mathfrak{q},$$

d. h. die genannte Parallele ist die Angriffslinie s von $\boldsymbol{SR}$. Diese trifft P_0Q_0 in einem Punkte T, so daß

$$P_0T : TQ_0 = \left(\frac{P_0T}{TS}\right) : \left(\frac{TQ_0}{TS}\right) = \left(\frac{k}{p}\right) : \left(\frac{k}{q}\right) = q : p$$

ist. Dabei liegt T zwischen den Punkten P_0, Q_0 oder nicht, je nachdem $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ gleichen oder entgegengesetzten Sinn haben.

6. Es bleibt noch der Ausnahmefall zu untersuchen, daß auch $\boldsymbol{P_0P}$ und $\boldsymbol{Q_0Q}$ parallel ausfallen. Das kann natürlich nur eintreten,

wenn $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ entgegengesetzten Sinn haben. Der Teilpunkt T fällt dann auf $P_0 Q_0$ ins Unendliche, was voraussetzt, daß die Längen p und q einander gleich sind. Ist das nicht der Fall, so kann man T auf $P_0 Q_0$ direkt durch das Teilverhältnis $P_0 T : T Q_0 = q : p$ ermitteln, durch T zu u die Parallele s ziehen und auf ihr den Vektor $\mathfrak{p} + \mathfrak{q}$ auftragen. Eine einfache Lösung dieser Aufgabe zeigen die Figuren 130 und 131, die wohl ohne weitere Erklärung verständlich sind. So folgt:

Wenn die Angriffslinien u, v zweier Vektoren $(\mathfrak{p}, u)$, $(\mathfrak{q}, v)$ parallel sind und $\mathfrak{p} + \mathfrak{q}$ nicht verschwindet, so ist

$$(\mathfrak{p}, u) + (\mathfrak{q}, v) \simeq (\mathfrak{p} + \mathfrak{q}, s),$$

wo die Gerade s zu u und v parallel verläuft und den Abstand der Geraden u, v innen oder außen im umgekehrten Verhältnis der

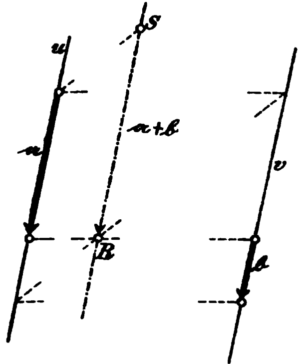


Fig. 130.

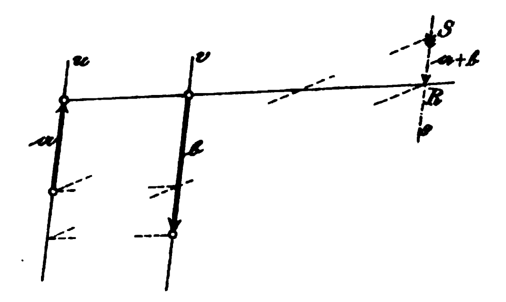


Fig. 131.

Längen p, q teilt, je nachdem die Vektoren $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ gleichen oder entgegengesetzten Sinn haben.

Das gilt zunächst nur bei der angegebenen Anordnung der Konstruktion. Außerdem ist uns noch ein Fall verblieben, in dem auch dieses Verfahren versagt: der Fall $\mathfrak{p} + \mathfrak{q} = \mathfrak{o}$. Liegen in diesem Falle nicht $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ auf derselben Angriffslinie, so lassen sich die zwei Vektoren nicht zu einem einzigen summieren. Man sagt, zwei Vektoren $(\mathfrak{a}, x)$ und $(\bar{\mathfrak{a}}, y)$ mit parallelen Angriffslinien bilden ein Gegenpaar, und zwar ein eigentliches oder uneigentliches, je nachdem die Angriffslinien verschieden sind oder zusammenfallen. Nimmt man $\mathfrak{q} = \bar{\mathfrak{p}} + \mathfrak{e}$ an, wo $\mathfrak{e}$ sehr klein ist, so fällt in Figur 129 der Teilpunkt T sehr fern, und es ist $(\mathfrak{p}, u) + (\mathfrak{q}, v) = (\mathfrak{e}, s)$. Indem man $\mathfrak{e}$ sich unbegrenzt der Null nähern läßt, folgt:

Als Summe eines Gegenpaares $(\mathfrak{a}, x)$, $(\bar{\mathfrak{a}}, y)$, $x \| y$, kann man einen Vektor von der Länge Null auf der ∞ fernen Geraden auffassen.

Da man nämlich in der Euklidischen Geometrie genötigt ist, nur eine einzige unendlich ferne Gerade anzunehmen, so kann man nicht noch fordern, daß die Angriffslinie zu x und y parallel und für Gegenpaare verschiedener Richtung verschieden sei; die unendlich ferne Gerade ist allen Geraden der Ebene parallel.

7. Diese Auffassung der Summe des Gegenpaares macht zwar das Versagen der Summenbildung begreiflich, ist aber im übrigen praktisch wertlos, da diese Summe durch ihre Größe Null und die unendlich ferne Angriffslinie nicht bestimmt ist.

8. Ein Gegenpaar kann, auf Grund der Axiome A, B, C, seine Gestalt in der mannigfachsten Weise ändern. Ist (Fig. 132) $(\mathfrak{a}, x)$ $(\bar{\mathfrak{a}}, y)$ ein Gegenpaar, und zieht man in der Ebene irgend zwei Parallelen u, v, von denen u die Gerade x, v die Gerade y in einem Punkte O und O' schneide, und zerlegt man $OA = \mathfrak{a}$, $O'A' = \bar{\mathfrak{a}}$ nach den Richtungen u, v und OO' in

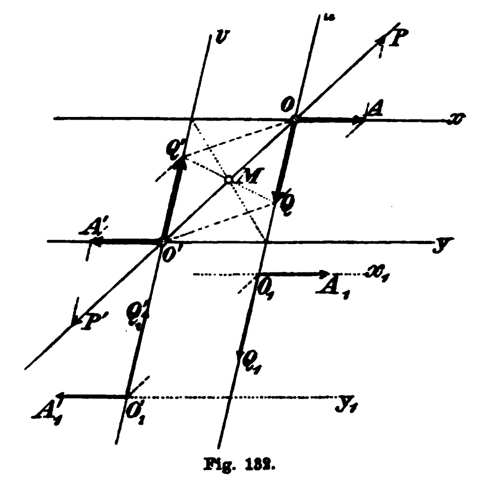


Fig. 132.

$$OA = OQ + OP,$$
$$O'A' = O'Q' + O'P',$$

so fallen auf OO' entgegengesetzte Vektoren OP, $O'P'$, die einander aufheben; also ist das Gegenpaar $(\mathfrak{a}, x)$, $(\bar{\mathfrak{a}}, y)$ äquivalent dem System OQ, $O'Q'$, das ebenfalls ein Gegenpaar bildet. Verlegt man OQ, $O'Q'$ auf u, v nach O_1Q_1, $O_1'Q_1'$, so daß aber $O_1O_1' = OO'$ wird, so läßt sich das Paar O_1Q_1, $O_1'Q_1'$ unter anderem umformen in $O_1A_1 = OA$, $O_1'A_1' = O'A'$, d. h.:

Man kann ein Gegenpaar $(\mathfrak{a}, x)$, $(\bar{\mathfrak{a}}, y)$ beliebig parallel zu sich verschieben.

Man wird nun zunächst nach solchen Eigenschaften des Gegenpaares fragen, die bei allen diesen Umformungen erhalten oder invariant bleiben. Da $QA \parallel OO'$, so ist

also auch Dreieck OQO' = Dreieck OAO',

Parallelogramm $OQO'Q'$ = Parallelogramm $OAO'A'$.

Das ist also eine Invariante des Gegenpaares. Sie läßt sich leicht

auf das Moment der Vektoren des Gegenpaares in irgendeinem Drehpunkt M zurückführen. Macht man nämlich $MN = OA$ (Fig. 133), so ist das Parallelogramm $OANM$ gleich dem Produkte aus OA und dem Abstande des Punktes M von OA, stellt also bis auf das Vorzeichen das Moment von OA in M dar; also ist:

$$\text{Mom. von } OA \text{ in } M = \quad \varepsilon \cdot OANM,$$
$$\text{Mom. von } O'A' \text{ in } M = -\varepsilon \cdot O'A'M'N',$$

wo ε gleich $+1$ oder -1 ist, je nachdem OA in M positive oder negative Drehung bestimmt. Also ist:

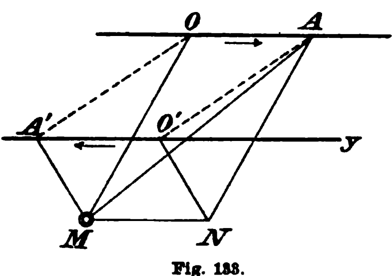


Fig. 133.

$$\begin{aligned} &\text{Mom. von } OA \text{ in } M \\ &+ \text{Mom. von } O'A' \text{ in } M \\ &= \varepsilon\,(OANM - O'A'M'N') \\ &= \varepsilon \cdot OAO'A'. \end{aligned}$$

Diese Tatsachen legen es nahe, den Begriff des Momentes auch auf linienflüchtige Vektoren auszudehnen, indem man als Moment von $(\mathfrak{a}, x)$ in P das Produkt aus der Länge des Vektors und seinem (orientierten) Dreharm in P definiert, wie in § 24, 5.

9. Dann folgt:

Die Summe der Momente der beiden Vektoren OA, $O'A'$ eines Gegenpaares ist von der Lage des Drehpunktes, auf den diese Momente bezogen werden, ganz unabhängig und heißt „das Moment des Gegenpaares". Dieses Moment ist auch unabhängig von der Lage, die man den Vektoren auf ihren Angriffslinien erteilt.

Legt man dem Flächeninhalt des Parallelogramms $OAO'A'$, das das Gegenpaar OA, $O'A'$ bestimmt, positives oder negatives Zeichen bei, je nachdem das Paar auf dem Umfang des Parallelogramms positive oder negative Drehung festlegt, so ist der so „orientierte" Flächeninhalt gleich dem Moment des Gegenpaares.

Zur Figur 132 zurückkehrend, an der wir die Gleichheit der Parallelogramme $OQO'Q'$ und $OAO'A'$ bemerkt haben, werden wir nur noch nachsehen müssen, wie es mit dem Umlaufsinne dieser Parallelogramme steht. Beide Parallelogramme haben denselben Mittelpunkt M, und da OA und OQ beide auf derselben Seite von MO liegen, so haben beide Flächen gleichen Drehsinn, d. h. das Moment

$OAO'A'$ des Paares OA, $O'A'$ ist gleich dem Moment $OQO'Q'$ des äquivalenten Paares OQ, $O'Q'$. In diesem speziellen Falle gilt also der Satz:

Äquivalente Gegenpaare in derselben Ebene haben gleiches Moment.

Da aber das Moment aa^P eines Vektors $(\mathfrak{a}, x)$ in einem Punkte P bei der Verschiebung von $\mathfrak{a}$ auf x seinen Wert nicht ändert, so ist das Moment eine Invariante gegenüber der nach Axiom A zulässigen Verschiebung. Nach dem Momentensatz ist aa^P aber auch invariant gegenüber den Umformungen des Vektors $(\mathfrak{a}, x)$, die nach Axiom B und C möglich sind. Durch Änderungen auf Grund der Axiome A, B, C geht also jedes Gegenpaar in ein solches mit demselben Moment über, und damit ist die allgemeine Gültigkeit des Satzes bewiesen, der sich, wie man sieht, sofort verallgemeinern läßt:

Äquivalente Systeme linienflüchtiger Vektoren in derselben Ebene haben gleiche Momentensummen.

So erweist sich also die Momentensumme eines Systemes als eine wichtige Invariante, die speziell beim Gegenpaar vollkommen ausreicht, um dasselbe zu bestimmen, denn wie wir in 7. gesehen haben, ist das Gegenpaar parallel verschiebbar; nimmt man aber in Figur 132 den Abstand von u, v gleich dem von x, y, so wird das Parallelogramm $OQO'Q'$ mit dem ihm gleichen $OAO'A'$ in der Höhe und folglich in der Grundlinie übereinstimmen: $OQ = OA$, d. h.: Ein Gegenpaar kann in der Ebene beliebig verschoben und gedreht werden, wenn nur der Abstand der Angriffslinien erhalten bleibt. Wie man auch noch diesen abändern kann, zeigt Figur 132, wo man O_1 und O_1' auf u, y beliebig annehmen darf. So ist also in der Tat nur das Moment das Bleibende am Gegenpaar.

10. Nach dieser ausführlichen Untersuchung des Systems zweier Vektoren gehen wir nun zu Systemen beliebigen Umfanges über.

Wenn bei dem Verfahren der schrittweisen Summation, das in Artikel 4 auseinandergesetzt ist, der Fall vorkommt, daß der zunächst zu summierende Vektor mit der schon konstruierten Summe der vorangehenden Vektoren gerade ein Gegenpaar bildet, so wird man sich mit Hilfe der Axiome A, B, C zwar auf mannigfache Weise helfen können; doch wird gegenüber der Menge von Besonderheiten, die immer wieder den Gang der Konstruktion stören können, ein Verfahren erwünscht sein, das niemals versagt.

Für unsere zunächst auf begriffliche Sicherung der Resultate gehende Untersuchung reicht folgende Überlegung aus:

Sind in der Ebene η etwa die Vektoren $(\mathfrak{a}_1, x_1), \ldots, (\mathfrak{a}_n, x)$ zu summieren, so legen wir durch irgendeinen Punkt O der Ebene — praktisch wird man ihn so wählen, daß möglichst viel Angriffslinien durch ihn gehen — zu den Angriffslinien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Parallelen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ und ziehen durch O eine von allen diesen Geraden α verschiedene Gerade u und dazu noch in beliebigem (endlichen) Abstand eine Parallele v (Fig. 134). Dann werden die Geraden u und v zu keiner der Geraden x_ν parallel sein, also wird v von jeder Geraden x_ν in einem eigentlichen Punkte V_ν geschnitten werden. Diesen dürfen wir zum Zweck der Summation zum Anfangspunkt von $\mathfrak{a}_\nu$ machen (Axiom A). Wir verbinden nun O mit V_ν und zerlegen $(\mathfrak{a}_\nu, V_\nu)$ nach den Komponenten $V_\nu W_\nu$ und $V_\nu U_\nu$ auf den Geraden $O V_\nu$ und v; nach Axiom B dürfen wir dann $(\mathfrak{a}_\nu, V_\nu)$ durch $V_\nu W_\nu$ und $V_\nu U_\nu$ ersetzen. Diesen letzten Vektor, den wir mit $(\mathfrak{v}_\nu, v)$ bezeichnen, lassen wir ungeändert, $V_\nu W_\nu$ dagegen wird nach Axiom A auf $V_\nu O$ an O verschoben, dort aber nach Axiom B sofort wieder in zwei Komponenten parallel zu x_ν und v zerlegt. Die Komponenten sind gleich $\mathfrak{a}_\nu$ und $\bar{\mathfrak{v}}_\nu$.

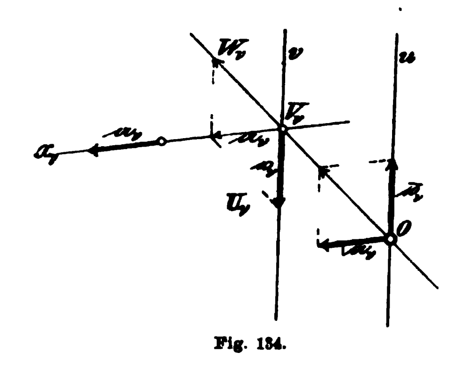


Fig. 134.

11. Damit haben wir also erreicht, daß $(\mathfrak{a}_\nu, x_\nu)$ ersetzt ist durch $(\mathfrak{a}_\nu, O)$ und das Gegenpaar $(\mathfrak{v}_\nu, v)$, $(\bar{\mathfrak{v}}_\nu, u)$ auf den ein für alle Mal festgelegten Angriffslinien u, v. Wir können also alle Vektoren $(\mathfrak{a}_\nu, x_\nu)$ wie freie Vektoren behandeln und an einen beliebigen Angriffspunkt O verlegen, wenn wir nur auf u und v zur Kompensation geeignete Gegenpaare anbringen. Jetzt lassen sich die an O gebundenen Vektoren ohne weiteres zu der Summe $(\mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_n, O) \simeq (\mathfrak{a}, O)$ vereinigen, die Vektoren auf u und v je zu der Summe $(\bar{\mathfrak{v}}_1 + \bar{\mathfrak{v}}_2 + \cdots + \bar{\mathfrak{v}}_n, u) \simeq (\bar{\mathfrak{v}}, u)$ und $(\mathfrak{v}_1 + \cdots + \mathfrak{v}_n, v) \simeq (\mathfrak{v}, v)$, wenn $\mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{v}_1 + \cdots + \mathfrak{v}_n = \mathfrak{v}$ gesetzt wird.

Die Summation des Systems $\mathfrak{S}$ der Vektoren $(\mathfrak{a}_1, x_1), \ldots, (\mathfrak{a}_n, x_n)$ ist jetzt zurückgeführt auf die von $(\mathfrak{a}, O)$, $(\bar{\mathfrak{v}}, u)$, $(\mathfrak{v}, v)$. Ist $\mathfrak{a}$ von Null verschieden, so ergibt die Summation von $(\mathfrak{a}, O)$ und $(\bar{\mathfrak{v}}, u)$ nach 4. und 5. einen Vektor $\mathfrak{a} + \bar{\mathfrak{v}}$ auf irgendeiner Angriffslinine w. Dieser Vektor kann mit $(\mathfrak{v}, v)$ kein Gegenpaar bilden, sonst müßte $\mathfrak{v} = \mathfrak{a} + \mathfrak{v}$, also $\mathfrak{v} = \mathfrak{o}$ sein; sehen wir von diesem trivialen Falle ab, wo das Gegenpaar $(\bar{\mathfrak{v}}, u)$, $(\mathfrak{v}, v)$ wegfällt, so wird der Vektor $(\mathfrak{a} + \mathfrak{v}, w)$ sich immer mit $(\mathfrak{v}, v)$ zu einer Summe $\mathfrak{a} + \bar{\mathfrak{v}} + \mathfrak{v} = \mathfrak{a}$ auf einer bestimmten Angriffslinie zusammensetzen lassen. Ist $\mathfrak{a}$

gleich Null, so bleibt das Gegenpaar ($\bar{\mathfrak{v}}$, u), ($\mathfrak{v}$, v) übrig, das sich nicht weiter zusammensetzen läßt. So sehen wir, daß die systematische Summation in Artikel 10 verhältnismäßig einfach zum Ziele führt.

12. Als Summe erhalten wir entweder ein Gegenpaar, ein Fall, der nur für verschwindende $\mathfrak{a}$ eintreten kann, oder einen bestimmten Vektor $\mathfrak{a}$ auf bestimmter Angriffslinie. Aber hängt dieses Resultat nicht von der Anordnung der Konstruktion ab? Man übersieht sofort: Wie auch immer man auf Grund der Axiome A, B, C die Summation anordnet, stets werden die gebundenen Vektoren wie freie addiert, nur unter erschwerteren Umständen. Wir behaupten:

Äquivalente Systeme stimmen überein in der freien Summe ihrer Vektoren,

wobei die Summe frei genannt wird, wenn sie ohne Rücksicht auf die Angriffslinien nach den Gesetzen der Summation freier Vektoren gebildet wird. Die Richtigkeit des Satzes ergibt sich so:

Die Überführung eines Systems $\mathfrak{S}$ in ein äquivalentes System $\mathfrak{T}$ erfolgt:

a) auf Grund von Axiom A durch Verschiebung des Angriffspunktes, wodurch die Größe und der Pfeilsinn eines Vektors nicht geändert wird;

b) auf Grund des Axioms B durch Zufügung von Systemen an bestimmten Angriffspunkten, deren Summe je Null ist; die freie Summe dieser Vektoren ist also Null;

c) durch Zerlegung eines Vektors in ein System, daß ihn zur Summe hat, womit schon gesagt ist, daß die freie Summe dieses Systems dem Vektor gleich ist.

Da nun bei der freien Summation nach § 23 das assoziative Gesetz gilt, so wird die freie Summe der Vektoren eines Systemes durch Anwendung der Axiome A, B, C hinsichtlich der Größe und des Pfeilsinnes nicht geändert. Damit ist der Satz bewiesen. Die freie Summe der Vektoren des Systems ist also gegenüber der äquivalenten Umformung eine Invariante.

13. Als eine zweite Invariante des Systems haben wir in Artikel 9 die Momentensumme kennen gelernt. Ist also $\mathfrak{S} \simeq \mathfrak{T}$, so ist:

a) die freie Summe der Vektoren des Systems $\mathfrak{S}$ gleich der freien Summe der Vektoren des Systems $\mathfrak{T}$;

b) die Summe der Momente des Systems $\mathfrak{S}$ gleich der Summe der Momente des Systems $\mathfrak{T}$.

Verstehen wir nun unter $\mathfrak{S}$ das System $(\mathfrak{a}_1, x_1), \ldots, (\mathfrak{a}_n, x_n)$ und unter $\mathfrak{T}$ das aus einem Vektor $(\mathfrak{a}, x)$ oder aus einem Gegenpaar $(\bar{\mathfrak{v}}, u)$, $(\mathfrak{v}, v)$ bestehende System, auf das wir $\mathfrak{S}$ in Artikel 11 zurückgeführt haben, so können wir an $\mathfrak{S}$ schon entscheiden, wann $\mathfrak{T}$ aus einem Vektor bestehen wird:

a) Wenn $\mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}$ von Null verschieden ist, besteht $\mathfrak{T}$ aus dem Vektor $\mathfrak{a}$ mit noch zu bestimmender Angriffslinie; denn wäre $\mathfrak{T}$ ein Gegenpaar, so wäre die freie Summe seiner Vektoren Null, kann also nicht gleich $\mathfrak{a}$ sein. In der Tat führte die Untersuchung in Artikel 12 zu demselben Ergebnis. Ist die Momentensumme

$$a_1 a_1^P + a_2 a_2^P + \cdots + a_n a_n^P = a a^P$$

zufällig in dem beliebig gewählten Drehpunkt P gleich Null, so geht die gesuchte Angriffslinie x durch P und ist als Parallele zu $\mathfrak{a}$ vollkommen bestimmt. Ist die Summe nicht Null, so berührt x den Kreis k, der P zum Zentrum und den Dreharm

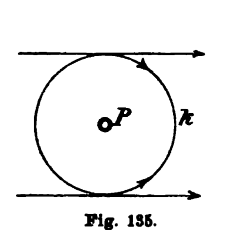


Fig. 135.

$$a^P = \frac{a_1 a_1^P + \cdots + a_n a_n^P}{a},$$

der nun auch von Null verschieden ist, zum Radius hat, und zwar ist $x \parallel \mathfrak{a}$. Es gibt aber nur zwei zu $\mathfrak{a}$ parallele Tangenten. Bringt man auf diesen je den Pfeilsinn von $\mathfrak{a}$ an, so bestimmen sie entgegengesetzte Drehsinne auf k. Je nachdem a^P positiv oder negativ ist, muß man die Tangente nehmen, die in P positive oder negative Drehung bestimmt. Es gibt also nur e i n e ganz bestimmte Angriffslinie.

b) Wenn $\mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$ ist, fragt es sich, ob $\mathfrak{S}$ dem Vektor Null oder einem Gegenpaar äquivalent ist, was sich nach 11. auch bei $\mathfrak{T}$ zeigt. Die Entscheidung hängt an der Momentensumme. Da $\mathfrak{S} \simeq \mathfrak{T}$, so ist, wie wir wissen,

$$a_1 a_1^P + a_2 a_2^P + \cdots + a_n a_n^P = \text{Momentensumme von } \mathfrak{T}.$$

Ist nun die Summe links gleich Null, so kann $\mathfrak{T}$ nur aus einem uneigentlichen Gegenpaar bestehen, denn bei einem eigentlichen ist die Momentensumme, als Fläche eines Parallelogramms, von Null verschieden. Da das uneigentliche Gegenpaar nach dem Verschiebungsaxiom die Summe Null hat, so ist $\mathfrak{T}$ in diesem Falle der Vektor Null.

Wenn dagegen die Summe links von Null verschieden ist, so

kann $\mathfrak{T}$ nur aus einem eigentlichen Gegenpaar mit dem Moment $a_1 a_1^P + \cdots + a_n a_n^P$ bestehen und ist damit vollkommen charakterisiert.

14. Damit sind wir zu dem schönen Hauptresultat unserer Untersuchung gelangt:

> Jedes System von linienflüchtigen Vektoren in einer Ebene ist entweder einem ganz bestimmten Vektor, der **Resultante** des Systems, die an eine bestimmte Angriffslinie gebunden ist, äquivalent, oder einem Gegenpaar von bestimmtem Moment. Und zwar ist die Resultante nach Größe und Pfeilrichtung der freien Summe jener Vektoren gleich, während das Moment der Resultante oder des Gegenpaares in irgendeinem Drehpunkt P der Summe der Momente des Systems gleich ist. Im Falle einer Resultante ist diese also von der Anordnung der Konstruktion unabhängig und für die Summation linienflüchtiger Vektoren gilt das assoziative und das kommutative Gesetz.

Nachdem so die Widerspruchslosigkeit dieses Denkbereiches gesichert ist, wird es unsere nächste Aufgabe sein, zu sehen, wie man das Resultat der Summation am übersichlichsten, womöglich mit direkten Methoden, erreicht.

15. Analytisch läßt sich die Angriffslinie der Resultante, falls eine solche existiert, unmittelbar angeben. Fixiert man nämlich die Hessesche Normalform nach § 24, (6) in der Weise, daß

$$a_\nu^P = a_\nu^0 - x \cos \alpha_\nu - y \sin \alpha_\nu$$

den orientierten Dreharm von $(\mathfrak{a}_\nu, x_\nu)$ im Drehpunkte P angibt, so läßt sich

$$a_1 a_1^P + a_2 a_2^P + \cdots + a_n a_n^P = a a^P$$

ausrechnen und $a^P = 0$ ist dann die Gleichung der Resultante, a^P ihr Dreharm in P, dargestellt in der Hesseschen Normalform. Wegen dieser analytischen und begrifflichen Vorzüge der Momente, vor allem wegen ihrer Invarianz gegenüber den äquivalenten Umformungen, wäre es richtiger und nebenbei sehr elegant, den an eine Angriffslinie x gebundenen Vektor $\mathfrak{a}$ nicht mit $(\mathfrak{a}, x)$, sondern mit $(\mathfrak{a}, a a^P)$ zu bezeichnen, also als Vektor mit bestimmtem Moment. Dann gilt für die Addition das Gesetz:

$$(\mathfrak{a}, a a^P) + (\mathfrak{b}, b b^P) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}, a a^P + b b^P)$$

$$(\mathfrak{a}_1, a_1 a_1^P) + (\mathfrak{a}_2, a_2 a_2^P) + \cdots + (\mathfrak{a}_n, a_n a_n^P)$$
$$= (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n, a_1 a_1^P + \cdots + a_n a_n^P).$$

Durch die Angabe des Momentes und des Vektors $\mathfrak{a}$ ist $(\mathfrak{a}, x)$ vollkommen bestimmt, wie wir in 11. gesehen haben, und das Moment, in der Hesseschen Normalform dargestellt, gibt zugleich den Hebelarm und die Resultante, also alles, was man nur verlangen kann. Die Addition der Symbole $(\mathfrak{a}, aa^P)$ gleicht vollkommen der der komplexen Zahlen, wie wir sie in Bd. I, § 47 (§ 51 der 2/3. Aufl.) dargestellt haben.

§ 26. Vereinfachte Summation.

1. Hat ein System $\mathfrak{S}$ von linienflüchtigen Vektoren $(\mathfrak{a}_1, x_1)$, $(\mathfrak{a}_2, x_2), \ldots, (\mathfrak{a}_n, x_n)$ einer Ebene η eine Resultante $(\mathfrak{a}, x)$, so können wir diese sofort nach Größe und Pfeilrichtung angeben:

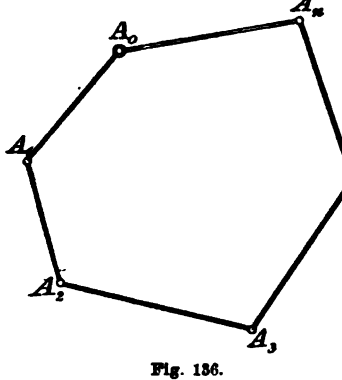


Fig. 136.

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n.$$

Man zeichnet zu diesem Zwecke

$$A_0A_1 = \mathfrak{a}_1,\ A_1A_2 = \mathfrak{a}_2, \ldots,\ A_{n-1}A_n = \mathfrak{a}_n.$$

Dann ist

$$A_0A_n = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n,$$

wo also zu beachten ist, daß der Pfeil der Geraden A_0A_n des Kraftecks $A_0A_1 \ldots A_n$ von A_0 nach A_n weist. Da die Gerade A_0A_n das Krafteck erst zu einem geschlossenen Vieleck macht, so heißt sie „Schlußlinie" des Kraftecks (§ 23, 6.). Wenn A_n mit A_0 zusammenfällt, die Schlußlinie, die zugleich als Schlußstrecke gemeint ist, also verschwindet, so heißt das Krafteck geschlossen; in diesem Falle ist $\mathfrak{a} = 0$ und das System hat entweder den Vektor Null zur „Resultante", oder es ist einem Gegenpaar äquivalent. Soll, wie wir vorausgesetzt haben, $\mathfrak{S}$ eine eigentliche Resultante haben, so ist $\mathfrak{a}$ von Null verschieden.

2. Nachdem wir so überaus leicht den Vektor a auf direktem Wege gefunden haben, wäre es sehr unangenehm, wenn wir zur Ermittlung seiner Angriffslinie x nun doch noch die Vektoren des Systems, sei es schrittweise nach § 25, 4. und 5. oder nach der etwas einfacheren Methode § 25, 10, summieren müßten. Offenbar würde zur Bestimmung von x, da $x \| \mathfrak{a}$ sein muß, die Kenntnis eines einzigen Punktes von x genügen. Einen solchen zu finden, ist das Ziel der folgenden Betrachtung. Es gibt Fälle, wo man die Lage

der Resultante eines Systems sofort angeben kann. Hätte $\mathfrak{S}$ zum Beispiel die Struktur des Systems $\mathfrak{S}'$ der Figur 137, das aus $n+1$ Geraden $u_0, u_1, \ldots, u_n$ besteht, von denen u_0 und u_n je einen Vektor $\mathfrak{t}_0$ und $\mathfrak{t}_n$, dagegen u_ν für $\nu = 1, \ldots, n-1$ ein uneigentliches Gegenpaar $\mathfrak{t}_\nu$, $\bar{\mathfrak{t}}_\nu$ trägt, so braucht man $\mathfrak{t}_\nu$ und $\bar{\mathfrak{t}}_\nu$ auf u_ν nur an denselben Angriffspunkt zu verlegen, am zu sehen, daß diese Gegenpaare das Ergebnis der Summation nicht beeinflussen. Also ist

$$\mathfrak{S}' \simeq (\mathfrak{t}_0, u_0) + (\mathfrak{t}_n, u_n).$$

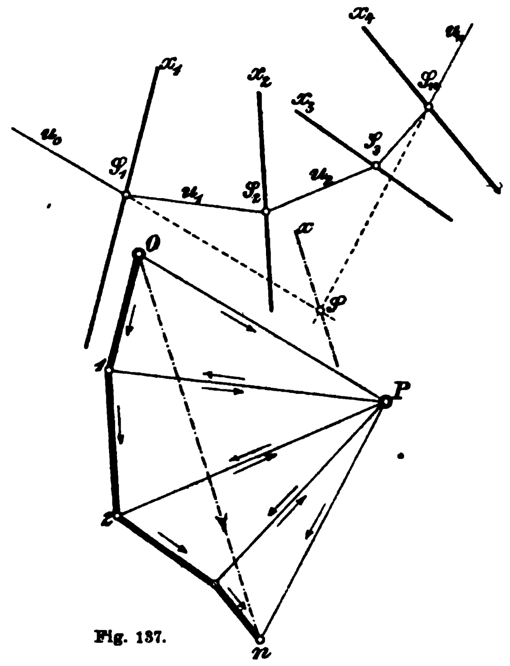


Fig. 137.

Die Resultante dieser zwei Vektoren geht durch den Schnittpunkt S von u_0 und u_n und ist nach Größe und Pfeilrichtung gleich $\mathfrak{t}_0 + \mathfrak{t}_n$; man kann hier die Resultante nach § 24, 6 direkt konstruieren, oder auch in einer Nebenkonstruktion $0P = \mathfrak{t}_0$, $P\nu = \mathfrak{t}_\nu$ machen; dann ist $0n = \mathfrak{t}_0 + \mathfrak{t}_n$ und die Parallele x durch S zu $0n$ ist die Angriffslinie der Resultante $(0n, x)$. Zieht man also durch S_1 die Parallele zu $0\,1$, die x_1 heißen möge, so liegt auf ihr die Resultante von $(\mathfrak{t}_0, u_0)$, $(\mathfrak{t}_1, u_1)$; bezeichnet man sie mit $(\mathfrak{a}_1, x_1)$, so ist

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{t}_0 + \mathfrak{t}_1.$$

Bezeichnet man ebenso mit $(\mathfrak{a}_\nu, x_\nu)$ die Resultante von $(\bar{\mathfrak{t}}_{\nu-1}, u_{\nu-1})$, $(\mathfrak{t}_\nu, u_\nu)$, so ist $\mathfrak{a}_\nu = \bar{\mathfrak{t}}_{\nu-1} + \mathfrak{t}_\nu$, und x_ν ist durch den Schnittpunkt S_ν von $u_{\nu-1}$ und u_ν parallel zu $\nu - 1, \nu$ zu finden, $\nu = 2, \ldots, n$.

Das System $\mathfrak{S}'$, das aus $2n$ Vektoren auf $n+1$ Angriffslinien besteht, ist hiernach dem System $\mathfrak{S}$ der n Vektoren $(\mathfrak{a}_1, x_1), \ldots, (\mathfrak{a}_n, x_n)$ äquivalent, die auf n Angriffslinien liegen. Das System $\mathfrak{S}$ hat also dieselbe Resultante $(0n, x)$ wie $\mathfrak{S}'$, und $012\ldots n$ ist sein Krafteck.

Das Schöne dieser Untersuchung ist nun, daß ihr Gedankengang sich umkehren läßt! Sei in einer Ebene η irgend ein System $\mathfrak{S}$, bestehend aus den Vektoren $(\mathfrak{a}_1, x_1), \ldots, (\mathfrak{a}_n, x_n)$, gegeben, von dem wir übrigens durchaus nicht die Existenz einer Resultante voraussetzen (Fig. 137). Dann konstruieren wir ein Krafteck $012\ldots n$

der frei gedachten Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$, also:

$$01 = \mathfrak{a}_1, \quad 12 = \mathfrak{a}_2, \quad 23 = \mathfrak{a}_3, \ldots, \quad \overline{n-1n} = \mathfrak{a}_n.$$

Wir nehmen nun irgendeinen Punkt P in η an, wählen auf x_1 irgendeinen Punkt S_1 und legen durch ihn $u_0 \| 0P$ und $u_1 \| 1P$; diese Gerade treffe x_2 in einem Punkte S_2. Durch S_2 ziehen wir $u_2 \| 2P$; diese Gerade treffe x_3 in S_3 usw. Durch S_ν ziehen wir $u_\nu \| \nu P$; diese Gerade treffe $x_{\nu+1}$ in $S_{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, wobei für $\nu = n$ aber kein Punkt S_{n+1} zu bestimmen ist.

3. So trivial es auf den ersten Blick scheinen mag, lohnt es sich bei dem einfachen System $\mathfrak{S}'$ noch länger verweilend, nach Analogie der Figur 136 in Art. 1 das vollständige Krafteck des Systems $\mathfrak{S}'$ zu konstruieren. Man setze also:

$$0P = \mathfrak{k}_0, \quad P1 = \mathfrak{k}_1, \quad 1P = \overline{\mathfrak{k}}_1, \quad P2 = \mathfrak{k}_2, \quad 2P = \overline{\mathfrak{k}}_2, \ldots, \quad Pn = \mathfrak{k}_n.$$

Da $\mathfrak{k}_\nu$ und $\overline{\mathfrak{k}}_\nu$ auf derselben Geraden liegen, so wird die Seite des Kraftecks, die gleich $\overline{\mathfrak{k}}_\nu$ ist, parallel und gleich der Seite sein, die gleich $\mathfrak{k}_\nu$ ist, und da überdies diese Seiten aneinanderstoßen, so werden sie mit entgegengesetzten Pfeilrichtungen aufeinanderfallen. So kommt es, daß von dem Krafteck von $\mathfrak{S}'$ die Seiten $1P, 2P, \ldots, \overline{n-1}P$ doppelt gezählt sind. Die Schlußlinie ist $0n$, also dieselbe, die sich auch vorher nach Ausschaltung der uneigentlichen Paare ergab. Gleichzeitig ist aber

01 Schlußlinie von	$0P1$, also	$01 =$	$0P + P1 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{k}_1,$
12 „ „	$1P2$, „	$12 =$	$1P + P2 = \overline{\mathfrak{k}}_1 + \mathfrak{k}_2,$
23 „ „	$2P3$, „	$23 =$	$2P + P3 = \overline{\mathfrak{k}}_2 + \mathfrak{k}_3,$
. . . .	. . . . .	. . . .	. . . .
$\overline{n-1}n$ „ „	$\overline{n-1}Pn$, „	$\overline{n-1}n =$	$\overline{n-1}P + Pn = \overline{\mathfrak{k}}_{n-1} + \mathfrak{k}_n.$

Daher ist nach Größe und Pfeilrichtung:

01 gleich der Resultante der Vektoren $(\mathfrak{k}_0, u_0)$ und $(\mathfrak{k}_1, u_1)$,

$\nu - 1, \nu$ „ „ „ „ „ $(\overline{\mathfrak{k}}_{\nu-1}, u_{\nu-1})$ „ $(\mathfrak{k}_\nu, u_\nu)$,

$$\nu = 2, \ldots, n.$$

Die erste dieser Resultanten geht aber durch den Schnittpunkt S_1 von u_0 und u_1.

Da

$$u_\nu \| \nu P \quad \text{und} \quad x_{\nu+1} \| \mathfrak{a}_{\nu+1} \| \overline{\nu\nu+1}$$

ist, so wird u_ν die Gerade $x_{\nu+1}$, wie wir es verlangen, im Endlichen schneiden, wenn νP nicht parallel $\overline{\nu\nu+1}$ ist, $\nu = 1, 2, \dots, n$, d. h. P *darf nicht auf* $\overline{\nu\nu+1}$ *liegen* ($\nu = 1, 2, \dots, n-1$). Setzen wir das noch voraus, so wird also die Konstruktion von $u_0, u_1, \dots, u_n$ immer gelingen. Nimmt man jetzt $\mathfrak{k}_0 = 0P$, $\mathfrak{k}_1 = P1$, $\bar{\mathfrak{k}}_1 = 1P, \dots,$ $\mathfrak{k}_n = Pn$, *so haben wir ein System* $\mathfrak{S}'$ *gefunden, das in der Tat dem System* $\mathfrak{S}$ *äquivalent ist*; denn die zu $\mathfrak{S}'$ gehörige Figur $\mathfrak{S}$ ist wieder die, von der wir ausgingen.

4. Wir haben noch etwas mehr gefunden, als wir suchten, denn die Existenz von $\mathfrak{S}'$ ist nicht, wie es anfangs scheinen konnte, an die einer Resultante des Systems $\mathfrak{S}$ geknüpft. Die Entscheidung, ob $\mathfrak{S}$ einer Resultante oder einem Gegenpaar äquivalent ist, muß also am System $\mathfrak{S}$ fallen. Da nun $\mathfrak{S}'$ in letzter Linie dem System $(\mathfrak{k}_0, u_0)$, $(\mathfrak{k}_n, u_n)$ äquivalent ist, so hängt von diesem Systeme die Entscheidung ab.

Tritt ein Gegenpaar auf (Fig. 139), so ist es mit $(\mathfrak{k}_0, u_0)$, $(\mathfrak{k}_n, u_n)$ identisch; dann ist also $\mathfrak{k}_0 + \mathfrak{k}_n = 0$ und $u_0 \| u_n$. Das überträgt sich in der Weise auf das Krafteck, daß $0P + Pn = 0$ und $0P \| Pn$ ausfällt, d. h. n muß mit 0 zusammenfallen, ohne daß P in diesen Punkt zu liegen kommt, weil sonst $\mathfrak{k}_0 = 0P$ verschwände. Wenn n mit 0 zusammenfällt, also, wie man sich ausdrückt (Art. 1), das Krafteck sich schließt, ohne daß P in 0 liegt, so werden umgekehrt u_0 und u_1 einander parallel und sind Angriffslinien eines Gegenpaares, dessen Vektoren die Länge $0n$ haben; dieses Paar wird ein uneigentliches oder ein eigentliches sein, je nachdem u_0 und u_n identisch sind oder nicht. Damit ist dieser Fall erledigt.

Ist der Punkt n von 0 verschieden, so muß daher eine Resultante existieren, und der Vektor $0n$ ist ihr gleich (Fig. 135). Damit das System $(\mathfrak{k}_0, u_0)$, $(\mathfrak{k}_n, u_n)$ sie unmittelbar zu bestimmen gestattet, müssen die Geraden u_0, u_n einander im Endlichen schneiden, d. h. es darf $0P$ nicht parallel zu Pn sein, also P nicht auf $0n$ liegen. Das haben wir aber in unserer Gewalt. Die in 3. gefundene Einschränkung zusammen mit der jetzigen ergibt die Regel: *P darf nicht auf dem Streckenzug $123\dots n0$ liegen, wohl aber auf 01 und außerhalb dieser Geraden.* Unter dieser Bedingung treffen sich u_0 und u_n in einem Punkte S, durch den parallel zu $0n$ die Angriffslinie x der Resultante geht. Bei den ∞^2 Lagen, die P noch einnehmen kann, wird man immer P so zu wählen haben, daß sämtliche Schnittpunkte $S_1, S_2, \dots, S_n$ und S auf das Zeichenblatt gehen und scharf bestimmbar sind.

5. Hieraus entnehmen wir das folgende *praktische Resultat:* Zur Summation des Systems $\mathfrak{S}$ der Vektoren



$$(\mathfrak{a}_1, x_1), \ldots, (\mathfrak{a}_n, x_n)$$

zeichnet man unter Ersparnis unnötiger Konstruktionen (Fig. 138 und 139:

1. einen Lageplan der Angriffslinien $x_1, \ldots, x_n$, ohne die Vektoren auf denselben;

2. ein Krafteck $012\ldots n$; dieses gibt zugleich die Vektoren an; es ist

$$\overline{h-1h} = \mathfrak{a}_h,\ h = 1, 2, \ldots, n.$$

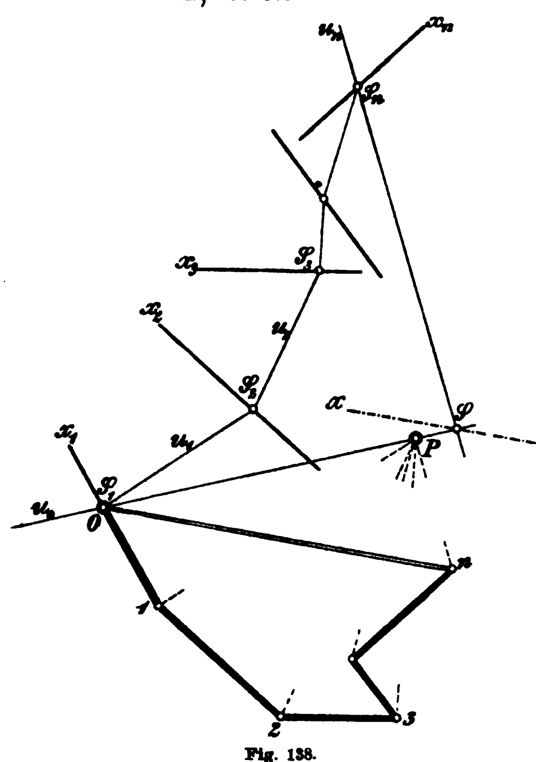


Fig. 138.

Um die Zeichenfehler zu verringern, wird man das Krafteck möglichst nahe beim Lageplan annehmen und, soweit es geht, mit diesem verflechten, indem man etwa 01 auf x_1 annimmt.[1]) Nun wählt man den „Pol“ P des Kraftecks außerhalb des Streckenzuges $123\ldots n0$, nimmt auf x_1 die Ecke S_1 des Polygons $S_1S_2\ldots S_n$ beliebig an, bestimmt dazu auf $x_2, x_3, \ldots, x_n$ die Ecken $S_2, S_3, \ldots, S_n$, indem man $S_1S_2 \parallel 1P$, $S_2S_3 \parallel 2P, \ldots, S_{n-1}S_n \parallel n-1P$ zieht und legt noch durch S_1 und S_n die „äußeren Seiten“ u_0, u_n des Kraftecks, nämlich $u_0 \parallel 0P$, $u_n \parallel nP$.

Wie das Vieleck $012\ldots n$ als Krafteck bezeichnet wurde, führt das nicht minder wichtige Vieleck $S_1S_2\ldots S_n$ den Namen Seileck, der noch zu erklären sein wird.

Fällt der „Endpunkt“ n des Kraftecks nicht mit dem Anfangspunkt 0 zusammen (Fig. 138), so hat $\mathfrak{S}$ eine Resultante $(\mathfrak{a}, x)$, deren

1) Da die Figuren unseres Textes in erster Linie didaktischen Zwecken dienen, so mußte zur Erzielung größerer Übersichtlichkeit von den Forderungen des Praktikers meist abgesehen werden. Für praktische Figuren sind wegen der größeren Genauigkeit dünn ausgezogene Geraden notwendig, während eine didaktisch gute Figur ausdrucksvoll sein muß.

Angriffslinie x durch den Schnittpunkt S der äußeren Seiten u_0, u_n des Kraftecks parallel zu $0n$ gefunden wird, während $\mathfrak{a} = 0n$ ist.

Fällt hingegen n mit 0 zusammen (Fig. 139), so ist $\mathfrak{S}$ dem Gegenpaare $(\mathfrak{t}_0, u_0)$, $(\mathfrak{t}_n, u_n)$ äquivalent, wo $\mathfrak{t}_0 = 0P$, $\mathfrak{t}_n = P0$, also $u_n \parallel u_0$ ist. Dieses Gegenpaar ist ein eigentliches oder uneigentliches, je nachdem u_n von u_0 verschieden ist oder nicht. Ein uneigentliches Gegenpaar reduziert sich natürlich auf den Vektor Null.

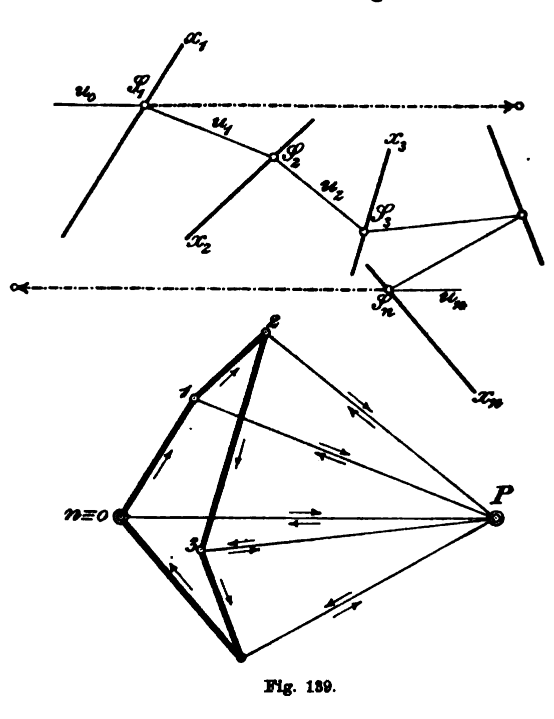


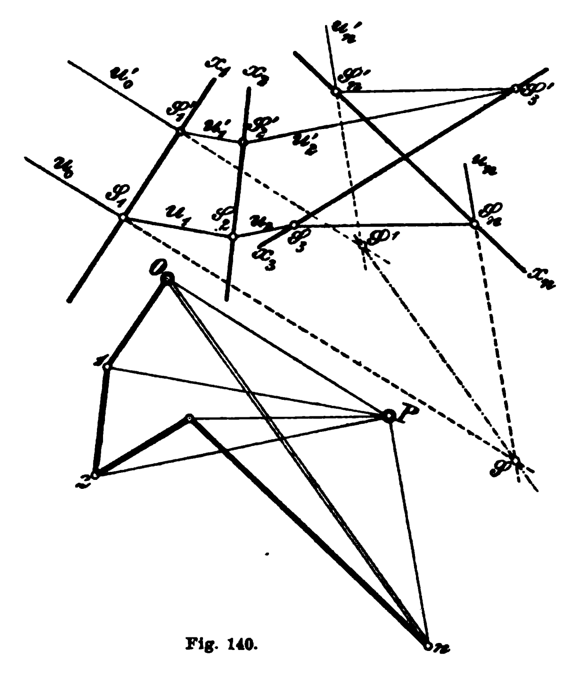
Fig. 139.

Damit ist das Summationsproblem in ebenso eleganter, als praktischer Weise gelöst. Benutzt man beim praktischen Konstruieren der Parallelen, wie üblich, zwei Dreieckslineale, so kann das Ziehen der Geraden $0P$, $1P, \ldots, nP$ und $n0$ erspart werden (Fig. 138). Je weniger Linien, desto größere Klarheit; nur an deutlicher Bezeichnung der verschiedenen Angriffslinien und Vektoren darf man es nicht fehlen lassen, weil sonst leicht Verwechslungen vorkommen. Nach der rein begrifflichen Seite ist noch hervorzuheben, daß aus unserem Beweis der Eindeutigkeit und Widerspruchslosigkeit des Summationsbegriffes speziell auch die Gültigkeit des kommutativen und assoziativen Gesetzes der Addition linienflüchtiger Vektoren folgt.

6. Nach Festlegung des Pols P eines Kraftecks kann die erste Ecke S_1 des Seilecks auf der ersten Angriffslinie noch in unendlich vielen Lagen gewählt werden; ist auch S_1 fest angenommen, so ist das Seileck $S_1 S_2 \ldots S_n$ bestimmt. Von einem anderen Anfangspunkte S_1' ausgehend erhält man ein anderes Seileck $S_1' S_2' \ldots S_n'$ von der Art, daß $S_\nu' S_{\nu+1}' \parallel S_\nu S_{\nu+1}$ ist $(\nu = 1, \ldots, n-1)$, außerdem sind die äußeren Seiten des einen Ecks den entsprechenden des anderen parallel. Man kann das neue Eck so konstruieren, daß eine bestimmte Seite u_ν' desselben durch einen vorgeschriebenen Punkt geht; denn zieht man diese Seite zuerst, so kann man von ihr sofort die vorangehenden



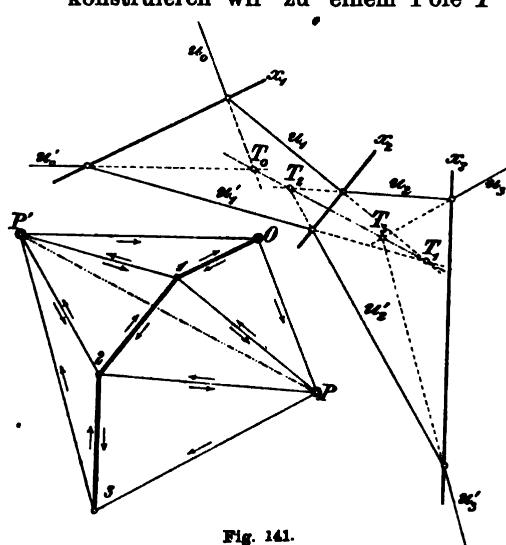
und die folgenden Seiten finden, wie ein Blick auf die Figur 140 zeigt. Wir merken uns nur:


Fig. 140.

Beziehen sich zwei Seilecke auf denselben Pol, so sind entsprechende Seiten derselben parallel,

so daß man also bei der Konstruktion des zweiten Ecks sich nach den Seiten des ersten richten kann, die meistens bequemer liegen als das Krafteck.

7. Interessanter ist das Verhalten des Seilecks, wenn man den Pol verschiebt. Sei wiederum ein System $\mathfrak{S}$ von n Vektoren $(\mathfrak{a}_\nu, x_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, durch den Lageplan seiner Angriffslinien x_ν und ein Krafteck $012\ldots n$ der $\mathfrak{a}_\nu$ gegeben (Figur 141); es sei dahingestellt, ob das System einer einzelnen Resultante oder einem Gegenpaar äquivalent ist. Von einem auf x_1 willkürlich angenommenen Eckpunkte S_1 ausgehend konstruieren wir zu einem Pole P das Seileck $S_1 S_2 \ldots S_n$ mit den Seiten $u_0 u_1 \ldots u_n$; ebenso von einem Punkte S_1' der Geraden x_1 ausgehend zu einem Pole P' das Seileck $S_1' S_2' \ldots S_n'$ mit den Seiten $u_0' u_1' \ldots u_n'$. Dann ist $\mathfrak{S} \simeq \mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S} \simeq \mathfrak{T}'$, wo


Fig. 141.

$\mathfrak{T}$ besteht aus

$$(\mathfrak{k}_0, u_0);\ (\mathfrak{k}_1, u_1),\ (\bar{\mathfrak{k}}_1, u_1);$$
$$(\mathfrak{k}_2, u_2),\ (\bar{\mathfrak{k}}_2, u_2);\ \ldots;$$
$$(\mathfrak{k}_{n-1}, u_{n-1}),\ (\bar{\mathfrak{k}}_{n-1}, u_{n-1});$$
$$(\mathfrak{k}_n, u_n),\ \mathfrak{k}_\nu = P\nu,\ \bar{\mathfrak{k}}_\nu = \nu P,$$
$$\nu = 0, 1, \ldots, n.$$

Ebenso ist $\mathfrak{T}'$ aus den mit Akzenten versehenen Vektoren zusammengesetzt:

$\mathfrak{T}'$ besteht aus $(\bar{\mathfrak{k}}_0', u_0')$; $(\mathfrak{k}_1', u_1')$, $(\bar{\mathfrak{k}}_1', u_1')$; $(\mathfrak{k}_2', u_2')$, $(\bar{\mathfrak{k}}_2', u_2')$; ...;

$$(\mathfrak{k}_{n-1}', u_{n-1}'),\ (\bar{\mathfrak{k}}_{n-1}', u_{n-1}');\ (\mathfrak{k}_n', u_n'),$$

$$\mathfrak{k}_\nu' = P'\nu,\ \bar{\mathfrak{k}}_\nu' = \nu P',\ \nu = 0, 1, \ldots, n,$$

und hat man

$$(1) \qquad (\mathfrak{a}_\nu, x_\nu) \simeq (\bar{\mathfrak{k}}_{\nu-1}, u_{\nu-1}) + (\mathfrak{k}_\nu, u_\nu),\ \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

In der analogen Äquivalenz der mit Akzenten versehenen Vektoren drehen wir die Sinne um:

$$(2) \qquad (\bar{\mathfrak{a}}_\nu, x_\nu) \simeq (\mathfrak{k}_{\nu-1}', u_{\nu-1}') + (\bar{\mathfrak{k}}_\nu', u_\nu'),\ \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Die vier in (1) und (2) rechts stehenden Vektoren

$$(3) \qquad (\mathfrak{k}_{\nu-1}', u_{\nu-1}'),\ (\bar{\mathfrak{k}}_{\nu-1}, u_{\nu-1}),\ (\mathfrak{k}_\nu, u_\nu),\ (\bar{\mathfrak{k}}_\nu', u_\nu')$$

sind der Summe $(\mathfrak{a}_\nu, x_\nu) + (\bar{\mathfrak{a}}_\nu, x_\nu) = (\mathfrak{o}, x_\nu)$ äquivalent; ihr Krafteck $P'\,\overline{\nu-1}\,P\nu P'$ ist in der Tat geschlossen.

Haben die beiden ersten Vektoren in (3) eine Resultante, so ist sie gleich $P'P$ und geht durch den Schnittpunkt $T_{\nu-1}$ von $u_{\nu-1}$, $u_{\nu-1}'$, der aber auch im Unendlichen liegen kann; die beiden letzten Vektoren müssen dann ebenfalls eine Resultante haben, da ein Gegenpaar zusammen mit $P'P$ nicht den Vektor Null ergeben kann; diese Resultante ist gleich PP', geht durch den Schnittpunkt T_ν von u_ν und u_ν' und muß, um mit der ersten Resultante den Vektor Null geben zu können, mit ihr auf derselben Angriffslinie liegen, die parallel zu PP' ist. Demnach liegen T_1 und T_2, T_2 und $T_3, \ldots, T_{n-1}$ und T_n je auf einer Parallelen zu PP', d. h. diese Punkte befinden sich auf einer und derselben Geraden, die zu PP' parallel ist.

Wenn die beiden ersten Vektoren in (3) für jedes ν ein Gegenpaar bilden, so ist $\mathfrak{k}_{\nu-1}' = \mathfrak{k}_{\nu-1}$, $P'\,\overline{\nu-1} = P\,\overline{\nu-1}$, d. h. P' fällt mit P zusammen, und es liegt der in 6. untersuchte Fall zweier zu demselben Pol gehöriger Seilecke vor. So erhalten wir den schönen Satz:

> Konstruiert man zu zwei verschiedenen Polen zwei Seilecke desselben Systems $\mathfrak{S}$, so liegen die Schnittpunkte je zweier entsprechender (gleichvielter) Seiten des ersten und des zweiten Ecks auf einer Geraden, die zur Verbindungsgeraden der beiden Pole parallel verläuft.

8. Zur Erklärung des Namens **Seileck oder Seilpolygon** sei folgendes bemerkt: Ist in Figur 137 der Streckenzug $u_0 S_1 S_2 \ldots S_n u_n$ ein Seil, das an den unbezeichneten Endpunkten von u_0 und u_n fest-



gehalten wird, während man es bei den Punkten $S_1, S_2, \ldots, S_n$ in den Richtungen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit den Kräften $\mathbf{01}, \mathbf{12}, \ldots, (\boldsymbol{n-1})\boldsymbol{n}$ anspannt, so nimmt es eben die Gestalt des „Seilecks" $u_0 S_1 S_2 \ldots S_n u_n$ an, falls die Enden des Seils mit den Kräften $\boldsymbol{PO}$ und $\boldsymbol{nP}$ gespannt werden. In jede der Strecken $S_1S_2, S_2S_3, \ldots, S_{n-1}S_n$ fallen zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, die die Strecke zu verlängern suchen, sogenannte Zugkräfte. Man gebraucht jedoch den Namen Seileck, wenn in die Seiten teilweise Druckkräfte fallen, d. h. Paare entgegengesetzt gleicher Kräfte, die die betreffende Seite zu verkürzen streben.[1])

§ 27. Die Voraussetzungen der Vektorsummation.

1. Wie die Geometrie unter Voraussetzung ihrer Axiome sich als eine rein deduktive Wissenschaft darstellen läßt, so beruht auch die Geometrie der Vektorensummation auf einer geringen Zahl von Voraussetzungen, die man als die Axiome dieses Denkbereiches bezeichnen muß. Diese Axiome haben, wie in der Arithmetik und Geometrie, eine doppelte Aufgabe: dem reinen Denkbereiche dienen sie zur Grundlage eines streng deduktiven Erkenntnisverfahrens, den zu erforschenden Naturerscheinungen gegenüber bilden sie die Kriterien der Anwendbarkeit dieses Denkbereiches. Gründet man die Vektorgeometrie auf die Euklidische Geometrie, so sind nach Darboux[2]) und F. Schur[3]) zum Aufbau der Vektoren an demselben Angriffspunkte im ganzen sechs Axiome notwendig, die wir im folgenden angeben werden. Wie F. Schur gezeigt hat, ist von diesen Axiomen keines eine Folge der anderen und wir werden sehen, daß sie zur Herleitung der geometrischen Vektorsummation vollständig ausreichen, während sie ihrerseits aus den allgemeinen Gesetzen der geometrischen Addition durch Spezialisierung gewonnen sind.

---

1) Der Kraftecke und Seilecke hat sich zuerst P. Varignon bedient (1725). Der eigentliche Begründer der graphischen Statik ist aber Karl Culmann, geb. 1821 in Bergzabern (Rheinpfalz). Er war von 1854 bis zu seinem Tode (1881) Professor der Ingenieurwissenschaften in Zürich. Sein Hauptwerk, die „Graphische Statik", erschien 1866.

2) G. Darboux, Sur la composition des forces en statique, Bull. des sciences math. 9 (1875), p. 281—88; vgl. dazu G. Darboux, Sur le théorème fondamental de la géométrie projective, Math. Ann. 17 (1880), p. 55—61, speziell p. 56, Fußnote.

3) F. Schur, Über die Zusammensetzung von Vektoren, Ztschr. f. Math. u. Phys. 49 (1903), S. 352—361. Weitere Literatur: Encyklop. d. math. Wiss., IV.

2. Wir fordern:

Axiom I. Zwei Vektoren OA und OB an demselben Angriffspunkte O bestimmen eindeutig einen Vektor OC, der mit OA zusammenfällt, wenn OB verschwindet.

Der so aus OA und OB „zusammengesetzte" Vektor OC heißt die „geometrische Summe" von OA, OB und wird bis zum Nachweis der Identität dieses Begriffes mit dem der vorangehenden Paragraphen wie folgt bezeichnet:

$$OC = OA + OB.$$

Denkt man weniger an die Entstehungsart von OC als an die Tatsache, daß auch OC ein Vektor ist, so heißt OC auch die „Resultante" von OA und OB.

Für die geometrische Summierung von Vektoren an demselben Angriffspunkte gilt

Axiom II: das kommutative Gesetz:

$$OB + OA = OA + OB;$$

Axiom III: das assoziative Gesetz:

$$(OA + OB) + OC = OA + (OB + OC).$$

Da nach II und III

$$(OA + OB) + OC = (OB + OA) + OC = OB + (OA + OC),$$

also

$$(1) \quad OA + (OB + OC) = OB + (OC + OA) = OC + (OA + OB)$$

ist, so wird die Summe der drei Vektoren OA, OB, OC unzweideutig durch $OA + OB + OC$ bezeichnet.

Axiom IV. Die Resultante von Vektoren an demselben Angriffspunkte O ist gegenüber der Drehung des Systems um O invariant,

d. h. wenn man die gegebenen Vektoren starr miteinander verbunden denkt und um den Angriffspunkt dreht, so bewegt sich die Resultante mit, als wäre sie mit den gegebenen Vektoren ebenfalls starr verbunden.

Satz 1. Haben also zwei Vektoren OA, OB den Angriffspunkt O und die Angriffslinie u gemein, so muß auch $OC = OA + OB$ auf dieser Angriffslinie liegen.

Denn die Vektoren $\boldsymbol{OA}$ und $\boldsymbol{OB}$ und folglich auch $\boldsymbol{OC}$ gehen in sich über, wenn man die Gerade u sich als Rotationsachse drehen läßt (Fig. 142).

Satz 2. Zwei entgegengesetzt gleiche Vektoren $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$ an demselben Angriffspunkte haben die Summe Null.

Ist nämlich O (Fig. 142) die Mitte der Strecken AB, so läßt sich das System um O so drehen, daß A und B ihre Lage vertauschen, dabei darf die Resultante $\boldsymbol{OC} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}$, die nach Satz 1 ebenfalls auf u ruht, ihre Lage nicht ändern, was nur möglich ist, wenn C mit O zusammenfällt.

Fig. 142.

Satz 3. Wenn die Resultante $\boldsymbol{OC}$ zweier Vektoren $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$ an demselben Angriffspunkte O auf der Angriffslinie u von $\boldsymbol{OA}$ liegt, so liegt auch $\boldsymbol{OB}$ auf dieser Angriffslinie (Umkehrung von Satz 1).

Ist nämlich $\boldsymbol{O\bar{A}}$ der mit $\boldsymbol{OA}$ entgegengesetzt gleiche Vektor, so ist nach III, da $\boldsymbol{OC} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}$ vorausgesetzt wird:

$$\boldsymbol{OC} + \boldsymbol{O\bar{A}} = (\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}) + \boldsymbol{O\bar{A}} = \boldsymbol{OB} + (\boldsymbol{O\bar{A}} + \boldsymbol{OA}),$$

also nach Satz 2: $\boldsymbol{OC} + \boldsymbol{O\bar{A}} = \boldsymbol{OB} +$ Null $= \boldsymbol{OB}$ (nach I), und da $\boldsymbol{OC}$ und $\boldsymbol{OA}$, also auch $\boldsymbol{OC}$ und $\boldsymbol{O\bar{A}}$ auf derselben Angriffslinie u liegen, so liegt auch $\boldsymbol{OB}$ nach Satz 1 auf u.

Satz 4. Wenn die Resultante zweier Vektoren $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$ an demselben Angriffspunkte O verschwindet, so sind sie entgegengesetzt gleich (Umkehrung von Satz 2).

Ist nämlich $\boldsymbol{O\bar{A}}$ der mit $\boldsymbol{OA}$ entgegengesetzt gleiche Vektor, und $\boldsymbol{OC} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}$, so ist wiederum $\boldsymbol{OC} + \boldsymbol{O\bar{A}} = \boldsymbol{OB}$, also $\boldsymbol{OB} = \boldsymbol{O\bar{A}} +$ Null $= \boldsymbol{O\bar{A}}$ nach I.

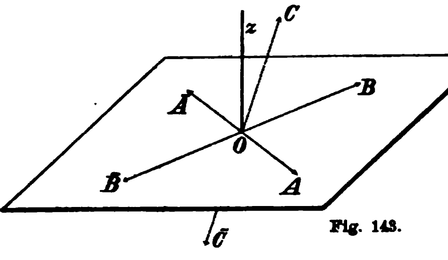


Fig. 143.

Satz 5. Die Resultante zweier Vektoren an demselben Angriffspunkte liegt in der Ebene, die diese Vektoren bestimmen.

Ist nämlich (Fig. 143) $\boldsymbol{OC} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}$ und $\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{O\bar{A}} = 0$, $\boldsymbol{OB} + \boldsymbol{O\bar{B}} = 0$, sowie $\boldsymbol{O\bar{C}} = \boldsymbol{O\bar{A}} + \boldsymbol{O\bar{B}}$, so ist

$$\boldsymbol{O\bar{C}} + \boldsymbol{OA} = \boldsymbol{OA} + (\boldsymbol{O\bar{A}} + \boldsymbol{O\bar{B}}) = (\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{O\bar{A}}) + \boldsymbol{O\bar{B}} = \boldsymbol{O\bar{B}},$$

$$\boldsymbol{O\bar{C}} + \boldsymbol{OC} = \boldsymbol{O\bar{C}} + (\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}) = (\boldsymbol{O\bar{C}} + \boldsymbol{OA}) + \boldsymbol{OB} = \boldsymbol{O\bar{B}} + \boldsymbol{OB} = 0,$$

also $O\overline{C}$ nach Satz 4 mit OC entgegengesetzt gleich. Dreht man nun das als starr gedachte System OA, OB um die in O auf der Ebene AOB errichtete Normale z (Fig. 143), bis OA die Lage $O\overline{A}$, also $O\overline{B}$ die Lage von OB einnimmt, so muß nach Axiom IV der Vektor OC ebenfalls diese Drehung um 180° mitmachen, andererseits aber als Resultante von $O\overline{A}$, $O\overline{B}$ in die Lage $O\overline{C}$ fallen, was unmöglich ist, wenn nicht OC auf z senkrecht steht, d. h. in der Ebene OAB liegt, w. z. b. w. Liegt aber OC in dieser Ebene, so geht OC bei jener Drehung in der Tat in $O\overline{C}$ über, da dieselbe genau 180° beträgt.

Fig. 144.

3. Seien jetzt OA, OB, OC drei nicht in einer Ebene gelegene Vektoren (Figur 144) und

$$OA + OB = OZ,\quad OB + OC = OX,\quad OC + OA = OY.$$

Bezeichnet noch OR die Resultante von OA, OB, OC, so ist nach (1):

$$\begin{aligned} OR &= OA + OX \\ &= OB + OY \\ &= OC + OZ, \end{aligned}$$

also muß OR mit OA und OX, mit OB und OY, mit OC und OZ je in einer Ebene liegen (Satz 5). Daraus läßt sich eine Beziehung zwischen den Strahlen OA, OB, OC, OX, OY, OZ und OR ableiten. Die vier letzten Strahlen treffen nämlich die Ebene

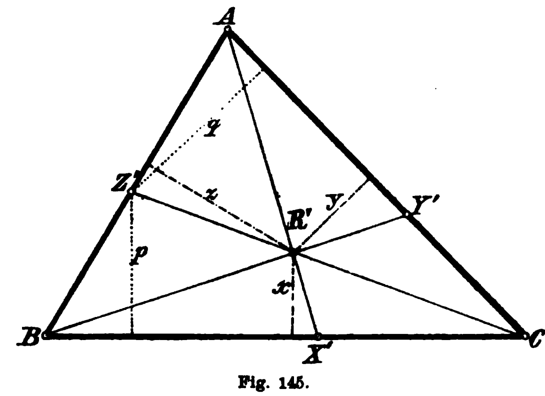


Fig. 145.

ABC in vier Punkten X', Y', Z', R', so daß X' auf BC, Y' auf CA, Z' auf AB liegt und die Geraden AX', BY', CZ' durch R' gehen. Fällt man noch von R' auf AB, BC, CA die Lote x, y, z, sowie aus Z' auf BC und CA die Lote p und q (Fig. 145), so ist

$$AZ' : Z'B = \text{Dreieck } ACZ' : \text{Dreieck } Z'CB = \frac{CA}{BC} \cdot \frac{q}{p} = \frac{CA}{BC} \cdot \frac{y}{x},$$

also:

$$(2) \qquad \frac{AZ'}{Z'B} = \frac{CA}{BC} \cdot \frac{y}{x}, \quad \frac{BX'}{X'C} = \frac{AB}{CA} \cdot \frac{z}{y}, \quad \frac{CY'}{Y'A} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{x}{z}.$$

Hieraus folgt:

$$(3) \qquad \frac{AZ' \cdot BX' \cdot CY'}{Z'B \cdot X'C \cdot Y'A} = 1.$$

Diese Formel gilt ihrer Ableitung nach zunächst nur, wenn R' im Innern des Dreiecks ABC liegt, sie wird von dieser Einschränkung unabhängig, wenn man die Strecken auf den Seiten des Dreiecks ABC in der Weise mit dem Vorzeichen + oder − versieht, daß, wenn P, Q, R auf einer Seite liegen,

$$(4) \qquad PQ + QR = PR, \quad QP = -PQ$$

ist[1]); mißt man nämlich zugleich noch die Lote x, y, z links von der gerichteten Strecke BC, CA, AB positiv, rechts von dieser Strecke negativ, so bleiben die Formeln (2) und damit (3) richtig. Ist nun umgekehrt die Gleichung (3) erfüllt, so schneiden sich AX', BY', CZ' in einem Punkte. Denn wird AB von der Geraden, die den Schnittpunkt von AX' und BY' mit C verbindet, in Z'' getroffen, so gilt außer (3) noch die Gleichung

$$\frac{AZ'' \cdot BX' \cdot CY'}{Z''B \cdot X'C \cdot Y'A} = 1,$$

wegen (3) ist daher $AZ' : Z'B = AZ'' : Z''B$, und da es nur einen Punkt gibt, der eine Strecke AB unter Berücksichtigung des Vorzeichens in gegebenem Verhältnis teilt, so muß Z'' mit Z' identisch sein. Daraus folgt der

Satz des Ceva für die Ebene: Liegen die Punkte X', Y', Z' je auf den Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks ABC, so ist

$$(5) \qquad \frac{AZ' \cdot BX' \cdot CY'}{Z'B \cdot X'C \cdot Y'A} = 1$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Ecktransversalen AX', BY', CZ' sich in einem Punkte treffen.

1) Man beachte, daß hier die gewöhnlichen Plus- und Minuszeichen stehen, da nach § 23, 6 zu summieren ist.

4. Dieser Satz ist leicht auf das Strahlenbündel O zu übertragen. Da (Fig. 144)

$$AZ' : Z'B = \text{Dreieck } AOZ' : \text{Dreieck } Z'OB$$
$$= OA \cdot OZ' \sin AOZ : OZ' \cdot OB \sin Z'OB,$$

also

$$(6) \quad \frac{AZ'}{Z'B} = \frac{OA \cdot \sin AOZ'}{OB \cdot \sin Z'OB}, \quad \frac{BX'}{X'C} = \frac{OB \cdot \sin BOX'}{OC \cdot \sin X'OC}, \quad \frac{CY'}{Y'A} = \frac{OC \cdot \sin COY'}{OA \cdot \sin Y'OA},$$

so folgt aus (5):

$$(7) \qquad \frac{\sin AOZ' \cdot \sin BOX' \cdot \sin COY'}{\sin Z'OB \cdot \sin X'OC \cdot \sin Y'OA} = 1.$$

Aus (7) schließt man umgekehrt vermöge (6) auf (5). Damit ist das Analogon des Cevaschen Satzes im Strahlenbündel gefunden. Da der Punkt Z ebenfalls auf OZ', X auf OX', Y auf OY' liegt, so können wir in (7) die Punkte X', Y', Z' durch X, Y, Z ersetzen. Dann lautet der

Satz des Ceva für das Strahlenbündel: Liegen die Strahlen OX, OY, OZ je in den Seiten BOC, COA, AOB eines Dreiseits $O(ABC)$, so ist

$$(8) \qquad \frac{\sin AOZ \cdot \sin BOX \cdot \sin COY}{\sin ZOB \cdot \sin XOC \cdot \sin YOA} = 1$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Ebenen AOX, BOY, COZ durch einen Strahl OR gehen.

Die Winkel sind dabei nach (4) so mit positivem oder negativem Zeichen zu versehen, daß, wenn p, q, r drei durch O gehende, in einer Ebene liegende Strahlen sind,

$$\measuredangle pq + \measuredangle qr = \measuredangle pr, \quad \measuredangle qp = - \measuredangle pq$$

ist. Wie man das auch immer im einzelnen ausführt, das Verhältnis $\sin(pq) : \sin(qr)$ ändert seinen Wert nicht, wenn man die Richtung von q in die entgegengesetzte verwandelt; also bleibt auch (8) ungeändert, wenn man die Richtung von OX (oder die von OY oder OZ) mit der entgegengesetzten vertauscht. Das muß auch aus einem anderen Grunde so sein: In Figur 145 würde Z' auch dann zwischen A und B liegen, also in (5) das Verhältnis $AZ'/Z'B$ positiv sein, wenn Z sich nicht auf OZ', sondern auf dem ergänzenden Halbstrahle befände. Aus dem Vorzeichen von $\sin AOZ/\sin ZOB$ in (8) kann also nicht entschieden werden, ob Z auf der einen oder der anderen Hälfte der Geraden OZ' (Fig. 144) liegt.

5. Nach (8) ist

$$\frac{\sin AOZ}{\sin ZOB} = \frac{\sin XOC}{\sin BOX} : \frac{\sin YOC}{\sin AOY}. \tag{9}$$

Wir erteilen jetzt dem Vektor OC eine bestimmte, unveränderliche Größe und nehmen ihn, der größeren Anschaulichkeit wegen, senkrecht auf AOB an, um zu untersuchen, wie die Angriffslinie der Resultante $OZ = OA + OB$ von OA und OB abhängt. Das Verhältnis $\sin YOC : \sin AOY$ in (9) können wir nach Axion IV an irgend zwei Vektoren OC' und OA' und ihrer Resultante $OY' = OA' + OC'$ ermitteln (Fig. 146), die aufeinander senkrecht stehen und der absoluten Größe nach gleich OC und OA sind.

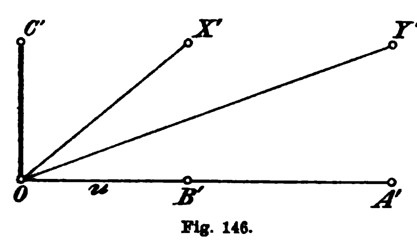


Fig. 146.

Hat man OC' und irgend ein Lot u auf OC in O angenommen, so kann A' noch alle mögliche Lagen auf u annehmen. Es wird also die Länge von OA' und damit auch das Verhältnis

$$\frac{\sin YOC}{\sin AOY} = \frac{\sin Y'OC'}{\sin A'OY'} = \varphi(a) \tag{10}$$

bei festgehaltenem OC nur von der absoluten Größe a des Vektors OA abhängen, nicht von OB oder der Orientierung von OA gegen den Raum. Diese nur von a abhängige Größe bezeichnen wir (als Funktion von a) mit $\varphi(a)$. — Ganz ebenso läßt sich nach Axiom IV auch $\sin XOC : \sin BOX$ an zwei beliebigen Vektoren berechnen, die in O aufeinander senkrecht stehen und der absoluten Größe nach gleich OB, OC sind. Unter Verwendung des Vektors $OC' = OC$ (der Fig. 146) und der darauf senkrechten Angriffslinie u ist B' auf dieselben Lagen beschränkt wie A'; daher hängt

$$\frac{\sin XOC}{\sin BOX} = \frac{\sin X'OC'}{\sin B'OX'} = \varphi(b) \tag{11}$$

in derselben Weise von b, der absoluten Größe des Vektors OB, ab wie das Verhältnis (10) von a.

6. Nach (9) ist jetzt:

$$\frac{\sin AOZ}{\sin ZOB} = \frac{\varphi(b)}{\varphi(a)}, \quad \text{wo } OZ = OA + OB. \tag{12}$$

Die Bestimmung der Angriffslinie der Resultante zweier beliebiger Vektoren OA, OB ist damit zurückgeführt auf dieselbe

Aufgabe für $OA + OC$ und $OB + OC$, wo aber OC auf OA und OB senkrecht steht und der absoluten Größe c nach ein für allemal festgelegt ist. Wir wollen zunächst nach der analytischen Erkenntnismethode annehmen, $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ wären mit a und b gegeben, um daraus sowohl nach (12) die Resultante beliebiger Vektorenpaare zu bestimmen, als auch neue Eigenschaften von $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ selber zu finden, welche die Bestimmung von $\varphi(a)$ ermöglichen sollen. Je nach dem Vorzeichen von $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ sind zwei Fälle zu unter- unterscheiden.

Erster Fall: $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ sind zugleich positive oder zugleich negative Größen, dann ist $\varphi(b)/\varphi(a)$ positiv, folglich auch das Sinusverhältnis (12). Die Angriffslinie von OZ geht dann durch den von den Halbstrahlen OA, OB gebildeten Winkelraum, und Z liegt entweder als Z auf der einen oder als $\overline{Z}$ auf der anderen Hälfte der durch O geteilten Angriffslinie (Fig. 147). Macht man $O\mathfrak{A}$ auf OA gleich dem absoluten Werte $|\varphi(a)|$ von $\varphi(a)$ und $O\mathfrak{B}$ auf OB gleich dem absoluten Werte $|\varphi(b)|$ von $\varphi(b)$, so ist in dem über $O\mathfrak{A}$ und $O\mathfrak{B}$ konstruierten Parallelogramm $O\mathfrak{A}\mathfrak{Z}\mathfrak{B}$ der Winkel $O\mathfrak{Z}\mathfrak{A} = \mathfrak{Z}O\mathfrak{B}$, also nach dem Sinussatze

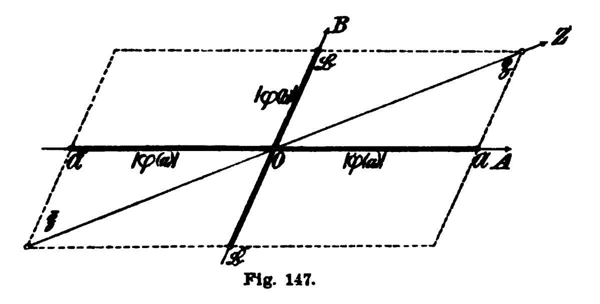


Fig. 147.

$$\sin \mathfrak{A}O\mathfrak{Z} : \sin \mathfrak{Z}O\mathfrak{B} = \sin \mathfrak{A}O\mathfrak{Z} : \sin O\mathfrak{Z}\mathfrak{A} = \varphi(b) : \varphi(a).$$

Daher liegt Z auf $O\mathfrak{Z}$, jedoch nicht etwa notwendigerweise auf dem Halbstrahle $O\mathfrak{Z}$; denn sind $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$, $\overline{\mathfrak{Z}}$ die symmetrischen Gegenpunkte von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{Z}$ bezüglich O als Symmetriezentrum, so ist auch

$$\sin \overline{\mathfrak{A}}O\overline{\mathfrak{Z}} : \sin \overline{\mathfrak{Z}}O\overline{\mathfrak{B}} = \varphi(b) : \varphi(a),$$

und Z kann auch auf dem Halbstrahle $O\overline{\mathfrak{Z}}$ liegen. Das Parallelogramm $O\overline{\mathfrak{A}}\overline{\mathfrak{Z}}\overline{\mathfrak{B}}$ ist wie $O\mathfrak{A}\mathfrak{Z}\mathfrak{B}$ konstruiert, jedoch unter Benutzung von $-|\varphi(a)|$ und $-|\varphi(b)|$. Daher wird folgende „Parallelogrammkonstruktion" der Angriffslinie beide Möglichkeiten des ersten Falles umfassen: Man trägt die Größe $\varphi(a)$, je nachdem sie positiv oder negativ ist, auf OA oder dem entgegengesetzt gerichteten Halbstrahl $O\overline{A}$, ebenso $\varphi(b)$, je nachdem es positiv oder negativ ist, auf OB oder $O\overline{B}$ ab, und konstruiert das Parallelogramm über jenen beiden Strecken; seine durch O gehende Diagonale ist dann die Angriffslinie

der Resultante $OZ = OA + OB$. Dasselbe Resultat liefert aber immer auch das andere Parallelogramm der Figur 147.

Zweiter Fall: $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ sind Größen von entgegengesetzten Vorzeichen. Dann geht die Angriffslinie von $OZ = OA + OB$ durch den Winkelraum zwischen den Halbstrahlen OA und $O\bar{B}$ sowie durch den Winkelraum zwischen OB und $O\bar{A}$, wenn $O\bar{A}$ den zu OA entgegengesetzt gleichen Vektor, $O\bar{B}$ den zu OB entgegengesetzt gleichen Vektor bezeichnet. Wiederum wird man die Angriffslinie von $OZ = OA + OB$ als Diagonale $O\mathfrak{Z}$ eines Parallelogramms $O\mathfrak{A}\mathfrak{Z}\mathfrak{B}$ oder $O\bar{\mathfrak{A}}\bar{\mathfrak{Z}}\mathfrak{B}$ erhalten (Fig. 148), von dem zwei Seiten gleich $|\varphi(a)|$ und $|\varphi(b)|$ sind und auf den Geraden OA und OB so liegen, daß die Diagonale in die soeben angegebenen Winkelräume fällt. Beide Parallelogramme liefern dieselbe Angriffslinie, und man wird bemerken, daß immer eines (und nur eines) derselben wörtlich der Parallelogrammkonstruktion des ersten Falles entspricht. Die Parallelogrammkonstruktion gibt also stets die richtige Angriffslinie, weshalb wir auf das andere, zentralsymmetrische Parallelogramm zu gunsten dieses eindeutigen, alle Fälle umfassenden Konstruktionsgesetzes verzichten wollen. Dasselbe gilt seiner Ableitung nach zunächst nur unter der Voraussetzung, daß OA und OB einen von 0 oder 180 Grad verschiedenen Winkel einschließen.

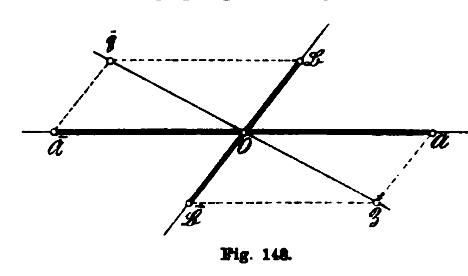


Fig. 148.

7. Ist wieder

$$OZ = OA + OB, \quad O\bar{B} + OB = 0,$$

so ist

$$OZ + O\bar{B} = OA + OB + O\bar{B} = OA,$$

also

$$OZ + O\bar{B} = OA. \tag{13}$$

Daß muß auch die Parallelogrammkonstruktion ergeben: Zu dem Zwecke schicken wir aber erst die Konstruktion von $OZ = OA + OB$ voraus, indem wir auf OA die Strecke $O\mathfrak{A} = \varphi(a)$, auf OB die Strecke $O\mathfrak{B} = \varphi(b)$ unter Berücksichtigung des Vorzeichens von $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ abtragen und über $O\mathfrak{A}$, $O\mathfrak{B}$ das Parallelogramm $O\mathfrak{A}\mathfrak{Z}\mathfrak{B}$ konstruieren (Fig. 149).

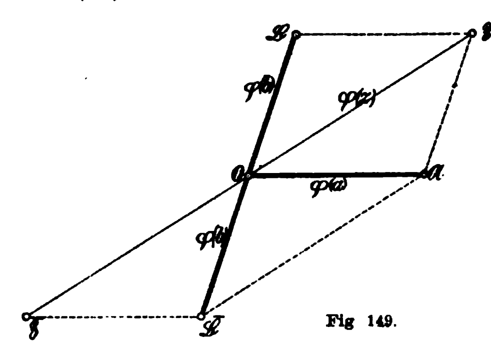


Fig. 149.

Dann liegt Z auf der Geraden $O\mathfrak{Z}$, doch wissen wir nicht, auf welcher Seite von O. Bezeichnet also z den absoluten Wert von $\boldsymbol{OZ}$, so wissen wir bei der Anwendung der Parallelogrammkonstruktion auf (13) zunächst nicht, nach welcher Seite wir $\varphi(z)$ auf $O\mathfrak{Z}$ abtragen müssen; dagegen wird $\varphi(b)$ auf $O\overline{B}$ so abzutragen sein, daß der Endpunkt $\overline{\mathfrak{B}}$ bezüglich O zu $\mathfrak{B}$ symmetrisch liegt. Stellt man über den so abgetragenen Strecken $\varphi(z)$, $\varphi(b)$ das Parallelogramm her, so muß die durch O gehende Diagonale, als Angriffslinie von $\boldsymbol{OA}$, den Punkt $\mathfrak{A}$ enthalten. Dieser Bedingung genügt aber nur das Parallelogramm $O\overline{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}\mathfrak{Z}$. Daraus folgt: $O\mathfrak{Z}$ ist gleich $\varphi(z)$, und zwar auch unter Berücksichtigung des Zeichens, da der allenfalls noch in Betracht kommende Punkt $\overline{\mathfrak{Z}}$ nur dann zur richtigen Angriffslinie führt, wenn man zugleich $\mathfrak{B}$ (statt $\overline{\mathfrak{B}}$) nimmt.

Es folgt:

> Die Parallelogrammkonstruktion liefert nicht nur eindeutig die Angriffslinie der Resultante $\boldsymbol{OZ} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}$ zweier Vektoren $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$, sondern die durch O gehende Diagonale ist auch der Größe und dem Vorzeichen nach gleich der Funktion $\varphi(z)$ des absoluten Wertes z von $\boldsymbol{OZ}$,

d. h. $\varphi(z)$ ist positiv oder negativ, je nachdem Z auf dem Halbstrahle $O\mathfrak{Z}$ oder auf seinem Ergänzungsstrahle $O\overline{\mathfrak{Z}}$ liegt. Die Lage von Z ist also immer noch unbestimmt.

8. Auch versagt die Parallelogrammkonstruktion, wenn $\boldsymbol{OA}$ und $\boldsymbol{OB}$ auf derselben Angriffslinie x liegen. Ist in diesem Falle $\boldsymbol{OD}$ ein nicht auf x liegender Vektor, so ist die Resultante $\boldsymbol{OF}$ von $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$, $\boldsymbol{OD}$ einerseits

$$(14)\quad \boldsymbol{OF} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB} + \boldsymbol{OD} = (\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OD}) + \boldsymbol{OB} = \boldsymbol{OE} + \boldsymbol{OB},$$

wo

$$\boldsymbol{OE} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OD},$$

andererseits

$$(15)\quad \boldsymbol{OF} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB} + \boldsymbol{OD} = (\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}) + \boldsymbol{OD} = \boldsymbol{OZ} + \boldsymbol{OD},$$

wo

$$\boldsymbol{OZ} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}.$$

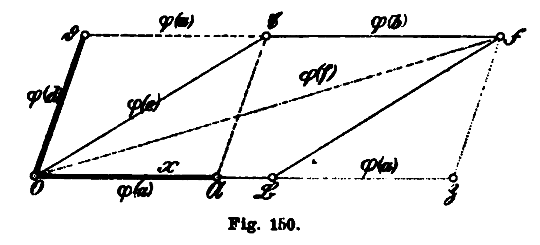


Fig. 150.

Wir nehmen noch an, daß $\boldsymbol{OA}$ und $\boldsymbol{OB}$ auf demselben Halbstrahle liegen. Zur Konstruktion (Fig. 150) der Angriffslinie $\boldsymbol{OE}$ tragen wir auf x die Strecke $O\mathfrak{A} = \varphi(a)$, auf OD die Strecke $O\mathfrak{D} = \varphi(d)$ ab unter Beachtung des Vorzeichens

von $\varphi(d)$; dabei bezeichne, wie immer im folgenden, a den Absolutwert von $\boldsymbol{OA}$, b den von $\boldsymbol{OB}$, d den von $\boldsymbol{OD}$ usw. Dann liegt $\boldsymbol{OE}$ auf der Diagonale $O\mathfrak{E}$ des Parallelogramms $O\mathfrak{A}\mathfrak{E}\mathfrak{D}$. Macht man auf x noch $O\mathfrak{B} = \varphi(b)$, so ist die Diagonale $O\mathfrak{F}$ des Parallelogramms $O\mathfrak{B}\mathfrak{F}\mathfrak{E}$ die Angriffslinie der Resultante $\boldsymbol{OF} = \boldsymbol{OE} \dotplus \boldsymbol{OB}$.

Nach (15) muß $O\mathfrak{F}$ auch die Diagonale eines Parallelogramms mit den Seiten $O\mathfrak{Z}$ und $O\mathfrak{D}$ sein; $\mathfrak{Z}$ muß auf x liegen. Das ist also das Parallelogramm $O\mathfrak{Z}\mathfrak{F}\mathfrak{D}$. Folglich ist $O\mathfrak{Z} = \varphi(z)$, wo $\boldsymbol{OZ} = \boldsymbol{OA} \dotplus \boldsymbol{OB}$. Die Figur ergibt aber $\varphi(z) = \varphi(a) + \varphi(b)$, also ist

$$(16) \qquad \varphi(z) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

wenn $\boldsymbol{OZ} = \boldsymbol{OA} \dotplus \boldsymbol{OB}$ und die Vektoren $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$ auf demselben Halbstrahle liegen.

Hiernach wird die Figur 151 ohne weiteres verständlich sein, in der $\boldsymbol{OB}$ durch $\overline{\boldsymbol{OB}}$ ersetzt ist; $\boldsymbol{OE} = \boldsymbol{OA} \dotplus \boldsymbol{OD}$ bleibt, $\boldsymbol{OZ}$ geht in $\boldsymbol{OZ'} = \boldsymbol{OA} \dotplus \overline{\boldsymbol{OB}}$ über, $\boldsymbol{OF}$ in $\boldsymbol{OF'}$, und aus der Figur ist zu entnehmen:

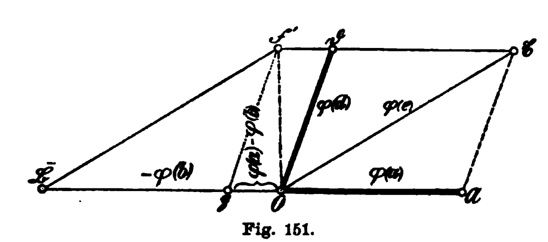


Fig. 151.

$$(17) \qquad \varphi(z') = \varphi(a) - \varphi(b),$$

wenn $\boldsymbol{OZ'} = \boldsymbol{OA} \dotplus \overline{\boldsymbol{OB}}$ und die Vektoren $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$ auf demselben Halbstrahle liegen.

9. Wenn n Vektoren $\boldsymbol{OA}_1, \boldsymbol{OA}_2, \ldots, \boldsymbol{OA}_n$ in einer Ebene liegen und ihre Endpunkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ein regelmäßiges n-Eck mit dem Zentrum O bilden, so ist, wie aus Satz 5. und Axiom IV folgt, die Resultante gleich Null, also

$$\overline{\boldsymbol{OA}}_n = \boldsymbol{OA}_1 \dotplus \cdots \dotplus \boldsymbol{OA}_{n-1}.$$

Obgleich in diesem Falle und auch sonst noch die Resultante nicht nur der Lage, sondern auch der Größe nach angebbar ist, so reichen wie Schur[1]) gezeigt hat, die gemachten Voraussetzungen doch nicht aus, die Resultante eindeutig zu definieren. Wir fordern weiter:

Axiom V. Zwei Vektoren $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$ mit demselben Angriffspunkte und mit derselben Angriffslinie bilden die Resultante durch algebraische Addition:

$$(18) \qquad \boldsymbol{OA} \dotplus \boldsymbol{OB} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB},$$

d. h. im Endpunkte des einen Vektors trägt man den anderen nach

1) l. c. p. 356 ff. Die Darstellung ist nicht elementar wiederzugeben.

Größe und Richtung an, der vom Anfangspunkt zum erhaltenen Endpunkt E führende Vektor OE ist dann nach Größe und Richtung die Resultante. Es würde übrigens genügen, wenn die Forderung V nur für eine einzige Angriffslinie gestellt würde; denn nach Axiom IV wäre sie dann auf jeder Angriffslinie durch O erfüllt.

Da jetzt, wenn OA, OB auf demselben Halbstrahle liegen,

$$OA \dotplus OB = OA + OB$$

ist, so folgt aus (16) und (17):

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \varphi(a-b) = \varphi(a) - \varphi(b). \tag{19}$$

10. Aus (19) folgt, wenn m und n ganze Zahlen bezeichnen:

$$\varphi(ma) = m\varphi(a), \quad \varphi(e) = \varphi\left(n\,\frac{e}{n}\right) = n\varphi\left(\frac{e}{n}\right),$$

also für alle $a = e/n$:

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\,e\right) = \frac{m}{n}\,\varphi(e). \tag{20}$$

Nimmt man in (12) den Vektor OB der Größe nach gleich OC und senkrecht zu OA an, wo OC der ein für allemal ausgezeichnete Vektor der ganzen Untersuchung ist, so wird in (12) die Resultante OZ gleich OY (siehe Fig. 146); durch Vergleichung der Formeln (10) und (12) folgt dann:

$$\varphi(c) = 1, \tag{21}$$

wo c der Absolutwert von OC ist.

Für $e = c$ ist also

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\,c\right) = \frac{m}{n}. \tag{22}$$

Die Funktion $\Delta(x) = c\varphi(x) - x$ hat mithin folgende merkwürdige Eigenschaften:

a) $$\Delta(x+y) = \Delta(x) + \Delta(y);$$

b) $$\Delta(Mx) = M\Delta(x),$$

wenn M eine positive ganze Zahl;

c) $$\Delta(x_c) = 0,$$

wenn x_c mit c kommensurabel ist.

Dann ist x_c von der Form $x_c = mc/n$, wo m und n ganze Zahlen sind. Ist nun $x = x_c + \varepsilon$, wo $x_c = mc/n$, so ist nach a) und c):

$$\Delta(x) = \Delta(\varepsilon), \tag{23}$$

und nach (19), (22):

$$\begin{aligned} c\varphi(x) &= \frac{m}{n}c + c\varphi(\varepsilon) = c\varphi(\varepsilon) + x - \varepsilon = x + \Delta(\varepsilon), \\ c\varphi(x_c) &= \frac{m}{n}c = x_c, \end{aligned} \tag{24}$$

woraus nebenbei $\Delta(0) = 0$ folgt. Jetzt ist:

$$c\varphi(x) - c\varphi(x_c) = \varepsilon + \Delta(\varepsilon). \tag{25}$$

Hierin ist x_c von x um so weniger verschieden, je kleiner ε ist. Wir wollen nun durch ein geeignetes Stetigkeitsaxiom zu erzwingen suchen, daß, wenn die Differenz $x - x'$ dem absoluten Werte nach unter einer gewissen, sehr kleinen Grenze δ bleibt, auch der absolute Wert von $\varphi(x) - \varphi(x')$ unter einer gewissen Grenze Γ bleiben muß. Der Forderung $|x - x'| < \delta$ wird aber genügt, wenn wir $x' = x_c$ und $\varepsilon < c/n$, $c/n < \delta$, also n hinreichend groß annehmen. Dann müßte $|\varphi(x) - \varphi(x_c)| < \Gamma$, also nach (25)

$$|\varepsilon + \Delta(\varepsilon)| < c\Gamma$$

bleiben, weshalb auch $|\Delta(\varepsilon)|$ nicht über eine gewisse Grenze γ wachsen kann. Nun ist aber nach b) einerseits $M\Delta(\varepsilon) = \Delta(M\varepsilon)$, andererseits ist $M\varepsilon$ in der Form $M\varepsilon = \mu c/n + \varepsilon'$ darstellbar, wo μ eine ganze Zahl und $\varepsilon' < c/n < \delta$; nach (23) wäre dann $\Delta(M\varepsilon) = \Delta(\varepsilon')$, also

$$M\Delta(\varepsilon) = \Delta(\varepsilon'), \tag{26}$$

wo auch $|\Delta(\varepsilon')|$ nicht über γ wachsen hann. Wäre aber $\Delta(\varepsilon)$ von Null verschieden, so würde in (26) die linke Seite dem absoluten Werte nach mit M über alle Grenzen wachsen, während die rechte Seite endlich bleiben muß. Das ist ein Widerspruch, der sich nur dann hebt, wenn für alle Werte von ε, die unter der Grenze δ bleiben, $\Delta(\varepsilon)$ identisch Null ist. Nach (24) ist dann $c\varphi(x) = x$. Da die Darstellung von x in der Form $x = x_c + \varepsilon$, $\varepsilon < \delta$, für alle positiven Werte von x möglich ist, so haben wir allgemein:

$$c\varphi(x) = x, \tag{27}$$

und es ist auch allgemein $\Delta(x) = 0$, während in c) nur $\Delta(x_c) = 0$ erwiesen war.

11. Alles das gilt nur auf Grund des erst vorläufig formulierten Stetigkeitsaxioms, das wir nun noch so umgestalten wollen, daß es

nicht auf die Hilfsfunktion $\varphi(x)$ bezug nimmt. Wächst x von x_c bis $x_c + \varepsilon$, so wird die Angriffslinie r der Resultante eines unveränderlichen Vektors OA und eines Vektors von der veränderlichen Länge x ebenfalls ihre Lage und Größe verändern (Fig. 152). Soll nun die Resultante, wenn x kleine Schwankungen erfährt, ebenfalls nur kleine Schwankungen erleiden, so muß vor allem die Drehung der Angriffslinie um O nur klein sein; folglich darf (nach der Parallelogrammkonstruktion) auch die Differenz $\varphi(x) - \varphi(x_c)$ mit ε nur in engen Grenzen sich verändern, denn wenn diese Differenz unendlich würde, so

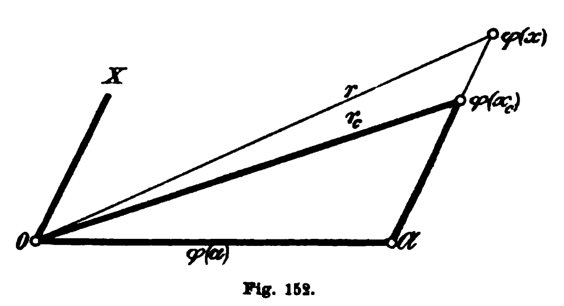


Fig. 152.

könnte x zwischen den Lagen r_c und OX schwanken, und dieses Schwankungsgebiet würde für noch so kleines ε gelten. Wir kommen also auf die oben gestellte Forderung zurück durch das

Axiom VI. Wenn von zwei Vektoren der eine seine Größe nur unbedeutend ändert, so darf die Angriffslinie der Resultante nur eine Drehung in engen (endlichen) Grenzen erfahren, die mit dem Schwankungsgebiet des Vektors verschwindet.

12. Auf Grund dieses Axioms ist nach (27)

$$c\varphi(x) = x,$$

und für die Resultantenbildung gilt daher der folgende Hauptsatz:

Die Resultante zweier Vektoren OA und OB ist der Größe und Richtung nach die durch O gehende Diagonale OR des Parallelogramms $OARB$, von dem OA und OB zwei Seiten sind; liegen OA und OB auf derselben Angriffslinie, so tritt das Axiom V in Kraft.

Diese Konstruktion ergibt sich aus der des Art. 6. und 7., indem man statt $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ die Strecken $c\varphi(a) = a$ und $c\varphi(b) = b$ auf OA und OB abträgt; dann fällt 𝔄 mit A, 𝔅 mit B zusammen, und die Diagonale ist $c\varphi(r)$, wo r die absolute Größe der Resultante mißt.

Das Parallelogramm $OARB$ wird durch OR in zwei kongruente Dreiecke zerlegt, die je für sich schon zur Ermittlung von OR ausreichen. Das ist aber die Summationsfigur, die wir in § 23 kennen gelernt haben, und da in dem Falle von Vektoren auf der-

selben Angriffslinie das Axiom V gilt, so stimmt die aus den Axiomen I bis VI abgeleitete Resultantenbildung mit der in § 23 untersuchten geometrischen Summation vollkommen überein.

13. Außer diesen sechs Axiomen sind zum Aufbau der Geometrie linienflüchtiger Vektoren noch die drei Axiome A, B, C des § 25 erforderlich, die sich noch etwas einfacher formulieren ließen.

Von der umfangreichen Literatur über die Axiome der Vektoraddition seien nur die „Axiomatischen Untersuchungen" über die Vektoraddition von R. Schimmack (Gött. Diss. 1908 = Nova Acta Leop. **90**, Nr. 1) genannt; die Fußnote l. c. Seite 50 war übrigens auch bei der ersten Auflage unzutreffend, da ich tatsächlich schon damals das VII. Axiom Schimmacks benutzt habe.

§ 28. Zusammensetzung der Kräfte mittels Kraftleck und Seileck. Gleichgewichtsbedingungen.

1. Die graphische Statik ist bis jetzt überwiegend zu dem Zweck ausgebildet und benutzt worden, Aufgaben der Statik auf dem Wege der geometrischen Konstruktion zu lösen. Ihre Grundlage ist die bildliche Darstellung der Kräfte durch Vektoren. Wenn man die Kräfte, mit denen sich die Mechanik befaßt, unter dem Bilde gerichteter Strecken betrachtet, so findet das Zusammenwirken mehrerer Kräfte an einem Punkte seinen einfachsten Ausdruck im Parallelogrammgesetze. Um aber Kräfte durch Vektoren zu geometrischen Größen zu machen, ist ein Kräftemaßstab erforderlich, der angibt, durch wieviel Längeneinheiten die Krafteinheit dargestellt werden soll. Die Entscheidung hierüber ist vollkommen willkürlich, denn es gibt zwischen der Längeneinheit und der Krafteinheit keinerlei Beziehung, mag man nun die Kraft im absoluten Maße messen, oder, wie es in der graphischen Statik mit Rücksicht auf die Technik üblich ist, in Kilogrammen. Angesichts dieser Willkür verdient es hervorgehoben zu werden, daß es bei der Abbildung von Kräften durch Vektoren gleichgültig ist, was für ein Kräftemaßstab zugrunde gelegt wird. Denn wenn die Krafteinheit einmal durch p, einmal durch q Längeneinheiten dargestellt wird, wo p und q positive Zahlen bedeuten, so wird ein System von Kräften, die an einem Punkte O wirken, durch zwei Systeme von gerichteten Strecken abgebildet, die zueinander ähnlich und ähnlich gelegen sind mit O als Ähnlichkeitspunkt, indem eine Kraft von k Krafteinheiten einmal durch eine Strecke von kp, beim anderen Kraftmaßstabe durch kq Längeneinheiten auf derselben Geraden repräsentiert wird.

2. Die Verbildlichung der Kräfte durch Vektoren bildet die Grundlage der graphischen Statik. Die an einem Massenpunkte angreifenden Kräfte verhalten sich wie Vektoren an einem Punkte (§ 24), die Kräfte, die an einem starren Körper wirken, wie linienflüchtige Vektoren (§ 25). Denn das Wesen des starren Körpers in streng statischer Auffassung besteht darin, daß zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte mit derselben Angriffslinie, die auf den starren Körper wirken, einander aufheben. Hat man also an einem starren Körper eine Kraft k mit einem Angriffspunkte A, so füge man auf der Angriffslinie a von k in A die entgegengesetzt gleiche Kraft hinzu, in einem anderen Punkte B von a dagegen die Kraft k selber. Die beiden hinzugefügten Kräfte heben einander auf; andererseits aber hebt die erste das ursprünglich gegebene k auf, so daß nur das nach B verlegte k übrig bleibt, d. h. mit anderen Worten: Man darf jede Kraft an einem starren Körper auf ihrer Angriffslinie verschieben, nur darf der Angriffspunkt den Körper nicht verlassen.

3. Auf das Verfahren der Kräftesummation mittels Krafteck und Seileck brauchen wir nicht mehr einzugehen. Sind Kräfte in einer Ebene zu summieren, die nicht an demselben Punkte angreifen, so ist nach § 26, 5 ein Lageplan der Angriffslinie erforderlich, auf welchen das Seileck sich gründet. Dieser Lageplan wird in den seltensten Fällen in natürlicher Größe gezeichnet werden können, in der Regel muß er eine ähnliche Verkleinerung des natürlichen Lageplanes sein. Dem so verkleinerten Lageplan muß dann der Längenmaßstab beigegeben werden, der erkennen läßt, wieviel Meter jedem Millimeter des Planes in der Wirklichkeit entsprechen.

Wie der Kräftemaßstab, so ist auch der Längenmaßstab auf das Ergebnis der Konstruktion ohne Einfluß. Man denke nämlich etwa Fig. 139 als Konstruktion der Resultante von Kräften $\mathbf{01}, \mathbf{12}, \ldots, (\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\boldsymbol{n}$ mit den Angriffslinien $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ändert man zunächst den Kräftemaßstab, so wird das Krafteck $\mathbf{012} \ldots \boldsymbol{n}$, wenn man seinen Anfangspunkt $\mathbf{0}$ beibehält, in ein ähnliches und ähnlich gelegenes mit $\mathbf{0}$ als Ähnlichkeitspunkt übergehen; statt P wähle man den zu P ähnlich gelegenen Punkt als Pol des neuen Kraftecks. Nun ändern wir auch den Längenmaßstab. Dann wird auch das System der Geraden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch ein ähnliches ersetzt (aber in einem anderen Ähnlichkeitsverhältnisse), wobei wir x_1 als beiden Systemen gemeinsam annehmen dürfen. Das neue Seileck wird dem alten ebenfalls ähnlich, die neue Lage der Resultante wird zu der alten homolog sein. Zwar wird der Vektor, der die Resultante verbildlicht, eine andere Länge haben, seine Richtung ist aber die

alte, und die jener Länge entsprechende Kraft, worauf es schließlich allein ankommt, ist ebenfalls die alte. Alles das ist eine einfache Folge der beiden Ähnlichkeiten, die wir festgestellt haben.

4. Gleichgewicht von Kräften an einem Punkte. Kräfte stehen im Gleichgewicht, wenn die ihnen entsprechenden Vektoren den Vektor Null zur Summe haben. Greifen die Kräfte an einem Punkte 0 an, während ihre Angriffslinien zugleich in einer Ebene liegen, so ist ihre Summe gleich der Schlußlinie (§ 23, 6) des Kraftecks. Soll diese den Vektor Null ergeben, so muß die letzte Ecke des Kraftecks, etwa A_n in Figur 120, mit der ersten zusammenfallen. Man sagt dann, das Krafteck schließe sich (§ 26, 1). Schließt sich das Krafteck, so ist umgekehrt die Resultante gleich Null.

Das Zusammenfallen von A_n mit O in Figur 120 kann auch durch die Forderung erzwungen werden, daß die Parallelprojektionen der Seiten des Kraftecks auf zwei Geraden OX_n, OY_n je einen geschlossenen Streckenzug $OX_1 \ldots X_n$ und $OY_1 \ldots Y_n$ bilden, dessen letzter Punkt mit dem ersten zusammenfällt; d. h. die Komponenten der Kräfte auf jenen beiden Geraden müssen je für sich die Resultante Null haben. Diese Forderung ist nicht nur ausreichend, um Gleichgewicht herbeizuführen, sondern auch notwendig. Es genügt nämlich nicht, wenn der Streckenzug $OX_1 \ldots X_n$ sich schließt, um das Zusammenfallen von A_n mit O zu sichern, da, falls X_n mit O zusammenfällt, A_n noch jede Lage auf der Geraden OY_n haben könnte. Wenn auch noch $OY_1 \ldots Y_n$ sich schließt, ist das unmöglich.

Ein einfaches Kriterium des Gleichgewichtes unsers Kräftesystems ergibt sich auch aus dem Satze von den statischen Momenten, § 24, 7. Danach muß im Falle des Gleichgewichtes die Summe der statischen Momente der Kräfte in Bezug auf irgend einen Drehpunkt P gleich Null sein. Diese Bedingung ist aber nicht ausreichend. Denn wenn sie für einen gewissen Punkt P erfüllt ist, kann gleichwohl das Kräftesystem eine von Null verschiedene Resultante haben, falls P auf ihr liegt. Die Resultante geht natürlich durch den Angriffspunkt O dieser Kräfte. Ist nun die Momentensumme auch noch für einen Punkt Q gleich Null, der nicht auf der Geraden OP liegt, so kann durch ihn eine etwa vorhandene Resultante nicht hindurchgehen, muß also ein von Null verschiedenes Moment bezüglich Q haben, falls sie nicht Null ist. Sie ist aber gleich Null, weil ihr Moment gleich der Momentensumme ist. Durch das Verschwinden der Momentensumme bezüglich Q ist also das Gleichgewicht garantiert.

Alles das zusammenfassend haben wir also den

Satz 1. Wenn in einer Ebene ein System von Kräften gegeben ist, die an demselben Punkte O angreifen, so

besteht Gleichgewicht stets und nur dann, wenn eine der Bedingungen I., II., III. erfüllt ist:

I. Ein Krafteck des Systems muß sich schließen.

II. Die Komponenten dieser Kräfte auf zwei Geraden x und y durch O haben je die algebraische Summe Null.

III. Die Momentensummen der Kräfte in zwei Punkten P und Q, die mit O nicht in einer Geraden liegen, sind Null.

Mit jeder dieser Bedingungen sind auch die beiden anderen erfüllt.

5. Gleichgewicht in der starren Ebene. Ein wichtiger Hilfsbegriff der Statik ist der der starren Ebene. Diese wird aus der ebenen Oberfläche eines starren Körpers erhalten, wenn man sich diese bis ins Unendliche ausgedehnt denkt, so daß in dieser Ebene liegende Kräfte uneingeschränkt als linienflüchtige Vektoren behandelt werden können. Für das Gleichgewicht in der starren Ebene gilt der

Satz 2. Ein System von Kräften in einer starren Ebene befindet sich im Gleichgewichte stets und nur dann, wenn eine der Bedingungen I., II., III. erfüllt ist:

I. Es schließt sich je ein Krafteck und ein Seileck.

II. Die Komponenten der Kräfte nach den drei Seiten eines Dreiecks haben je die algebraische Summe Null.

III. Die Momentensummen bezüglich dreier Punkte A, B, C, die nicht in gerader Linie liegen, sind Null.

Wenn eine dieser Bedingungen erfüllt ist, sind auch die übrigen verwirklicht.

Zum Beweise von I. bemerken wir zunächst, daß es nicht ausreicht, wenn ein Krafteck sich schließt; es könnte dann das Kräftesystem immer noch auf ein eigentliches Gegenpaar zurückführbar sein, wie wir in Fig. 139 (S. 187) sehen. Das wird verhindert durch die Forderung, daß die letzte Seite u_n des Seilecks mit der ersten u_0 zusammenfallen soll. Das Gegenpaar wird dann zu einem uneigentlichen, das auf derselben Angriffslinie wirkt und sich daher aufhebt.

6. Zur Vorbereitung des Beweises von II. und III. stellen wir uns die Aufgabe: eine Kraft k nach den drei Seiten eines Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ zu zerlegen (Fig. 153).

Es gilt, auf A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 drei Kräfte k_1, k_2, k_3 zu bestimmen, deren Resultante k ist. Wären sie bekannt, so würde man die Probe machen können, indem man ein Krafteck **0123** anlegt mit $\mathbf{01} = k_1$ als erster, $\mathbf{12} = k_2$ als zweiter, $\mathbf{23} = k_3$ als dritter Seite; dann wäre $\mathbf{03} = k$. Nun muß aber die Resultante R_{23} von k_2 und k_3 auf der Geraden A_1U_1 liegen, wo U_1 den Schnittpunkt von k mit A_2A_3 bezeichnet; denn sie muß jedenfalls durch A_1 gehen, und wenn U_1' ihr Schnittpunkt mit A_2A_3 ist, so muß die Resultante R von R_{23} und k_1 durch U_1' gehen, und da sie mit k identisch sein soll, so fällt U_1' mit U_1 zusammen. Nach Größe und Richtung können wir aber R_{23} auch aus dem Krafteck entnehmen: $R_{23} = \mathbf{13}$.

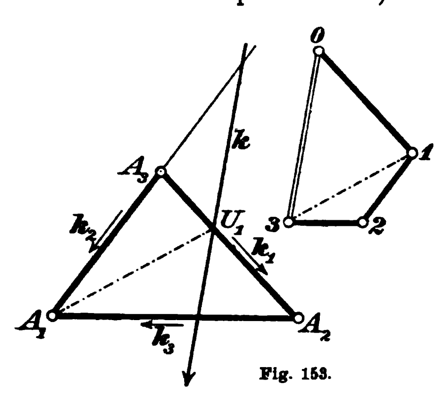


Fig. 153.

Durch diese Angaben ist aber das Krafteck nach willkürlicher Annahme von **0** bestimmt:

> Man mache $\mathbf{03} = k$, ziehe durch **0** zu A_2A_3, durch **3** zu A_1U_1 die Parallele, ziehe durch den Schnittpunkt **1** dieser Parallelen eine weitere Parallele zu A_1A_3, durch **3** eine zu A_1A_2, so treffen sich die beiden letzten Parallelen in einem Punkte **2**, so daß $k_1 = \mathbf{01}$, $k_2 = \mathbf{12}$, $k_3 = \mathbf{23}$ die gesuchten Komponenten sind.

Eine weniger elegante Lösung dieser Aufgabe kann aus Figur 126 entnommen werden.

Geht k durch eine Ecke des Dreiecks, so fällt auf die gegenüberliegende Seite keine Komponente.

7. Hat man nun ein vorgelegtes Kräftesystem nach seinen Komponenten auf den Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$ zerlegt, und ist die Komponentensumme auf jeder Seite des Dreiecks Null, so besteht sicher Gleichgewicht. Andererseits reicht es zur Sicherung des Gleichgewichts nicht aus, wenn auf zwei Seiten des Dreiecks, etwa auf A_1A_2 und A_1A_3, die Summe der Komponenten, verschwindet, denn wenn man auf der dritten Seite A_2A_3 eine Kraft annimmt, so hat diese auf A_1A_2 und A_1A_3 keine Komponente, und das aus dieser Kraft bestehende System ist trotzdem nicht im Gleichgewicht. Die Bedingung II. ist daher hinreichend und notwendig.

8. Reduziert sich das Kräftesystem auf eine Resultante oder auf ein Gegenpaar, so ist das Moment der Resultante oder des Gegen-



paares im Falle III. bezüglich jedes der Punkte A_1, A_2, A_3 gleich Null. Dadurch ist ein eigentliches Kräftepaar ausgeschlossen, da das Moment eines solchen nie verschwinden kann (§ 25, 9.). Aber auch eine von Null verschiedene Resultante ist unmöglich, da eine solche nur dann bezüglich eines Punktes ein verschwindendes Moment hat, wenn der Punkt auf ihr liegt. Da aber A_1, A_2, A_3 nicht zugleich auf dieser Kraft liegen können, so ist diese Annahme ausgeschlossen. Es herrscht also, wenn III. erfüllt ist, Gleichgewicht, während das Verschwinden der Momentensumme in zwei Punkten A_1, A_2 nicht immer ausreicht, um Gleichgewicht herbeizuführen. Denn eine auf A_1A_2 liegende Kraft ist nicht im Gleichgewicht, obwohl sie in A_1 und A_2 das Moment Null hat.

Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen. Der Teil III. dieses Satzes legt die Frage nach der gegenseitigen Abhängigkeit der statischen Momente einer Kraft bezüglich mehrerer Drehpunkte nahe; es muß möglich sein, aus einer gewissen Anzahl dieser Momente die übrigen eindeutig zu berechnen. Diese Frage soll im nächsten Paragraphen erledigt werden. Sie führt in interessante geometrische Zusammenhänge.

§ 29. Graphostatik und Dreieckskoordinaten.

1. Orientierung der Geraden. Jeder Geraden, die im folgenden in Betracht kommen soll, legen wir willkürlich durch einen daran gesetzten Pfeil einen Sinn oder eine Orientierung bei und messen den Abstand eines Punktes von dieser Geraden positiv oder negativ, je nachdem sie vermöge ihrer Orientierung in dem Punkte positiven oder negativen Drehsinn bestimmt (§ 23, 2.). Auf der Geraden nach ihrer Richtung zu blickend hat man die Punkte positiven Abstandes zur Linken, die Punkte negativen Abstandes zur Rechten der Geraden. Die so gemessenen Abstände mögen orientierte Abstände heißen (§ 24, 8.).

2. Orientierung der Flächeninhalte. Um auch dem Flächeninhalte eines Dreiecks ein Vorzeichen beilegen zu können, werden nach § 23, 2. seine Seiten so orientiert, daß sie in einem — und damit in jedem — Punkte der Innenfläche denselben Drehsinn bestimmen. Dieser ist aber durch Orientierung einer Seite bereits festgelegt. Je nachdem nun dieser Drehsinn für die Punkte des Inneren positiv oder negativ ist, wird der orientierte Flächeninhalt positiv oder negativ gemessen.

Der folgenden Betrachtung legen wir ein Dreieck $A_1A_2A_3$ zu-

grunde (Fig. 154) dessen Inhalt Δ positiv orientiert sei. Ist X ein Punkt der Ebene dieses Grunddreiecks, so sollen die drei Dreiecke, die X mit A_1, A_2, A_3 bestimmt, die Orientierung der Seiten des Grunddreiecks beibehalten. Die so orientierten Dreiecke bezeichnen wir mit

(1) $$X_1 = A_2 A_3 X, \quad X_2 = A_3 A_1 X, \quad X_3 = A_1 A_2 X.$$

Für jede Lage von X in der Ebene von Δ ist

(2) $$X_1 + X_2 + X_3 = \Delta.$$

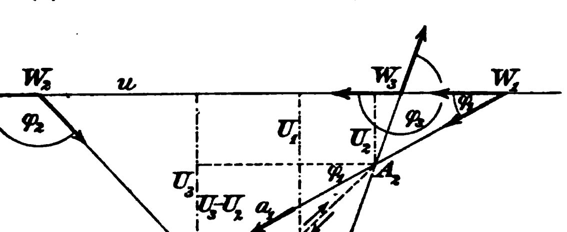


Fig. 154.

3. Orientierung der Winkel. Die drei Neigungswinkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ einer Geraden u gegen die Seiten a_1, a_2, a_3 des Grunddreiecks werden folgendermaßen definiert (Fig. 154): Die orientierte Gerade wird um einen ihrer Punkte in positivem Sinne (gegen den Sinn der Bewegung der Uhrzeiger) gedreht, bis sie zu der orientierten Geraden a_i parallel ist und auch im Sinne mit ihr übereinstimmt (§ 23, 3.). Der Drehwinkel ist dann $\varphi_i (i = 1, 2, 3)$. Indem man zu u durch A_1, A_2, A_3 die Parallelen zieht und ihnen die Orientierung von u erteilt, erhält man aus der Figur:

(3) $$\begin{cases} \sin \varphi_1 = -\dfrac{U_2 - U_3}{a_1}, & \varphi_2 - \varphi_3 = \alpha_1 \pm 2R, \\ \sin \varphi_2 = -\dfrac{U_3 - U_1}{a_2}, & \varphi_3 - \varphi_1 = \alpha_2 \pm 2R, \\ \sin \varphi_3 = -\dfrac{U_1 - U_2}{a_3}, & \varphi_1 - \varphi_2 = \alpha_3 \pm 2R, \text{ (vgl. Bd. II, § 57, 6)}, \end{cases}$$

wenn U_1, U_2, U_3 die orientierten Abstände der Punkte A_1, A_2, A_3 von u und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Winkel des Grunddreiecks sind. Aus (3) folgt:

(4) $$\begin{cases} a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2 + a_3 \sin \varphi_3 = 0, \\ a_1 U_1 \sin \varphi_1 + a_2 U_2 \sin \varphi_2 + a_3 U_3 \sin \varphi_3 = 0. \end{cases}$$

4. Winkelmessung. Auf der Geraden u nehmen wir eine Kraft k an, die mit der Pfeilrichtung von u übereinstimme; ihre

absolute Länge sei k (Fig. 155). Wir zerlegen sie nach dem im vorigen Paragraphen angegebenen Verfahren in ihre Komponenten $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3$ auf den Seiten a_1, a_2, a_3 des Grunddreiecks. Mit positivem oder negativem Vorzeichen gemessen, je nachdem der Sinn der $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3$ mit dem Sinne der orientierten Seiten a_1, a_2, a_3 übereinstimmt oder nicht, mögen diese Komponenten die Größen k_1, k_2, k_3 haben. Wenn wir die Orientierung der Geraden a_1, a_2, a_3 auch auf die dazu parallelen Seiten **01**, **12**, **23** des Kraftecks übertragen, so haben die so orientierten Seiten des Kraftecks gegen **03** die Neigungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, woraus folgt:

$$k = k_1 \cos \varphi_1 + k_2 \cos \varphi_2 + k_3 \cos \varphi_3 . \tag{5}$$

Diese Formel läßt sich noch etwas verallgemeinern: Wir drehen die Gerade u um irgend einen ihrer Punkte D im positiven Sinne durch einen beliebigen Winkel θ in eine neue Lage, die v heißen möge; die neue Lage von $\mathfrak{k}$ heiße $\mathfrak{k}'$. Auch $\mathfrak{k}'$ wird in seine Komponenten $\mathfrak{k}_1', \mathfrak{k}_2', \mathfrak{k}_3'$ auf den Geraden a_1, a_2, a_3 zerlegt, die, wie die $\mathfrak{k}_i$, in der Richtung der a_i positiv gemessen die Längen k_1', k_2', k_3' haben mögen. Das zu dieser Konstruktion erforderliche Krafteck **0′1′2′3′** möge mit **0123** die Anfangsecke **0** gemeinschaftlich haben. Dann liegt **1′** auf **01**. Ferner ist **1′2′** $\parallel$ **12** $\parallel a_2$, **2′3′** $\parallel$ **23** $\parallel a_3$, $\sphericalangle$ **303′** $= \theta$. Bis auf die Richtung sind die Seiten **01′**, **1′2′**, **2′3′** gleich k_1', k_2', k_3', und wenn man auf **01′**, **1′2′**, **2′3′** die Orientierung von a_1, a_2, a_3 überträgt — wie wir es soeben bei **0123** getan — so haben die so orientierten Seiten des Kraftecks **01′2′3′** gegen **03** die Neigungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; die Summe der Orthogonalprojektionen dieser drei Seiten auf **03** ist daher $k_1' \cos \varphi_1 + k_2' \cos \varphi_2 + k_3' \cos \varphi_3$. Andererseits ist diese Summe aber gleich der Orthogonalprojektion von **03′** auf **03**, also gleich $k' \cos \theta$. Daher ist:

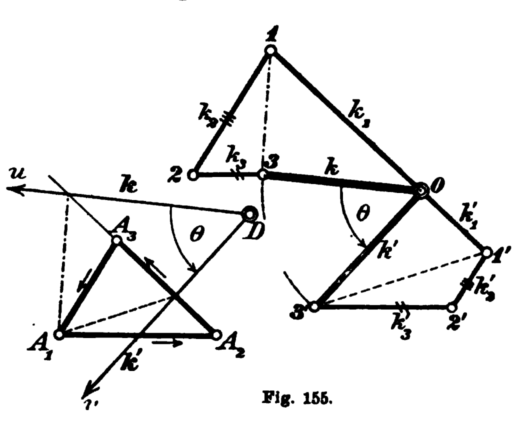


Fig. 155.

$$k' \cos \theta = k_1' \cos \varphi_1 + k_2' \cos \varphi_2 + k_3' \cos \varphi_3 , \tag{6}$$

wo k' natürlich gleich k ist. Für $\theta = 0$ folgt hieraus wieder Formel (5).

Jetzt wenden wir den Momentensatz auf das System der Kräfte $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3$ und ihre Resultante $\mathfrak{k}$ an, indem wir den Drehpunkt der Reihe nach mit A_1, A_2, A_3 zusammenfallen lassen. Sind h_1, h_2, h_3

die Höhen des Grunddreiecks, so ist danach:

$$kU_1 = k_1 h_1, \quad kU_2 = k_2 h_2, \quad kU_3 = k_3 h_3, \tag{7}$$

und wenn V_1, V_2, V_3 die orientierten Abstände der Punkte A_1, A_2, A_3 von der orientierten Geraden v bedeuten, findet sich ebenso:

$$kV_1 = k_1' h_1, \quad kV_2 = k_2' h_2, \quad kV_3 = k_3' h_3. \tag{8}$$

Durch Einsetzen der Werte (7) und (8) in (5) und (6) folgt:

$$1 = \frac{U_1}{h_1} \cos \varphi_1 + \frac{U_2}{h_2} \cos \varphi_2 + \frac{U_3}{h_3} \cos \varphi_3, \tag{9}$$

$$\cos \theta = \frac{V_1}{h_1} \cos \varphi_1 + \frac{V_2}{h_2} \cos \varphi_2 + \frac{V_3}{h_3} \cos \varphi_3, \tag{10}$$

oder nach Multiplikation mit $2\Delta = a_1 h_1 = a_2 h_2 = a_3 h_3$:

$$2\Delta = a_1 U_1 \cos \varphi_1 + a_2 U_2 \cos \varphi_2 + a_3 U_3 \cos \varphi_3 = \sum_i a_i U_i \cos \varphi_i, \tag{11}$$

$$2\Delta \cos\theta = a_1 V_1 \cos \varphi_1 + a_2 V_2 \cos \varphi_2 + a_3 V_3 \cos \varphi_3 = \sum_i a_i V_i \cos \varphi_i. \tag{12}$$

Für $\theta = 0$ geht (12) in (11) über. Unter u_1, u_2, u_3 und v_1, v_2, v_3 einmal ganz beliebige Variabeln verstehend bilden wir:

$$\begin{gathered} \Phi_{uv} = \Phi_{vu} = \\ \Big(\sum_i a_i u_i \cos \varphi_i\Big)\Big(\sum_i a_i v_i \cos \varphi_i\Big) + \Big(\sum_i a_i u_i \sin \varphi_i\Big)\Big(\sum_i a_i v_i \sin \varphi_i\Big). \end{gathered} \tag{13}$$

Eine kurze Rechnung gibt:

$$\begin{aligned} \Phi_{uv} = a_1^2 u_1 v_1 + a_2^2 u_2 v_2 + a_3^2 u_3 v_3 &+ a_1 a_2 (u_1 v_2 + u_2 v_1) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &+ a_2 a_3 (u_2 v_3 + u_3 v_2) \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \\ &+ a_3 a_1 (u_3 v_1 + u_1 v_3) \cos(\varphi_3 - \varphi_1), \end{aligned}$$

also ist wegen (3) endgültig

$$\begin{aligned} \Phi_{uv} = a_1^2 u_1 v_1 + a_2^2 u_2 v_2 + a_3^2 u_3 v_3 &- a_1 a_2 (u_1 v_2 + u_2 v_1) \cos \alpha_3 \\ &- a_2 a_3 (u_2 v_3 + u_3 v_2) \cos \alpha_1 \\ &- a_3 a_1 (u_3 v_1 + u_1 v_3) \cos \alpha_2, \end{aligned} \tag{14}$$

und speziell

$$\begin{gathered} \Phi_{uu} = a_1^2 u_1^2 + a_2^2 u_2^2 + a_3^2 u_3^2 \\ - 2 a_1 a_2 u_1 u_2 \cos \alpha_3 - 2 a_2 a_3 u_2 u_3 \cos \alpha_1 - 2 a_3 a_1 u_3 u_1 \cos \alpha_2 \end{gathered} \tag{15}$$

mit der Definitionsformel (nach (13)):

$$\Phi_{uu} = \Big(\sum_i a_i u_i \cos \varphi_i\Big)^2 + \Big(\sum a_i u_i \sin \varphi_i\Big)^2. \tag{16}$$

Hieraus findet man leicht nach den Formeln $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$ und $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ die Darstellung:

$$\Phi_{uu} = \tag{17}$$
$$(a_1 u_1 e^{i\varphi_1} + a_2 u_2 e^{i\varphi_2} + a_3 u_3 e^{i\varphi_3})(a_1 u_1 e^{-i\varphi_1} + a_2 u_2 e^{-i\varphi_2} + a_3 u_3 e^{-i\varphi_3}),$$

die besagt, daß Φ_{uu} eine in zwei Linearfaktoren zerfällbare quadratische Form ist.

Das gilt also für ganz beliebige u_1, u_2, u_3 und v_1, v_2, v_3. Jetzt setzen wir insbesondere $u_i = U_i$, $v_i = V_i$. Mit Rücksicht auf (11), (12) und (4) folgt dann aus (13) und (16):

$$4\Delta^2 \cos\theta = \Phi_{UV} = \left(\sum_i a_i U_i \cos\varphi_i\right)\left(\sum_i a_i V_i \cos\varphi_i\right), \quad 4\Delta^2 = \Phi_{UU}. \tag{18}$$

Hiernach ist auch $\Phi_{VV} = 4\Delta^2$, also $\cos\theta = \Phi_{UV}/\sqrt{\Phi_{UU}\Phi_{VV}}$. Setzt man darin:

$$U_i = \alpha u_i, \quad V_i = \beta v_i, \tag{19}$$

so heben sich die Proportionalitätsfaktoren α, β heraus, und man bekommt:

$$\cos\theta = \frac{\Phi_{uv}}{\sqrt{\Phi_{uu}\Phi_{vv}}} \tag{20}$$

als Formel für den Neigungswinkel zweier Geraden, deren orientierte Abstände U_1, U_2, U_3 und V_1, V_2, V_3 von den Ecken des Grunddreiecks zu u_1, u_2, u_3 bzw. v_1, v_2, v_3 proportional sind:

$$U_1 : U_2 : U_3 = u_1 : u_2 : u_3, \quad V_1 : V_2 : V_3 = v_1 : v_2 : v_3.$$

Die Formel $4\Delta^2 = \Phi_{UU}$ zeigt uns, daß die U_1, U_2, U_3 nicht ganz unabhängig voneinander sind.

Aus (20) sind auch die Kosinus der Neigungswinkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ der Geraden u gegen a_1, a_2, a_3 leicht zu berechnen, worauf wir indessen nicht eingehen wollen.[1])

---

1) Nach (20) ist:

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{\Phi_{uu}\Phi_{vv} - \Phi_{uv}^2}}{\sqrt{\Phi_{uu}\Phi_{vv}}},$$

also

$$e^{2i\theta} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{\Phi_{uv} + \sqrt{\Phi_{uv}^2 - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}{\Phi_{uv} - \sqrt{\Phi_{uv}^2 - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}},$$

woraus die berühmte Formel von Laguerre folgt:

$$\theta = \frac{1}{2i} \ln \frac{\Phi_{uv} + \sqrt{\Phi_{uv}^2 - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}{\Phi_{uv} - \sqrt{\Phi_{uv}^2 - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}},$$

die zur Cayleyschen Auffassung der Metrik hingeführt hat.

5. Abstand eines Punktes von einer Geraden. Bezeichnen p, p_1, p_2, p_3 die orientierten Abstände eines Punktes X von den orientierten Geraden u, a_1, a_2, a_3, und ist u die Gerade des vorigen Artikels, auf der eine Kraft k mit den Komponenten k_1, k_2, k_3 angenommen war, so ist nach dem Momentensatze bezüglich X als Drehpunkt:

$$kp = k_1 p_1 + k_2 p_2 + k_3 p_3. \tag{21}$$

X sei der in Figur 154 so genannte Punkt, der die drei orientierten Flächen X_1, X_2, X_3 bestimmt; dann ist

$$2X_1 = a_1 p_1, \quad 2X_2 = a_2 p_2, \quad 2X_3 = a_3 p_3, \tag{22}$$

und wenn man in (21) die k_i nach (7) durch die U_i ersetzt, so folgt nach Multiplikation der Gleichung (21) mit Δ nach (22):

$$p\Delta = U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 \tag{23}$$

als Formel zur Berechnung des Abstandes p des Punktes X von der Geraden u. Ist $\omega x_i = X_i$, also

$$x_1 : x_2 : x_3 = X_1 : X_2 : X_3, \tag{24}$$

so ist (da $\Delta = X_1 + X_2 + X_3$):

$$p = \frac{U_1 x_1 + U_2 x_2 + U_3 x_3}{x_1 + x_2 + x_3}, \tag{25}$$

oder wenn man nach (18) durch $2\Delta = \sqrt{\Phi_{UU}}$ dividiert und $U_1 : U_2 : U_3 = u_1 : u_2 : u_3$ einführt:

$$\frac{p}{2\Delta} = \frac{u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3}{(x_1 + x_2 + x_3)\sqrt{\Phi_{uu}}}. \tag{26}$$

6. Punktkoordinaten. In allen diesen Formeln haben sich die durch X bestimmten Inhalte X_1, X_2, X_3 und die durch u festgelegten Abstände U_1, U_2, U_3 als so fundamentale Hilfsgrößen bewährt, daß wir ihnen nunmehr unsere Aufmerksamkeit zuwenden müssen. Zunächst stellen wir fest, daß nicht nur der Punkt X die Inhalte X_1, X_2, X_3 bestimmt, sondern umgekehrt die Inhalte X_1, X_2, X_3, die der Bedingung (2) genügen, immer eindeutig einen Punkt X festlegen. Um das einzusehen, hat man nur einem bekannten Gedankengange zu folgen, der zum Satze von Ceva (§ 27, 3) hinführt. Wir müssen also die Punkte P_1, P_2, P_3 in Betracht ziehen (Fig. 156), in denen die Ecktransver-

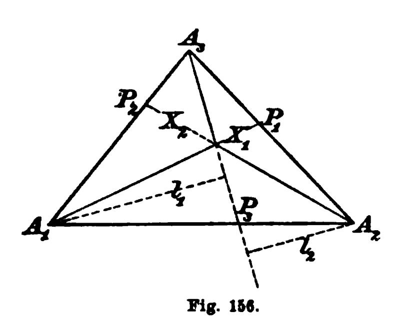


Fig. 156.

salen des Punktes X die gegenüberliegenden Seiten treffen. Sind l_1 und l_2 die Lote aus A_1 und A_2 auf XA_3, so ist, da sich Dreiecke von gleicher Grundlinie wie die Höhen verhalten:

$$X_2 : X_1 = l_1 : l_2 = A_1 P_3 : P_3 A_2 .$$

Nach Ausschaltung des mittleren Verhältnisses ist das auch hinsichtlich der Vorzeichen richtig, wenn man auf den Seiten des Grunddreiecks alle Strecken im Sinne der Orientierung dieser Seiten positiv, im Gegensinne negativ mißt. In dieser verschärften Fassung ist also unter der Voraussetzung (24):

$$(27) \qquad \frac{A_1 P_3}{P_3 A_2} = \frac{x_1^{-1}}{x_2^{-1}}, \quad \frac{A_2 P_1}{P_1 A_3} = \frac{x_2^{-1}}{x_3^{-1}}, \quad \frac{A_3 P_2}{P_2 A_1} = \frac{x_3^{-1}}{x_1^{-1}}.$$

Hiernach ist

$$(28) \qquad \frac{A_1 P_3}{P_3 A_2} \cdot \frac{A_2 P_1}{P_1 A_3} \cdot \frac{A_3 P_2}{P_2 A_1} = 1 .$$

Das ist nach dem Satze des Ceva das Kriterium dafür, daß die Ecktransversalen $A_1 P_1$, $A_2 P_2$, $A_3 P_3$ sich in einem Punkte X treffen. Teilt man also, von beliebigen positiven oder negativen Größen x_1, x_2, x_3 ausgehend, die Seiten a_1, a_2, a_3 in den Verhältnissen (27), so gehen die Ecktransversalen der drei Teilpunkte P_1, P_2, P_3 durch einen Punkt X derart, daß die von diesem Punkte bestimmten Dreiecke X_1, X_2, X_3 zu x_1, x_2, x_3 proportional sind ((24)), und wenn man $X_i = \alpha x_i$ setzt, so findet man den Proportionalitätsfaktor α nach (2) gleich $\alpha = \varDelta/(x_1 + x_2 + x_3)$.

Die Größen X_1, X_2, X_3 die durch den Punkt X eindeutig bestimmt werden und ihn eindeutig bestimmen, heißen die Dreieckskoordinaten dieses Punktes; da aber schon die zu den X_1, X_2, X_3 proportionalen Größen x_1, x_2, x_3, für die also $x_1 : x_2 : x_3 = X_1 : X_2 : X_3$ ist, zur eindeutigen Konstruktion von X vollkommen ausreichen, so werden sie ebenfalls als Koordinaten verwendet und mögen von den „absoluten" X_1, X_2, X_3 als „relative" unterschieden werden. Die Einführung relativer Koordinaten ist notwendig, wenn auch die unendlich fernen Punkte in Betracht gezogen werden sollen. Die drei Ecktransversalen eines unendlich fernen Punktes teilen die drei Seiten des Grunddreiecks in ganz bestimmten Verhältnissen, aus denen sich die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ berechnen lassen, während die absoluten Koordinaten unendlich groß sind. Zieht man z. B. die Ecktransversalen nach dem unendlich fernen Punkte der Geraden u

(Fig. 157) des vorangehenden Artikels, d. h. also die Parallelen durch A_1, A_2, A_3 zu u, und treffen sie die Gegenseiten in den Punkten P_1, P_2, P_3, so sind, wenn x_1, x_2, x_3 die Relativkoordinaten des unendlich fernen Punktes von u bezeichnen, die Gleichungen (27) erfüllt. Da aber $A_3 P_3$, wie u selber, zu a_1 und a_2 die Neigungswinkel φ_1 und φ_2 hat, so ist:

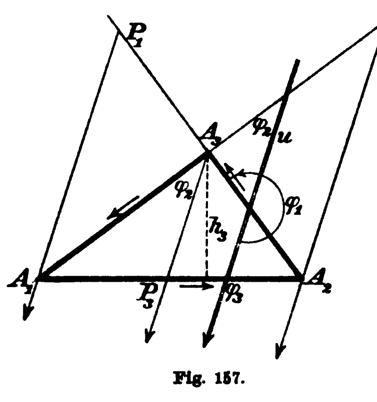


Fig. 157.

$$\frac{A_1 P_3}{P_3 A_2} = \frac{\frac{1}{2} A_1 P_3 \cdot h_3}{\frac{1}{2} P_3 A_2 \cdot h_3} = \frac{\text{Dreieck } A_1 A_3 P_3}{\text{Dreieck } P_3 A_3 A_2}$$
$$= \frac{\frac{1}{2} a_2 \cdot A_3 P_3 \sin \varphi_2}{\frac{1}{2} a_1 \cdot A_3 P_3 \sin \varphi_1} = \frac{a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \sin \varphi_1},$$

also nach (27):

$$x_2 : x_1 = a_2 \sin \varphi_2 : a_1 \sin \varphi_1,$$

und ebenso

$$x_2 : x_3 = a_2 \sin \varphi_2 : a_3 \sin \varphi_3,$$

also:

$$(29) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = a_1 \sin \varphi_1 : a_2 \sin \varphi_2 : a_3 \sin \varphi_3 .$$

Das sind die relativen Koordinaten des unendlich fernen Punktes einer Geraden, die gegen a_1, a_2, a_3 die Neigungswinkel φ_1, φ_2, φ_3 hat, und nach (4) ist für jeden unendlich fernen Punkt

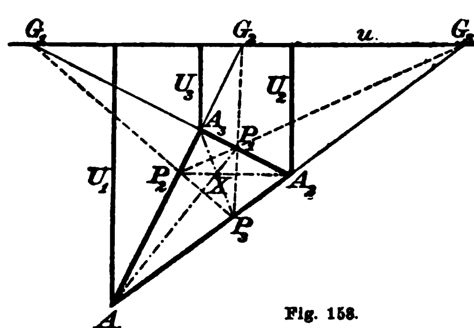


Fig. 158.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 .$$

Die Lote auf dieser Geraden gehen durch den unendlich fernen Punkt

$$(30) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = a_1 \cos \varphi_1 : a_2 \cos \varphi_2 : a_3 \cos \varphi_3 .$$

7. Linienkoordinaten. Eine Gerade u (Fig. 158) mit den Abständen U_1, U_2, U_3 von A_1, A_2, A_3 teilt die Seiten a_1, a_2, a_3 des Grunddreiecks in drei Punkten G_1, G_2, G_3 nach den Verhältnissen:

$$(31) \qquad \frac{A_1 G_3}{G_3 A_2} = -\frac{U_1}{U_2}, \quad \frac{A_2 G_1}{G_1 A_3} = -\frac{U_2}{U_3}, \quad \frac{A_3 G_2}{G_2 A_1} = -\frac{U_3}{U_1},$$

falls wiederum auf a_1, a_2, a_3 alle Strecken im Sinne dieser Dreiecksseiten positiv, im Gegensinne negativ gemessen werden. Aus (31) folgt:

$$(32) \qquad \frac{A_1 G_3}{G_3 A_2} \cdot \frac{A_2 G_1}{G_1 A_3} \cdot \frac{A_3 G_2}{G_2 A_1} = -1 .$$

Weiß man von den drei Teilpunkten G_1, G_2, G_3 nur, daß sie die

Bedingung (32) erfüllen, aber nicht, daß sie in einer Geraden liegen, so ist, falls G_3' den Schnittpunkt der Geraden G_1G_2 mit a_3 bezeichnet, auch

$$(33) \qquad \frac{A_1G_3'}{G_3'A_2}\cdot\frac{A_2G_1}{G_1A_3}\cdot\frac{A_3G_2}{G_2A_1} = -1,$$

also nach (32) und (33):

$$A_1G_3 : G_3A_2 = A_1G_3' : G_3'A_2.$$

Da es aber nur einen Punkt gibt, der eine Strecke A_1A_2 auch dem Vorzeichen nach in bestimmtem Verhältnis teilt, so folgt hieraus, daß G_3' mit G_3 zusammenfällt, d. h. die Formel (32) hat stets für die Punkte G_1, G_2, G_3 zur Folge, daß sie in einer Geraden liegen. Das ist der

Satz des Menelaos. Wenn drei Punkte G_1, G_2, G_3 der drei Seiten a_1, a_2, a_3 eines Dreiecks $A_1A_2A_3$ die Gleichung (32) erfüllen, so liegen sie auf einer Geraden, und umgekehrt.

Ist nun $u_1 : u_2 : u_3 = U_1 : U_2 : U_3$, und teilt man die Seiten a_1, a_2, a_3 in G_1, G_2, G_3 nach (31) in den Verhältnissen:

$$(34) \qquad \frac{A_1G_3}{G_3A_2} = -\frac{u_1}{u_2}, \quad \frac{A_2G_1}{G_1A_3} = -\frac{u_2}{u_3}, \quad \frac{A_3G_2}{G_2A_1} = -\frac{u_3}{u_1},$$

so liegen G_1, G_2, G_3 auf einer Geraden, und ihre Abstände U_1, U_2, U_3 können gefunden werden, indem man $U_i = \varepsilon u_i$ setzt und zur Berechnung des Proportionalitätsfaktors ε die Formel (18) anwendet, welche Φ_{UU} mit dem Inhalte Δ in Beziehung setzt. Danach ist:

$$\varepsilon^2 = \frac{4\Delta^2}{\Phi_{uu}}.$$

Da also eine Gerade die Größen U_1, U_2, U_3 stets eindeutig bestimmt und durch sie eindeutig bestimmt wird, da ferner zur Bestimmung der Geraden die Größen u_1, u_2, u_3 ausreichen, wenn nur $u_1 : u_2 : u_3 = U_1 : U_2 : U_3$, so werden die U_1, U_2, U_3 als absolute, die u_1, u_2, u_3 als relative Dreieckskoordinaten der Geraden bezeichnet. Die Koordinaten des Punktes heißen Punktkoordinaten, die Geraden der Linie entsprechend Linienkoordinaten. Die Formel (26) gibt den Abstand des Punktes X mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 von der Geraden u mit den Koordinaten u_1, u_2, u_3 an. Die Gerade geht daher durch den Punkt, der Punkt liegt auf der Geraden, wenn $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ ist. Den Punkt mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 werden wir kurz als Punkt (x_1, x_2, x_3) be-

zeichnen, die Gerade mit den Koordinaten u_1, u_2, u_3 kurz als Gerade (u_1, u_2, u_3).

8. Die Momentensummen. Eine erste Anwendung der Dreieckskoordinaten soll die Momentensumme M eines ebenen Kräftesystems bezüglich eines Drehpunktes X betreffen, wenn die Momentensummen M_1, M_2, M_3 bezüglich der Ecken A_1, A_2, A_3 des Grunddreiecks als Drehpunkte gegeben sind. Ist k eine dieser Kräfte, k ihre absolut genommene Größe, so orientieren wir ihre Angriffslinie u im Sinne von k. Dann folgt durch Multiplikation von (25) mit k

$$kp = \frac{kU_1 \cdot x_1 + kU_2 \cdot x_2 + kU_3 \cdot x_3}{x_1 + x_2 + x_3}.$$

Hier steht links das Moment von k in X, rechts sind kU_1, kU_2, kU_3 die Momente von k in A_1, A_2, A_3. Stellt man für die übrigen Kräfte des Systems die entsprechenden Formeln auf, so ergibt sich durch Addition aller dieser Ausdrücke:

$$M = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3}{x_1 + x_2 + x_3}.$$

Wenn die Momente einer Kraft oder die Momentensummen eines ebenen Systems in den Ecken eines Grunddreiecks gleich M_1, M_2, M_3 sind, so ist das Moment oder die Momentensumme im Punkte (x_1, x_2, x_3) gegeben durch

$$M = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3}{x_1 + x_2 + x_3}, \tag{35}$$

und die Gleichung der Kraft oder der Resultante ist daher

$$M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3 = 0. \tag{35'}$$

9. Die Dreieckspolaren. Konstruiert man in der Figur 158 zu den Punkten G_1, G_2, G_3 die Punkte P_1, P_2, P_3 (Fig. 159), die von G_1, G_2, G_3 durch A_2 und A_3, bzw. A_3 und A_1, A_1 und A_2 harmonisch getrennt werden, so ist wegen (34):

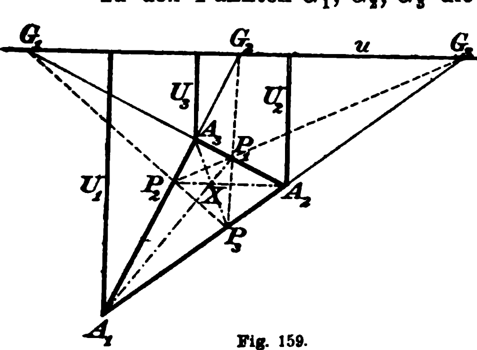


Fig. 159.

$$\frac{A_1 P_3}{P_3 A_2} = +\frac{u_1}{u_2}, \quad \frac{A_2 P_1}{P_1 A_3} = +\frac{u_2}{u_3}, \quad \frac{A_3 P_2}{P_2 A_1} = +\frac{u_3}{u_1},$$

und die Ecktransversalen von P_1, P_2, P_3 gehen daher nach dem Satze von Ceva durch einen Punkt (x_1, x_2, x_3), für den nach (27)

$$x_1^{-1} : x_2^{-1} : x_3^{-1} = u_1 : u_2 : u_3$$

ist. Dieser Punkt heißt der Dreieckspol der Geraden (u_1, u_2, u_3), diese die Dreieckspolare des Punktes (x_1, x_2, x_3). Dreieckspol (x_1, x_2, x_3) und Dreieckspolare (u_1, u_2, u_3) sind also aneinander geknüpft durch die Beziehung:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{u_1} : \frac{1}{u_2} : \frac{1}{u_3}. \tag{36}$$

Wie man sieht, drückt sich diese projektive Eigenschaft in einer eleganten Form aus, während die metrischen Ausdrücke ziemlich kompliziert sind. Trotzdem wollen wir noch die wichtigsten Grundformeln der Metrik angeben, weil in ihnen eine erhebliche Rechenarbeit verdichtet ist, die bei Untersuchungen über die Dreiecksgeometrie sich als nützlich erweist.

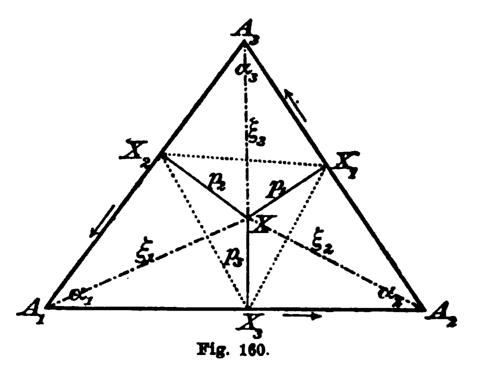


Fig. 160.

10. Die Eckenabstände eines Punktes (Fig. 160). Zur Berechnung des Abstandes $\xi_1 = \overline{XA_1}$ fällen wir aus X auf a_2 und a_3 die Lote $\overline{XX_2}$, $\overline{XX_3}$ und beachten, daß die vier Punkte A_1, X_2, X, X_3 auf einem Kreise mit dem Durchmesser ξ_1 liegen. Daher ist nach den Formeln (10), § 31 des zweiten Bandes $\overline{X_2X_3} = \xi_1 \sin\alpha_1$; andererseits ergibt aber der Kosinussatz, wenn p_1, p_2, p_3 die orientierten Abstände des Punktes X von den Seiten des Grunddreiecks sind:

$$\xi_1^2 \sin\alpha_1^2 = \overline{X_2X_3}^2 = p_2^2 + p_3^2 + 2p_2p_3\cos\alpha_1.$$

Hierin setzen wir $\sin\alpha_1 = a_1/2r$, wo r den Umkreisradius von $A_1A_2A_3$ bedeutet, multiplizieren mit $\frac{1}{4}a_2^2a_3^2$ und beachten, daß $a_ip_i/2 = X_i$ ist. Dann wird:

$$\xi_1^2 \frac{a_1^2a_2^2a_3^2}{16r^2} = a_2^2X_3^2 + a_3^2X_2^2 + 2a_2a_3X_2X_3\cos\alpha_1.$$

Nach Bd. II, § 24, (8) oder § 31, 3. ist $a_1a_2a_3/4r = \Delta$, und nach dem Kosinussatze: $2a_2a_3\cos\alpha_1 = a_2^2 + a_3^2 - a_1^2$, also:

$$\begin{aligned}
\xi_1^2\Delta^2 &= a_2^2X_3^2 + a_3^2X_2^2 + (a_2^2 + a_3^2 - a_1^2)X_2X_3 \\
&= a_2^2(X_3^2 + X_2X_3) + a_3^2(X_2^2 + X_2X_3) - a_1^2X_2X_3 \\
&= (X_2 + X_3)(a_2^2X_3 + a_3^2X_2) - a_1^2X_2X_3 \\
&= (X_1 + X_2 + X_3)(a_2^2X_3 + a_3^2X_2) \\
&\quad - (a_1^2X_2X_3 + a_2^2X_3X_1 + a_3^2X_1X_2).
\end{aligned}$$

Daher ist:

$$(37)\quad \begin{cases} \xi_1^2\Delta^2 = (X_1+X_2+X_3)(a_2^2X_3+a_3^2X_2) - \Omega_{XX}, \\ \xi_2^2\Delta^2 = (X_1+X_2+X_3)(a_3^2X_1+a_1^2X_3) - \Omega_{XX}, \\ \xi_3^2\Delta^2 = (X_1+X_2+X_3)(a_1^2X_2+a_2^2X_1) - \Omega_{XX}, \\ \text{wo } \Omega_{xx} = a_1^2x_2x_3 + a_2^2x_3x_1 + a_3^2x_1x_2. \end{cases}$$

Hieraus folgt, wenn t_1, t_2, t_3 willkürliche Veränderliche sind.

$$(38)\quad \begin{cases} \Delta^2(\xi_1^2t_1+\xi_2^2t_2+\xi_3^2t_3) = 2(X_1+X_2+X_3)\Omega_{Xt} - (t_1+t_2+t_3)\Omega_{XX} \\ \text{wo} \\ 2\Omega_{xy} = a_1^2(x_2y_3+x_3y_2) + a_2^2(x_3y_1+x_1y_3) + a_3^2(x_1y_2+x_2y_1) \end{cases}$$

gesetzt wird; für $y_i = x_i$ geht Ω_{xy} in das Ω_{xx} von (37) über.

Setzt man in (38) links $\Delta = X_1 + X_2 + X_3$, und $X_i = \omega x_i$, so hebt sich ω^2 heraus; also bleibt:

$$(39)\quad \begin{cases} x^2(\xi_1^2t_1+\xi_2^2t_2+\xi_3^2t_3) = 2x\Omega_{xt} - t\Omega_{xx}, \\ \text{wo} \quad x = x_1+x_2+x_3, \quad t = t_1+t_2+t_3, \\ \text{daher:} \quad \xi_1^2x_1+\xi_2^2x_2+\xi_3^2x_3 = \frac{\Omega_{xx}}{x}. \end{cases}$$

11. Abstand zweier Punkte X, Y. Auf diese Formeln läßt sich die Berechnung des Abstandes d der Punkte X und Y zurückführen, indem man durch A_1 eine Parallele zu XY zieht und auf ihr $\overline{A_1Z} = \overline{XY}$ abträgt (Fig. 161). Der Punkt Z hat dann, wie in der Figur sichtbar gemacht ist, die Koordinaten

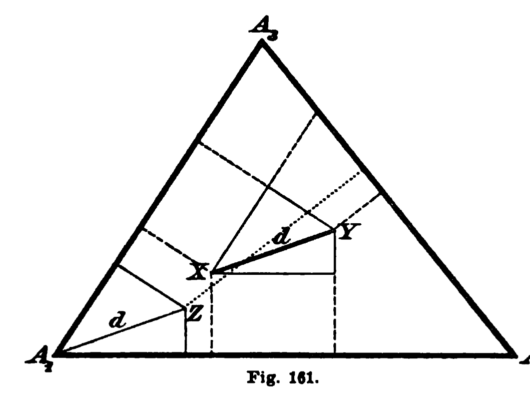


Fig. 161.

$$Z_2 = Y_2 - X_2,\ Z_3 = Y_3 - X_3,$$

also ist nach (2)

$$Z_1 = Y_1 - X_1 + \Delta.$$

Nach (37) ist daher

$$(40)\qquad d^2\Delta^2 = (Z_1+Z_2+Z_3)(a_2^2Z_3+a_3^2Z_2) - \Omega_{ZZ},$$

wo

$$\begin{aligned}(41)\quad \Omega_{ZZ} &= a_1^2(Y_2-X_2)(Y_3-X_3) + a_2^2(Y_3-X_3)(Y_1-X_1+\Delta) \\ &\qquad + a_3^2(Y_1-X_1+\Delta)(Y_2-X_2) \\ &= a_1^2(Y_2-X_2)(Y_3-X_3) + a_2^2(Y_3-X_3)(Y_1-X_1) \\ &\qquad + a_3^2(Y_1-X_1)(Y_2-X_2) \\ &\qquad + \Delta(a_2^2(Y_3-X_3) + a_3^2(Y_2-X_2)).\end{aligned}$$

Beachtet man nun, daß $Z_1 + Z_2 + Z_3 = \Delta$ ist, so folgt hieraus:

$$-d^2\Delta^2 = a_1^2(Y_2 - X_2)(Y_3 - X_3) + a_2^2(Y_3 - X_3)(Y_1 - X_1) + a_3^2(Y_1 - X_1)(Y_2 - X_2),$$

und eine leichte Rechnung ergibt:

$$d^2\Delta^2 = -\{\Omega_{YY} - 2\Omega_{YX} + \Omega_{XX}\}. \tag{42}$$

Das ist im wesentlichen die gewünschte Formel für den Abstand. Wir erweitern sie noch mit Δ^2 und setzen rechts teils

$$\Delta = X_1 + X_2 + X_3 = X, \quad \text{teils} \quad \Delta = Y_1 + Y_2 + Y_3 = Y$$

ein:

$$d^2\Delta^4 = -\{X^2\Omega_{YY} - 2XY\Omega_{XY} + Y^2\Omega_{XX}\} = d^2X^2Y^2.$$

Diese Gleichung ist in den X_i und Y_i homogen und je vom zweiten Grade. Daher:

$$(43)\quad \begin{cases} d^2 = -\dfrac{x^2\Omega_{yy} - 2xy\Omega_{xy} + y^2\Omega_{xx}}{x^2y^2}, \\ \text{wo} \\ x = x_1 + x_2 + x_3, \quad y = y_1 + y_2 + y_3. \end{cases}$$

Das ist die Formel für den Abstand d der Punkte (x_1, x_2, x_3) und (y_1, y_2, y_3).

12. Der Kreis. Zugleich ist dies die Gleichung des Kreises, wenn man (x_1, x_2, x_3) als Zentrum festhält und d als Radius nimmt. Sie läßt sich noch in eine übersichtlichere Form bringen. Sei π_i die Potenz dieses Kreises in A_i und π die Potenz in einem beliebigen Punkte Z. Dann ist:

$$(44)\quad \begin{cases} \pi_i = \xi_i^2 - d^2, \\ \pi = \overline{XZ}^2 - d^2, \end{cases}$$

also

$$\pi = \pi_i + \overline{XZ}^2 - \xi_i^2 \tag{45}$$

und

$$\pi(z_1 + z_2 + z_3) = (\pi_1 z_1 + \pi_2 z_2 + \pi_3 z_3) + (z_1 + z_2 + z_3)\overline{XZ}^2 - (\xi_1^2 z_1 + \xi_2^2 z_2 + \xi_3^2 z_3).$$

Hierin wird $\overline{XZ}^2$ nach (43) und $\xi_1^2 z_1 + \xi_2^2 z_2 + \xi_3^2 z_3$ nach (39) berechnet. Dann kommt:

$$\pi z = \pi_1 z_1 + \pi_2 z_2 + \pi_3 z_3 - \frac{x^2\Omega_{zz} - 2xz\Omega_{xz} + z^2\Omega_{xx}}{x^2 z} - \frac{2x\Omega_{xz} - z\Omega_{xx}}{x^2},$$

oder endlich:

$$\pi z^2 = (\pi_1 z_1 + \pi_2 z_2 + \pi_3 z_3)z - \Omega_{zz}.$$

Es folgt:

Der Kreis, der in A_1, A_2, A_3 die Potenzen π_1, π_2, π_3 hat, hat in einem beliebigen Punkte (z_1, z_2, z_3) die Potenz π, die sich berechnet aus

$$\pi z^2 = (\pi_1 z_1 + \pi_2 z_2 + \pi_3 z_3) z - \Omega_{zz}, \quad z = z_1 + z_2 + z_3. \tag{46}$$

Die Gleichung dieses Kreises ist also:

$$(\pi_1 z_1 + \pi_2 z_2 + \pi_3 z_3) z - \Omega_{zz} = 0, \tag{47}$$

da jeder Punkt des Kreises die Potenz Null hat.

Die Gleichung des Umkreises von $A_1 A_2 A_3$ ist

$$\Omega_{zz} = 0. \tag{48}$$

Haben (46) und (48) im Punkte (x_1, x_2, x_3) gleiche Potenz π, so ist:

$$\pi x^2 = (\pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 + \pi_3 x_3) x - \Omega_{xx} \quad \text{und} \quad \pi x^2 = -\Omega_{xx},$$

also entweder $x = 0$ oder

$$\pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 + \pi_3 x_3 = 0. \tag{49}$$

Das ist demnach der Ort gleicher Potenz für beide Kreise, d. h. die Potenzlinie von (46) und (48), indem man von der unendlich fernen Geraden $x = 0$ als Potenzlinie absieht.

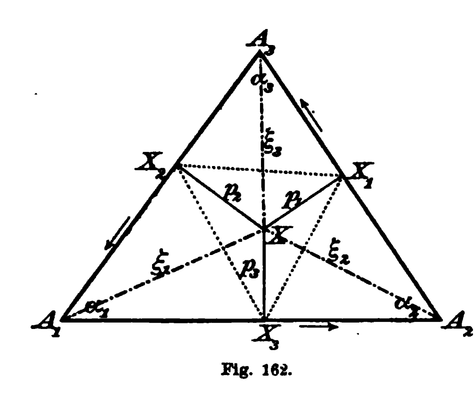


Fig. 162.

13. Der Ausdruck Ω_{XX} läßt sich anschaulich deuten (Fig. 162): Fällt man aus X auf a_1, a_2, a_3 die Lote mit den Fußpunkten X_1, X_2, X_3, so ist der Inhalt J des Dreiecks $X_1 X_2 X_3$ gleich

$$J = \tfrac{1}{2} p_1 p_2 \sin\alpha_3 + \tfrac{1}{2} p_2 p_3 \sin\alpha_1 + \tfrac{1}{2} p_3 p_1 \sin\alpha_2,$$

oder, da $a_i p_i = 2 X_i$, $a_i = 2r \sin\alpha_i$ ist, wenn r den Radius des Umkreises von $A_1 A_2 A_3$ bezeichnet:

$$J r a_1 a_2 a_3 = a_1^2 X_2 X_3 + a_2^2 X_3 X_1 + a_3^2 X_1 X_2 = \Omega_{XX}.$$

Da $a_1 a_2 a_3 = 4r\Delta$, so folgt hieraus die Formel

$$\Omega_{XX} = 4r^2 \Delta J, \tag{50}$$

die Ω_{XX} mit dem Inhalte des Dreiecks $X_1 X_2 X_3$ in Beziehung setzt.

Die Gleichung $\Omega_{zz}=0$ des Umkreises sagt demnach aus, daß für jeden Punkt X dieses Kreises der Inhalt des Dreiecks $X_1X_2X_3$ verschwindet, daß also die Punkte X_1, X_2, X_3 in gerader Linie liegen, d. h.:

Fällt man von einem Punkte des Umkreises auf die Seiten eines Dreiecks die Lote, so liegen ihre Fußpunkte in einer Geraden, der sog. Simpsonschen Geraden.

§ 30. Einige Dreiecksverwandtschaften.

1. Bezeichnet man abkürzend, wie in der Invariantentheorie

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=(u,\,x),$$

also insbesondere

$$x_1+x_2+x_3=(1,\,x),$$

so sind

$$p=\frac{(u,\,x)}{(1,\,x)}\,\frac{2\Delta}{\sqrt{\Phi_{uu}}},\quad q=\frac{(v,\,x)}{(1,\,x)}\,\frac{2\Delta}{\sqrt{\Phi_{vv}}}$$

nach § 29, (26) die Abstände des Punktes x von den Geraden u und v. Alle Punkte, deren Abstände von u und v im Verhältnisse $p:q$ stehen, genügen daher der Bedingung:

$$p:q=\frac{(u,\,x)}{(v,\,x)}\cdot\frac{\sqrt{\Phi_{vv}}}{\sqrt{\Phi_{uu}}};$$

das ist eine Gleichung von der Form

$$(u,\,x)+\lambda(v,\,x)=0,\quad \text{für}\quad \lambda=-\frac{p}{q}\cdot\frac{\sqrt{\Phi_{uu}}}{\sqrt{\Phi_{vv}}}.$$

Ebenso erfüllen die Punkte mit den Abstandsverhältnissen $-p:q$ die Gleichung:

$$(u,\,x)-\lambda(v,\,x)=0,$$

womit bewiesen ist:

Die Geraden

$$(u,\,x)=0,\quad (v,\,x)=0$$

werden stets durch die Geraden

$$(u,\,x)+\lambda(v,\,x)=0,\quad (u,\,x)-\lambda(v,\,x)=0$$

bei konstantem λ harmonisch getrennt.

2. Die Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$ mögen von den Ecktransversalen eines beliebigen Punktes z in Z_1, Z_2, Z_3,

von seiner Dreieckspolare in Z_1', Z_2', Z_3' und von einer beliebigen Geraden u in B_1, B_2, B_3 getroffen werden. Man konstruiert die drei Punkte B_1', B_2', B_3' so, daß B_i' von B_i durch Z_i und Z_i' harmonisch getrennt wird. Dann ist:

(1) Gleichung von $A_3 Z_3$: $U \equiv \frac{x_1}{z_1} - \frac{x_2}{z_2} = 0,$

und indem man auf die Geraden

$$\frac{x_1}{z_1} = 0, \quad \frac{x_2}{z_2} = 0, \quad \frac{x_1}{z_1} - \frac{x_2}{z_2} = 0$$

den vorangehenden Satz anwendet:

(2) Gleichung von $A_3 Z_3'$: $V \equiv \frac{x_1}{z_1} + \frac{x_2}{z_2} = 0.$

Daher:

(3) $$\frac{x_1}{z_1} = \frac{V+U}{2}, \quad \frac{x_2}{z_2} = \frac{V-U}{2}.$$

Weiter ist $(u, x) = 0$ die Gleichung von u und

(4) Gleichung von $A_3 B_3$: $0 = u_1 x_1 + u_2 x_2 = u_1 z_1 \frac{V+U}{2} + u_2 z_2 \frac{V-U}{2}.$

Um auf (1), (2) und (4) den Satz in 1. anzuwenden, brauchen wir in (4) nur das Vorzeichen von U (oder V) in das entgegengesetzte zu verwandeln. Also:

(5) Gleichung von $A_3 B_3'$: $0 = u_1 z_1 \frac{V-U}{2} + u_2 z_2 \frac{V+U}{2},$

oder:

$$u_1 z_1 \frac{x_2}{z_2} + u_2 z_2 \frac{x_1}{z_1} = 0,$$

$$\frac{x_1}{u_1 z_1^2} + \frac{x_2}{u_2 z_2^2} = 0.$$

Das ist aber die Ecktransversale der Geraden

(6) $$\frac{x_1}{u_1 z_1^2} + \frac{x_2}{u_2 z_2^2} + \frac{x_3}{u_3 z_3^2} = 0;$$

und es folgt:

Die drei Punkte B_1', B_2', B_3' liegen auf einer Geraden (6) mit den Koordinaten

$$v_i = \frac{1}{u_i z_i^2}.$$

Einzelfälle:

1. u die unendlich ferne Gerade, $u_1 = u_2 = u_3 = 1$; alsdann:

$$v_i = \frac{1}{z_i^2},$$

und die Mitten der Strecken $Z_1 Z_1', Z_2 Z_2', Z_3 Z_3'$ liegen auf einer Geraden (Satz von Gauß-Bodenmiller).

2. z der Schwerpunkt:

$$z_1 = z_2 = z_3 = 1; \quad v_i = \frac{1}{u_i},$$

d. h.: spiegelt man die drei Punkte, in denen die Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$ von einer Geraden u getroffen werden, je am Mittelpunkt der betreffenden Seite, so erhält man drei Punkte einer zweiten Geraden, und wenn

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \tag{7}$$

die Gleichung der einen Geraden ist, ist

$$\frac{x_1}{u_1} + \frac{x_2}{u_2} + \frac{x_3}{u_3} = 0 \tag{8}$$

die Gleichung der anderen.

3. Wiederum mögen die Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$ von den Ecktransversalen eines beliebigen Punktes z in Z_1, Z_2, Z_3, von seiner Dreieckspolare in Z_1', Z_2', Z_3' getroffen werden; wir nehmen einen zweiten Punkt y hinzu, dessen Ecktransversalen die Gegenseiten in Y_1, Y_2, Y_3 schneiden mögen und konstruieren die Punkte Y_1', Y_2', Y_3' auf den Seiten so, daß Y_i' von Y_i durch Z_i und Z_i' harmonisch getrennt wird.

Dann gelten wieder die Gleichungen (1), (2), (3), und es ist ebenso:

(9) Gleichung von A_3Y_3: $0 = \frac{x_1}{y_1} - \frac{x_2}{y_2} \equiv \frac{z_1}{y_1}\frac{V+U}{2} - \frac{z_2}{y_2}\frac{V-U}{2}$,

(10) " " A_3Y_3': $0 = \frac{z_1}{y_1}\frac{V-U}{2} - \frac{z_2}{y_2}\frac{V+U}{2}$

$$= \frac{z_1}{y_1}\frac{x_2}{z_2} - \frac{z_2}{y_2}\frac{x_1}{z_1},$$

oder:

$$\frac{x_1y_1}{z_1^2} = \frac{x_2y_2}{z_2^2}.$$

Das ist die Ecktransversale des Punktes:

$$\xi_i = \frac{z_i^2}{y_i}. \tag{11}$$

Die Geraden A_1Y_1', $A_2'Y_2'$ A_3Y_3' schneiden sich also in einem Punkte (11).

Einzelfälle:

1. Y der Schwerpunkt, $y_1 = y_2 = y_3$; $\xi_i = z_i^2$. Konstruktion der Punkte mit den Koordinaten $z_i^2, z_i^4, z_i^6, \ldots$.

2. Z der Schwerpunkt; $\xi_i = \frac{1}{y_i}$; mittels (11) sind nun die Punkte mit den Koordinaten $z_i^3, z_i^5, \ldots$ konstruierbar.
3. Z der Mittelpunkt des Inkreises, $z_i = a_i$, $\xi_i = a_i^2/y$; es gilt der Satz:

Spiegelt man die Ecktransversalen eines Punktes an den drei Winkelhalbierenden der Eckwinkel eines Dreiecks, so treffen sie sich in einem zweiten Punkte, dem Winkelgegenpunkte des ersten.

Ein entsprechender Satz gilt für den Fall, daß Z in den Mittelpunkt eines der Ankreise rückt.

4. Aus der Kegelschnittlehre wollen wir jetzt als bekannt voraussetzen, daß alle Tangenten u eines Kegelschnittes einer Gleichung zweiten Grades

$$(12)\qquad f_{uu} \equiv a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + a_{33}u_3^2 + 2a_{12}u_1u_2 + 2a_{23}u_2u_3 + 2a_{31}u_3u_1 = 0$$

genügen und daß, wenn man $a_{\nu\mu} = a_{\mu\nu}$ annimmt,

$$(13)\qquad y_i = a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + a_{i3}v_3$$

die Koordinaten des Poles y der Geraden v sind; wir schließen jedoch den Fall nicht aus, daß die quadratische Form f_{uu} in das Produkt zweier Linearformen ausartet.

Die Pole der Seiten von $A_1A_2A_3$ seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$. Als Koordinaten der Seite A_2A_3 kann man einfach $v_1 = 1$, $v_2 = v_3 = 0$ wählen; daher ist nach (13) für $\mathfrak{A}_1$:

$$(14)\qquad x_i = a_{1i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Andererseits ist

$$(15)\qquad (x_2y_3 - x_3y_2) + \lambda(v, x) = 0$$

die allgemeinste Form der Gleichung einer Geraden durch den Schnittpunkt von v und A_1y, falls diese Gerade nicht mit v identisch ist. Soll nun diese Gerade durch $\mathfrak{A}_1$ gehen, so muß nach (15) sein:

$$(a_{12}y_3 - a_{13}y_2) + \lambda(a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}v_3) = 0$$

oder nach (13)

$$a_{12}y_3 - a_{13}y_2 + \lambda y_1 = 0,$$

also

$$(16)\qquad \lambda = -\frac{a_{12}y_3 - a_{13}y_2}{y_1}.$$

Diesen Wert setzen wir in (15) ein und beseitigen den Nenner:

$$(x_2y_3 - x_3y_2)y_1 - (v, x)(a_{12}y_3 - a_{13}y_2) = 0.$$

Bezeichnet also B_i den Schnittpunkt von yA_i mit v, so ergeben sich hieraus durch Vertauschung des Indizes die Gleichungen von $B_1\mathfrak{A}_1$, $B_2\mathfrak{A}_2$ und $B_3\mathfrak{A}_3$:

$$(17)\quad \begin{cases} B_1\mathfrak{A}_1: & \varDelta_1 \equiv (x_2y_3 - x_3y_2)y_1 - (v, x)(a_{12}y_3 - a_{13}y_2) = 0, \\ B_2\mathfrak{A}_2 & \varDelta_2 \equiv (x_3y_1 - x_1y_3)y_2 - (v, x)(a_{23}y_1 - a_{21}y_3) = 0, \\ B_3\mathfrak{A}_3 & \varDelta_3 \equiv (x_1y_2 - x_2y_1)y_3 - (v, x)(a_{31}y_2 - a_{32}y_1) = 0, \end{cases}$$

und da hiernach $\varDelta_1 + \varDelta_2 + \varDelta_3$ identisch verschwindet, so gehen diese drei Geraden durch einen Punkt. Damit ist bewiesen:

Konstruiert man bezüglich des Kegelschnittes $f_{uu} = 0$ zu vier beliebigen Geraden

$$v,\ a_1,\ a_2,\ a_3$$

die Pole

$$y,\ \mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3,$$

sind A_1, A_2, A_3 die Ecken des von a_1, a_2, a_3 gebildeten Dreiecks und B_1, B_2, B_3 die Schnittpunkte der Ecktransversalen von y mit der Geraden v, so gehen die Geraden $B_1\mathfrak{A}_1$, $B_2\mathfrak{A}_2$, $B_3\mathfrak{A}_3$ durch einen Punkt.

5. Das alles bleibt noch richtig, wenn wir die quadratische Form f_{uu} mit der zerlegbaren quadratischen Form Φ_{uu} in § 29, (17) zusammenfallen lassen.[1]) Da nach § 29, (20) die Polarengleichung $\Phi_{uv} = 0$ aussagt, daß die Geraden u und v aufeinander senkrecht stehen, so hat man jetzt als „Pol" y von v den unendlich fernen Punkt der auf y senkrechten Geraden aufzufassen. Der vorangehende Satz ergibt daher:

Fällt man von den Ecken eines Dreiecks auf eine Gerade die Lote, so schneiden sich die von ihren Fußpunkten auf die zugehörigen Seiten des Dreiecks gefällten Lote in einem Punkte, dem „Lotpunkte" der Geraden.

Näheres hierüber findet man im 1. Bande der 3. Serie des Arch. d. Math. u. Phys., S. 175 ff., sowie S. 181 ff., und es sei überhaupt wegen der einschlägigen Literatur auf diese Serie des Archivs verwiesen, zumal da wir es uns versagen mössen, auf die einzelnen „ausgezeichneten" Punkte des Dreiecks einzugehen.

---

1) Die beiden Linearfaktoren von Φ_{uu} stellen, gleich Null gesetzt, die beiden unendlich fernen und imaginären Kreispunkte der Ebene dar.

6. Löst man die Gleichungen (17) nach x_1, x_2, x_3 auf, so ergibt sich eine interessante geometrische Verwandtschaft, die in ihren Sonderfällen viele Sätze der Dreiecksgeometrie umfaßt. Doch möge es mit dem Mitgeteilten hier sein Bewenden haben.

§ 31. Astatik.

1. Satz 1. Wenn zwei durch Vektoren versinnlichte Kräfte k_1 und k_2 in einer Ebene liegen und sich im gleichen Drehsinne und mit dem gleichen Drehwinkel um ihre Angriffspunkte A_1, A_2 drehen (Fig. 163), so dreht sich auch ihre Resultante im gleichen Drehsinne und mit dem gleichen Drehwinkel um einen festen Punkt ihrer Angriffslinie, den wir als astatischen Mittelpunkt der beiden Kräfte bezeichnen wollen.

Fig. 163.

Wenn sich nämlich (Fig. 163) die Angriffslinien von k_1 und k_2 in einem Punkte C, und die Angriffslinien der durch den Winkel θ gleichsinnig gedrehten Kräfte k_1, k_2 in C' treffen, so haben wir über CC' zwei gleiche Winkel:

$$\sphericalangle CA_1C' = \sphericalangle CA_2C' = \theta.$$

Daher liegen die vier Punkte A_1, A_2, C und C' auf einem Kreise $\varkappa$, der durch A_1, A_2 und C allein schon festgelegt ist. Trifft nun die Resultante r_{12} von k_1 und k_2 diesen Kreis $\varkappa$ in R_{12}, so bilden die von C' nach A_1, R_{12}, A_2 laufenden Strahlen miteinander dieselben Winkel wie die Strahlen aus C nach diesen Punkten. Folglich liegt auf $C'R_{12}$ die Resultante von k_1' und k_2', und R_{12} ist der astatische Mittelpunkt der an die Punkte A_1 und A_2 gebundenen Vektoren k_1 und k_2.

Der Kreis $\varkappa$ artet in eine Gerade aus, wenn C ins Unendliche fällt, k_1 und k_2 also parallel werden; R_{12} liegt dann auf der Geraden A_1A_2. Fällt man nämlich aus dem Punkte R_{12}, in dem A_1A_2 von der Resultante der Kräfte k_1 und k_2 getroffen wird, auf ihre Angriffslinien die Lote mit den Fußpunkten B_1 und B_2 (Fig. 164), so ist nach dem Momentensatze

$$R_{12}B_1 \cdot k_1 = R_{12}B_2 \cdot k_2,$$

$$A_1R_{12} : R_{12}A_2 = B_1R_{12} : R_{12}B_2 = k_2 : k_1.$$

Der Punkt R_{12} teilt also die Strecke $A_1 A_2$ im Verhältnis

$$A_1 R_{12} : R_{12} A_2 = k_2 : k_1,$$

das von der Richtung der parallelen Kräfte k_1, k_2 unabhängig ist; wenn also die Kräfte sich um ihre Angriffspunkte gleichsinnig um denselben Winkel θ drehen, so dreht sich ihre Resultante r_{12} im selben Sinne und mit dem nämlichen Winkel θ um R_{12}. Dies ist folglich der astatische Mittelpunkt der beiden Parallelkräfte. Diese Konstruktion des astatischen Mittelpunktes paralleler Kräfte versagt offenbar nur, wenn die beiden Kräfte ein eigentliches Gegenpaar bilden, da alsdann keine Resultante möglich ist. Dagegen sollen im folgenden stets auch Kräfte zugelassen sein, die auf derselben Angriffslinie an festen Angriffspunkten liegen, da sie durch die Drehung in Parallelkräfte übergehen; nur müssen natürlich auch die uneigentlichen Gegenpaare ausgeschlossen werden.

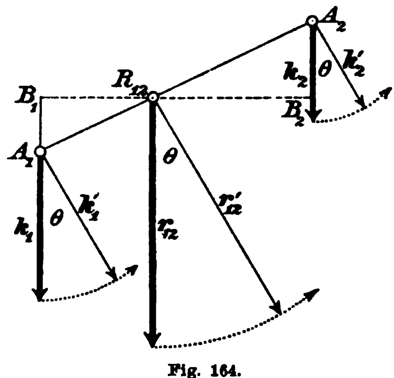


Fig. 164.

2. Damit ist Satz 1 bewiesen. Man sieht: Nach Ausschluß der Gegenpaare haben je zwei Kräfte in der Ebene, die als an bestimmte Angriffspunkte gebunden betrachtet werden, einen leicht konstruierbaren astatischen Mittelpunkt.

Wird nun zu k_1 und k_2 in derselben Ebene eine dritte Kraft k_3 an einem Angriffspunkte A_3 gefügt, und konstruiert man erst den Mittelpunkt R_{12} von k_1 und k_2, dann den Mittelpunkt R_{123} der Resultante r_{12} von k_1, k_2 und der Kraft k_3, so wird, wenn k_1, k_2, k_3 sich gleichsinnig um ihre Angriffspunkte A_1, A_2, A_3 mit demselben Winkel θ drehen, auch die Resultante r_{123} dieser drei Kräfte sich im gleichen Sinne um R_{123} drehen, und sogar unter demselben Drehwinkel θ.

Von r_{123} mit dem Angriffspunkte R_{123} und einer vierten, an A_4 geknüpften Kraft k_4 der Ebene kann nun ebenso der astatische Mittelpunkt R_{1234} konstruiert werden, um den sich dann die Resultante r_{1234} von k_1, k_2, k_3, k_4 zugleich mit diesen Kräften, und im gleichen Sinne und mit gleichem Winkel dreht; r_{1234} mit dem Angriffspunkte R_{1234} und eine fünfte Kraft k_5 an A_5 bestimmen ebenso den Mittelpunkt R_{12345} des Systems k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, und dieses Verfahren läßt sich beliebig fortsetzen.

3. Aus dieser Betrachtung folgt unter gewissen Einschränkungen für jedes ebene System 𝔖 von Kräften k_1, $k_2, \ldots, k_n$, die an feste Angriffspunkte geknüpft sind, die Existenz eines bestimmten Punktes $R_{12\ldots n}$ mit der Eigenschaft, daß, wenn die Kräfte $k_1, \ldots, k_n$ um ihre Angriffspunkte $A_1, \ldots, A_n$ sich gleichsinnig und um denselben Winkel θ drehen, auch ihre Resultante $r_{12\ldots n}$ sich gleichsinnig und um denselben Winkel θ dreht, und zwar um eben diesen Punkt $R_{12\ldots n}$, der daher als „astatischer Mittelpunkt" des Kräftesystems bezeichnet werden möge. Die erwähnten Einschränkungen bestehen darin, daß bei unserer Anordnung der Konstruktion keine Gegenpaare auftreten dürfen; wenn die Resultante $r_{12\ldots\nu}$ der ersten ν Kräfte mit $k_{\nu+1}$ ein Gegenpaar bildete, würde das Verfahren versagen; aber würde man bei anderer Anordnung der Konstruktion nicht am Ende diesen Ausnahmefall vermeiden können? Das läßt sich bei der Umständlichkeit der schrittweisen Resultantenbildung nicht so leicht beurteilen. Soviel ist jedoch sicher, daß überhaupt nur dann ein astatischer Mittelpunkt existieren kann, wenn das System 𝔖 der Kräfte $k_1, \ldots, k_n$ eine Resultante hat.

4. Eine einfache, wohl die einfachste Konstruktion des astatischen Mittelpunktes liefert uns die graphische Statik, und diese Konstruktion gestattet auch, die soeben erhobenen Einwände zu erledigen. Wenn nämlich ein astatischer Mittelpunkt existiert, dann liegt er nach der Definition dieses Begriffes auf der Resultante des Kräftesystems, und bei der Drehung des Systems muß sich die Resultante um diesen Mittelpunkt drehen. Den Mittelpunkt wird man also direkt finden, indem man von dem Kräftesystem 𝔖 die Resultante r konstruiert, desgleichen von dem gleichsinnig durch denselben Winkel gedrehten Systeme 𝔖′, und beide Resultanten r, r' zum Schnitt bringt.

Der Schnittpunkt R ist dann der gesuchte astatische Mittelpunkt,

vorausgesetzt, daß ein solcher Punkt überhaupt existiert. Es wäre also zu untersuchen, ob sich die Resultante auch bei jeder anderen Drehung des Systems um diesen Punkt R drehen wird.

5. Um das bequem entscheiden zu können, lassen wir 𝔖′ aus 𝔖 durch positive Drehung mit einem Drehwinkel von 90° hervorgehen und bezeichnen mit R den Schnittpunkt der Resultanten von 𝔖 und 𝔖′. Das System 𝔖 bestehe aus den Kräften $k_1, k_2, \ldots, k_n$ mit den Angriffspunkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$; die Kräfte von 𝔖′ werden mit

k_1', k_2', ..., k_n' bezeichnet. Sind M_ν und M_ν' die Drehmomente von k_ν und k_ν' in R (Fig. 165), so ist, da R auf der Resultante von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ liegt, nach dem Momentensatze:

$$(1) \qquad \sum_\nu^{1,n} M_\nu = 0, \quad \sum_\nu^{1,n} M_\nu' = 0.$$

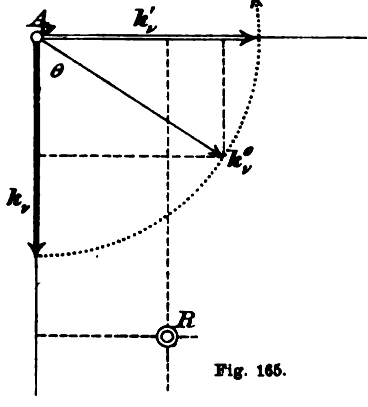


Fig. 165.

Wir drehen jetzt die Kräfte des Systems $\mathfrak{S}$ um ihre Angriffspunkte in positivem Sinne um einen Winkel θ und bezeichnen die Kräfte in dieser Lage mit $k_1^\theta, \ldots, k_n^\theta$, ihr System mit $\mathfrak{S}^\theta$, das Drehmoment von k_ν^θ in R mit M_ν^θ. Zur Berechnung von M_ν^θ zerlegt man einfach k_ν^θ in seine Komponenten $k_\nu \cos\theta$ und $k_\nu \sin\theta$ auf k_ν und k_ν', wo k_ν, k_ν' die absoluten Längen von k_ν, k_ν' bedeuten, also einander gleich sind. Das Moment M_ν^θ von k_ν^θ in R ist dann nach dem Momentensatze gleich der Summe der Momente dieser zwei Komponenten, also

$$M_\nu^\theta = M_\nu \cos\theta + M_\nu' \sin\theta$$

und

$$(2) \qquad \sum_\nu^{1,n} M_\nu^\theta = \cos\theta \sum_\nu^{1,n} M_\nu + \sin\theta \sum_\nu^{1,n} M_\nu'.$$

Nach (1) ist diese Summe gleich Null, d. h. die Resultante von $\mathfrak{S}^\theta$ geht durch R für jeden Drehwinkel θ. Damit ist bewiesen, daß ein ebenes Kräftesystem mit einer Resultante auch immer auf derselben einen astatischen Mittelpunkt R hat.

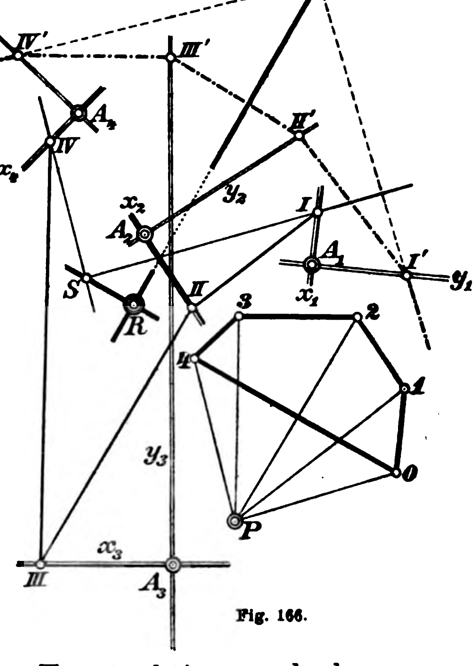


Fig. 166.

6. Dieser kann als Schnittpunkt der Resultanten von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ leicht gefunden werden. Stehen die Angriffslinien $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der Kräfte des Systems $\mathfrak{S}'$ auf den entsprechenden Angriffslinien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des Systems $\mathfrak{S}$ senkrecht, so läßt sich an dieser Konstruktion noch das zweite Krafteck sparen (Fig. 166). Man habe nämlich bereits die Kräfte von $\mathfrak{S}$ mittels eines Kraftecks $\mathfrak{K} = 01 \ldots n$ summiert, einen

Pol P angenommen und zu den Polstrahlen $0P$, $1P, \ldots, nP$ parallel die Seiten eines Seilecks I II III ... konstruiert, dessen äußere Seiten sich in einem Punkte S der Resultante von $\mathfrak{S}$ treffen. Wenn man dann das Krafteck $\mathfrak{K}$ um seinen Pol in positivem Sinne um 90° dreht, ist $\mathfrak{K}$ in dieser neuen Lage $\mathfrak{K}'$ ein Krafteck von $\mathfrak{S}'$, und wenn man P als seinen Pol beibehält, so sind die neuen Polstrahlen auf den entsprechenden von $\mathfrak{K}$ senkrecht. Daraus folgt: Die Seiten eines auf $\mathfrak{K}'$ gegründeten Seilecks von $\mathfrak{S}'$ stehen auf den entsprechenden Seiten des Seilecks von $\mathfrak{S}$ senkrecht. Zur Konstruktion eines solchen Seilecks ist also $\mathfrak{K}'$ entbehrlich. Das Seileck von $\mathfrak{S}'$ wird also nach willkürlicher Annahme seiner ersten Ecke I′ auf y_1 so angelegt, daß seine Seiten auf den entsprechenden Seiten des Seilecks von $\mathfrak{S}$ senkrecht stehen. Sollten sich dabei freilich, was nicht selten vorkommt, unzugängliche Lagen einzelner Ecken herausstellen, so wird man auf ein Krafteck mit passender gewähltem Pole zurückgreifen müssen.

7. Sind die gegebenen Kräfte Schwerkräfte, so sind sie zueinander parallel und ihr astatischer Mittelpunkt wird dann Schwerpunkt genannt. Dieser kann daher mit den Methoden der graphischen Statik leicht gefunden werden, eine weitere Vereinfachung der in Figur 166 angegebenen Konstruktion läßt sich aber dabei nicht erzielen.

Das Gleichgewicht eines ebenen Systems von Kräften, die an feste Angriffspunkte gebunden sind, wird astatisch genannt, wenn es bei gleichsinniger und gleichwinkeliger Drehung seiner Kräfte um ihre Angriffspunkte erhalten bleibt. Aus dem Systeme $\mathfrak{S}$ des vorigen Artikels erhält man ein in astatischem Gleichgewicht befindliches System, wenn man zum Systeme $\mathfrak{S}$ seine Resultante mit umgekehrtem Sinne fügt und sie an den astatischen Mittelpunkt R von $\mathfrak{S}$ bindet.

8. Astatische Koordinaten. Auf die Astatik läßt sich ein merkwürdiges Koordinatensystem gründen, das wir gern mitteilen wollen, um nochmals die Fruchtbarkeit der graphischen Statik an geometrischen Gedanken zu zeigen. In großem Maßstabe ist der Gedankenreichtum der Statik und überhaupt der Mechanik für geometrische Zwecke in dem Studyschen Werke über die Geometrie der Dynamen ausgebeutet, das viele elementare Abschnitte enthält.

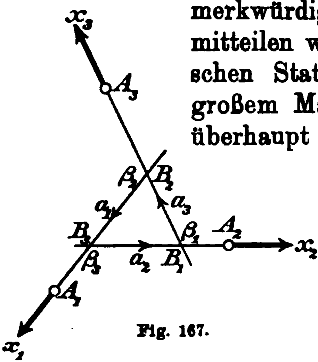


Fig. 167.

In einer Ebene legen wir durch drei feste Punkte A_1, A_2, A_3, die nicht einer Geraden angehören, drei feste Geraden a_1, a_2, a_3 (Fig. 167).

Diese bestimmen ein Dreieck $B_1B_2B_3$, das mit $A_1A_2A_3$ identisch sein kann; doch wollen wir dies nicht voraussetzen. Die Bezeichnung $B_1B_2B_3$ sei so gewählt, daß B_i nicht auf a_i liegt. Das Dreieck $B_1B_2B_3$ erhält positive Orientierung des Inhalts, wodurch also jede der Geraden a_1, a_2, a_3 einen bestimmten Sinn erhält, in dem wir auf diesen Geraden liegende Strecken positiv messen wollen, während gegensinnige negativ genommen werden.

Wir binden nun an A_1, A_2, A_3 drei Kräfte x_1, x_2, x_3 auf a_1, a_2, a_3, die nach der vorangehenden Verabredung mit Vorzeichen gemessen sind. Sie bestimmen dann einen Punkt der Ebene eindeutig, nämlich ihren astatischen Mittelpunkt X, und sollen daher als astatische Koordinaten dieses Punktes bezeichnet werden. Nach dem Verfahren der Figur 166 kann X aus x_1, x_2, x_3 leicht gefunden werden. Ersetzt man x_1, x_2, x_3 durch nx_1, nx_2, nx_3, so werden in Figur 166 die Seiten des Kraftecks sämtlich ver-n-facht. Dieses wird also durch ein ähnliches und ähnlich gelegenes ersetzt, die neue Resultante $\mathfrak{x}'$ ist das n-fache der alten $\mathfrak{x}$. Wenn aber auch der neue Kraftpol in dieser Ähnlichkeit homolog zum alten Pole P gewählt wird, so daß also die neuen Polstrahlen den homologen alten Polstrahlen parallel laufen, so kann das alte Seileck einfach beibehalten werden, die Resultante ändert also zwar die Größe, aber nicht die Lage, d. h.:

> Die Koordinaten nx_1, nx_2, nx_3 bestimmen denselben Punkt X wie die Koordinaten x_1, x_2, x_3, der Punkt X hängt also nur von den Verhältnissen $x_1 : x_2 : x_3$ ab.

9. Die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ bestimmen nicht nur einen Punkt X eindeutig, sondern sie ordnen ihm auch eine an ihn gebundene Kraft $\mathfrak{x}$ zu, deren Richtung ebenfalls eindeutig bestimmt ist, während die Größe sich ver-$n$facht, wenn man die Größen x_1, x_2, x_3 selber ver-n-facht.

Bezeichnet man die Kräfte x_1, x_2, x_3 als Vektoren mit $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$, so ist $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3$, also in der Tat $n\mathfrak{x} = n\mathfrak{x}_1 + n\mathfrak{x}_2 + n\mathfrak{x}_3$.

Während so der Weg von den Verhältnissen $x_1 : x_2 : x_3$ zu dem Punkte X vollkommen eindeutig ist, falls nicht, was wir ausschließen wollen, x_1, x_2, x_3 zugleich verschwinden, muß nun umgekehrt die Frage aufgeworfen werden, ob man auch zu einem beliebig gewählten Punkte X immer drei Kräfte x_1, x_2, x_3 auf a_1, a_2, a_3 an A_1, A_2, A_3 finden kann, deren astatischer Mittelpunkt X ist.

10. Um die Beantwortung dieser Fragen nicht ohne Not zu erschweren, wollen wir vorher erst die Forderung voll ausnutzen, daß das Gleichgewicht astatisch sein soll. Wir dürfen die Geraden a_1, a_2, a_3



also drehen, nämlich um die Angriffspunkte A_1, A_2, A_3 der auf ihnen liegenden Kräfte, aber immer nur gleichzeitig, gleichsinnig und gleichwinkelig. Diese Drehung nun läßt sich so einrichten, daß die Geraden nachher durch einen Punkt gehen (Fig. 168). Die Außenwinkel des Dreiecks $B_1 B_2 B_3$ seien nämlich $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, so daß also $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 4R$ ist. Dann faßt

der Umkreis ξ_1 von $B_1 A_2 A_3$ den Peripheriewinkel φ_1 über $A_2 A_3$,
„ „ ξ_2 „ $A_1 B_2 A_3$ „ „ φ_2 „ $A_3 A_1$,
„ „ ξ_3 „ $A_1 A_2 B_3$ „ „ φ_3 „ $A_1 A_2$.

Vom Schnittpunkte B der Kreise ξ_1 und ξ_2 aus erscheinen demnach $A_2 A_3$ und $A_3 A_1$ unter den Winkeln φ_1 und φ_2, und $A_1 A_2$ folglich unter dem Winkel $4R - \varphi_1 - \varphi_2$, der gleich φ_3 ist, d. h. der Punkt B liegt auch auf ξ_3. Also:

Die Kreise ξ_1, ξ_2, ξ_3 schneiden sich in einem Punkte B.

Das gilt auch, wenn die Geraden a_1, a_2, a_3 je durch noch einen der Punkte A_1, A_2, A_3 gehen, so daß also die Punkte B_1, B_2, B_3 bis auf die Anordnung mit den Punkten A_1, A_2, A_3 identisch sind. Die Kreise ξ_1, ξ_2, ξ_3 gehen dann in diejenigen über, die nach Bd. II, § 33 sich in dem einen oder anderen Brocardschen Punkte schneiden, mit dem dann B zusammenfällt; jedenfalls ein hübscher Zusammenhang der Brocardschen Punkte mit der Statik.

Fig. 168.

Mag nun das Dreieck $B_1 B_2 B_3$ mit $A_1 A_2 A_3$ zusammenfallen oder nicht, jedenfalls sind die Winkel BA_1B_2 und BA_2B_3 als die Peripheriewinkel von ξ_3 auf der Sehne BB_3 einander gleich, und da der Winkel BA_2B_3 als Peripheriewinkel von ξ_1 auf der Sehne BB_1 steht, zu der auch BA_3B_1 gehört, so ist

$$\sphericalangle BA_1B_2 = \sphericalangle BA_2B_3 = \sphericalangle BA_3B_1 .$$

Das ist ersichtlich die Eigenschaft, vermöge der B zum

Brocardschen Punkte wird, wenn die Punkte B_1, B_2, B_3 bis auf die Anordnung mit den Punkten A_1, A_2, A_3 zusammenfallen.

Da B_i nicht auf a_i liegen soll, so kann übrigens B_i nicht mit A_i zusammenfallen. — Bewegt sich nun B_1 auf ξ_1 nach B hin, so bewegen sich B_2 auf ξ_2 und B_3 auf ξ_3 gleichsinnig nach B hin.[1]) Folglich kann durch gleichsinnige Drehung der Strahlen a_1, a_2, a_3 um die Punkte A_1, A_2, A_3 um den gemeinschaftlichen Drehwinkel

$$\theta = \sphericalangle BA_1B_2 = \sphericalangle BA_2B_3 = \sphericalangle BA_3B_1$$

bewirkt werden, daß a_1, a_2, a_3 durch den Punkt B gehen.

Das war es, was wir zunächst erreichen wollten. Man sieht jetzt leicht, daß es einfach unendlich viel Dreiecke $B_1B_2B_3$ gibt, deren Ecken auf ξ_1, ξ_2, ξ_3 liegen und deren Seiten durch gleichsinnige, gleichwinkelige Drehung um A_1, A_2, A_3 miteinander in B zum Schnitt gebracht werden können; alle diese Dreiecke sind einander ähnlich, und zu ihrer Schar gehört $A_1A_2A_3$ nur, wenn B einer der Brocardschen Punkte von $A_1A_2A_3$ ist.

11. Wir dürfen von nun an voraussetzen, daß die Geraden a_1, a_2, a_3 durch B gehen. Die Kreise ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind dann die Umkreise von A_2BA_3, A_3BA_1, A_1BA_2. Sind nun die drei astatischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes X gegeben, so konstruieren wir nach dem in Art. 1 und 2 auseinandergesetzten Verfahren der schrittweisen Resultantenbildung zuerst die Resultante r_{12} von x_1, x_2 und binden sie an den astatischen Mittelpunkt R_{12} von x_1, x_2 (Fig. 169), der nach 1. auf dem Kreise ξ_3 liegt. Dann konstruieren wir X als den astatischen Mittelpunkt von x_3 und r_{12}, wenn diese Kräfte an A_3 und R_{12} gebunden sind.

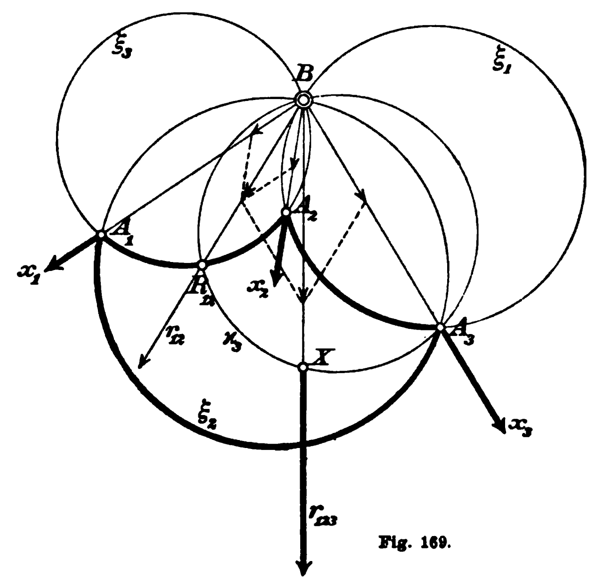


Fig. 169.

1) In Figur 168 ist eine zweite Lage $B_1'B_2'B_3'$ von $B_1B_2B_3$ eingezeichnet.

Dieser Mittelpunkt liegt nach 1. auf dem Umkreise $\varkappa_3$ von $R_{12}BA_3$ und zugleich auf der Resultante r_{123} von r_{12} und x_3. Dadurch ist X bestimmt; die Kraft r_{123}, die X zum Angriffspunkt erhält, geht mit x_1, x_2, x_3 durch B. Ist nun umgekehrt X zuerst gegeben, so können wir die durch X und B gehende Kraft r_{123} in beliebiger Größe annehmen; der gesuchte Kreis $\varkappa_3$ durch $R_{12}BA_3$ ist als Umkreis von BA_3X bestimmt. Er trifft ξ_3 in R_{12}. Jetzt zerlegen wir die Kraft r_{123}, indem wir sie mit ihrem Anfangspunkte auf BX nach B verschieben, in ihre Komponenten x_3 und r_{12} auf BA_3 und BR_{12}. Wird dann r_{123} auf BX wieder an X, x_3 auf a_3 an A_3, r_{12} auf BR_{12} an R_{12} gebunden, so ist X astatischer Mittelpunkt von r_{12} und x_3. Schließlich wird r_{12} in seine Komponenten x_1 und x_2 auf BA_1 und BA_2 zerlegt, die A_1 und A_2 als Angriffspunkte zugewiesen erhalten. Dann ist X der astatische Mittelpunkt von x_1, x_2, x_3.

12. Es fragt sich nur noch, ob es nicht ein zweites Kräftesystem z_1, z_2, z_3 an A_1, A_2, A_3 auf a_1, a_2, a_3 gibt, das ebenfalls X zum astatischen Mittelpunkte hat, ohne daß $x_1 : x_2 : x_3 = z_1 : z_2 : z_3$ wäre (vgl. den Schluß von 8.). Diese Frage liegt schon deshalb sehr nahe, weil die Zerlegung einer Kraft r_{123} in d r e i Komponenten x_1, x_2, x_3, die mit r_{123} durch denselben Punkt B gehen, eine unendlich vieldeutige Aufgabe ist. Wir dürfen voraussetzen, daß die Resultante ϱ_{123} von z_1, z_2, z_3, die ebenfalls auf BX an X gebunden ist, mit r_{123} im Sinne übereinstimmt, weil diese Übereinstimmung durch gleichsinnige Drehung der Kräfte x_1, x_2, x_3 und r_{123} um ihre Angriffspunkte A_1, A_2, A_3 und X herbeigeführt werden kann. Multipliziert man noch x_1, x_2, x_3 mit $n = \varrho_{123}/r_{123}$, wodurch das System x_1, x_2, x_3 in y_1, y_2, y_3 übergehen möge, so hat y_1, y_2, y_3 die Resultante ϱ_{123}, die mit der von z_1, z_2, z_3 auch im Sinne übereinstimmt, und X ist nach dem Schlußsatze von 8. auch der astatische Mittelpunkt von y_1, y_2, y_3. Das bleibt richtig, wenn wir die Geraden a_1, a_2, a_3 wieder in die Lage der Figur 168 zurückdrehen, wo sie ein Dreieck $B_1B_2B_3$ bildeten, und auch die Kraft ϱ_{123} mitgehen lassen. Dann hat ϱ_{123} auf den Seiten von $B_1B_2B_3$ einmal die Komponenten y_1, y_2, y_3, dann aber auch die Komponenten z_1, z_2, z_3. Da aber die Zerlegung einer Kraft nach den drei Seiten eines Dreiecks eindeutig ist, so folgt:

$$y_1 = z_1,\ y_2 = z_2,\ y_3 = z_3 \quad \text{und} \quad x_1 : x_2 : x_3 = z_1 : z_2 : z_3 .$$

Damit ist bewiesen:

J e d e r P u n k t X b e s t i m m t e i n d e u t i g d i e V e r h ä l t n i s s e $x_1 : x_2 : x_3$ s e i n e r a s t a t i s c h e n K o o r d i n a t e n, u n d d i e s e V e r h ä l t n i s s e b e s t i m m e n e i n d e u t i g d e n P u n k t X.

13. Verschwindet die Komponente x_3 eines Punktes X, so liegt er, wie der Punkt R_{12} der Figur 169, auf dem Kreise $\mathfrak{k}_3$. Es folgt:

Der Kreis $\mathfrak{k}_i$ ist der Ort der Punkte, für welche $x_i = 0$ ist $(i = 1, 2, 3)$.

In dem Koordinatensysteme des vorigen Paragraphen waren es die Seiten des Grunddreiecks $A_1A_2A_3$, denen die Gleichungen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ zukamen. Nach dieser Analogie wird das Koordinatendreieck der astatischen Koordinaten von den Kreisen $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3$ gebildet; seine Ecken sind A_1, A_2, A_3'. Entsprechen den Koordinaten x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 die Punkte X und Y mit den Kräften r und s und sind $\varkappa, \lambda$ irgend zwei reelle Zahlen, so haben einerseits die durch B gehenden Kräfte $\varkappa r$, λs mit den Angriffslinien BX, BY eine ebenfalls durch B gehende Resultante t. Bindet man diese an den Punkt Z, in welchem der Umkreis des Dreiecks XBY von t getroffen wird, so ist Z der astatische Mittelpunkt des Gesamtsystems $\varkappa r$, λs. Nun haben aber andererseits $\varkappa r$ und λs auf a_1, a_2, a_3 die Komponenten $\varkappa x_1, \varkappa x_2, \varkappa x_3$ und $\lambda y_1, \lambda y_2, \lambda y_3$. Wenn also Z die Koordinaten z_1, z_2, z_3 hat, die ja zugleich die Komponenten von t sind, so ist

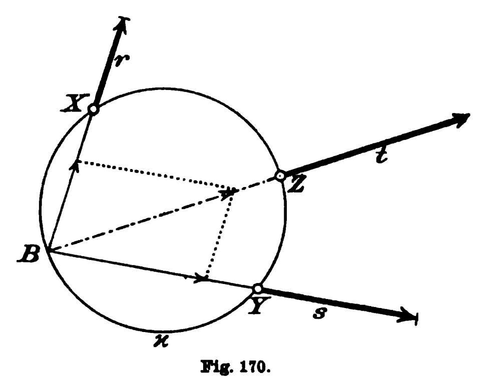


Fig. 170.

$$(3)\qquad \begin{aligned} z_1 &= \varkappa x_1 + \lambda y_1, \\ z_2 &= \varkappa x_2 + \lambda y_2, \\ z_3 &= \varkappa x_3 + \lambda y_3. \end{aligned}$$

Läßt man $\varkappa$ und λ seine Werte ändern, so wird auch t seine Größe und Richtung ändern können, und Z wird auf dem Umkreise des Dreiecks XBY wandern. Umgekehrt entspricht jedem Punkte Z dieses Kreises nach willkürlicher Annahme von t ein Wertepaar $\varkappa, \lambda$, so daß t die Resultante von $\varkappa r$ und λs ist. Es folgt:

Alle Punkte des durch B und die Punkte (x_1, x_2, x_3) und (y_1, y_2, y_3) gehenden Kreises lassen sich mittels passend gewählter Parameter $\varkappa, \lambda$ in der Form darstellen:

$$(4)\qquad z_1 = \varkappa x_1 + \lambda y_1, \quad z_2 = \varkappa x_2 + \lambda y_2, \quad z_3 = \varkappa x_3 + \lambda y_3.$$

Durch Elimination von $\varkappa$ und λ folgt hieraus die

astatische Gleichung dieses Kreises:

$$(5)\qquad z_1(x_2y_3 - x_3y_2) + z_2(x_3y_1 - x_1y_3) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1) = 0,$$

d. h. die Gleichung, der alle Punkte (z_1, z_2, z_3) dieses Kreises genügen.

14. Hier liegt demnach der interessante Fall vor, daß die linearen Gleichungen — denn die Gleichung (5) ist von der Form $c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 = 0$ — nicht gerade Linien, sondern Kreise darstellen, und zwar Kreise, die durch einen festen Punkt B gehen und daher ein parabolisches Bündel bilden (siehe Bd. II, § 8). Nur die durch B gehenden Geraden gehören zu den linear darstellbaren Kurven, was sehr schön zu der Tatsache stimmt, daß diese Geraden auch zum Kreisbündel gehören.

Setzt man die drei Größen x_1, x_2, x_3, die gleich Null gesetzt die drei Kreise ξ_1, ξ_2, ξ_3 darstellen, den analytischen Ausdrücken für die linken Seiten der Gleichungen dieser Kreise in rechtwinkeligen Koordinaten proportional, so findet man unschwer,

> daß die nicht durch B gehenden Geraden und Kreise in x_1, x_2, x_3 durch quadratische Gleichungen dargestellt werden,

und zwar unterscheiden sich die Gleichungen der Geraden nicht von denen der Kreise. Die astatischen Koordinaten sind also die natürlichen Koordinaten für das parabolische Kreisbündel in seiner Deutung als Euklidische Geometrie, wobei die Kreise des Bündels als Pseudogeraden, die Geraden und Kreise der Ebene als Pseudokreise angesprochen werden. Daß durch Inversion mit B als Inversionszentrum diese pseudoeuklidische Geometrie in die wirkliche übergeht, liegt auf der Hand.

15. Wenn der Punkt B in irgend einer Richtung ins Unendliche rückt, gehen die astatischen Koordinaten in die sogenannten baryzentrischen über, die im Jahre 1827 von Möbius eingeführt worden sind und die ersten homogenen Punktkoordinaten sind, die man kennt. Im Falle unendlich ferner Lage des Punktes B gehen alle Kreise, die in der vorangehenden Betrachtung durch B gingen, in Geraden über, und die Gleichung (5) stellt die Verbindungsgerade der Punkte (x_1, x_2, x_3) und (y_1, y_2, y_3) dar. Auf diese Ausartungsfälle der astatischen Koordinaten brauchen wir nicht weiter einzugehen, da bereits die statisch begründeten Dreieckskoordinaten als baryzentrische gedeutet werden können. Läßt man nämlich an den Ecken A_1, A_2, A_3 eines Dreiecks $A_1A_2A_3$ parallele Kräfte x_1, x_2, x_3 angreifen, so ist ihr astatischer Mittelpunkt oder Schwerpunkt identisch mit dem Punkte X, der nach der Methode des § 29 durch die Koordinaten x_1, x_2, x_3 bestimmt

wird, wie man leicht mittels des Momentensatzes nachweist. Auch darauf können wir nicht näher eingehen und wollen uns mit der Anregung begnügen, daß alle diese Betrachtungen auch auf die Kugel übertragbar sind, am einfachsten, indem man vier Punkte A_1, A_2, A_3 und B auf der Kugel annimmt, in A_1, A_2, A_3 auf BA_1, BA_2, BA_3 drei Kräfte x_1, x_2, x_3 wirken läßt und ihrer Resultante den Punkt X als Angriffspunkt zuweist, in welchem sie (außer in B) die Kugel noch einmal trifft. Ferner lassen sich diese Gedanken auf die Geometrie des elliptischen und hyperbolischen Kreisbündels und Kugelgebüsches übertragen und ergeben dort eine analytische Formulierung der Ausdeutung dieser Geometrien als Verwirklichung der nichteuklidischen Geometrie, die wir im zweiten Bande zu skizzieren versucht haben.[1]) Jedenfalls verdiente also die Statik und besonders die graphische Statik in hohem Maße die Aufmerksamkeit aller Freunde der Elementargeometrie.

16. Zum Schlusse wollen wir noch einen hübschen Zusammenhang der astatischen Koordinaten mit der logarithmischen Spirale aufdecken. Um in diesen Koordinaten einen Punkt X festzulegen, mußten wir ihm erst eine Kraft von beliebiger Größe zuordnen, deren Richtung nur in dem Normalfalle leicht anzugeben war, wo die Geraden a_1, a_2, a_3 durch B gehen. Dann mußte auch die Kraft durch B gehen. Wir verabreden jetzt, den Pfeil der Kraft stets von B nach X hin laufen zu lassen. Dann ist also jedem Punkte X der Ebene eine Kraft und eine Richtung zuerkannt, die auf BX von B nach X weist. Drehen wir jetzt die Geraden a_1, a_2, a_3 um A_1, A_2, A_3 in positivem Sinne um den Drehwinkel θ, so drehen sich auch alle jene Kräfte und Richtungen um ihre Angriffspunkte X im gleichen Sinne und mit dem gleichen Drehwinkel θ. Dann ist wiederum jedem Punkte X der Ebene eine bestimmte durch ihn gehende Richtung zugeordnet, die von der des Normalfalles um den Winkel θ bei positiver Drehung abweicht. Eine solche in jedem ihrer Punkte orientierte Ebene nennen wir nach naheliegenden Analogien ein Vektorfeld, und eine Kurve, deren Tangenten in jedem ihrer Punkte die diesem

Fig. 171.

1) Vgl. Magener, A., Anallagmatische Punktkoordinaten im Kugelgebüsche und ihre Anwendung auf die nichteukl. Geometrie, Straßburger Diss. 1906.

Punkte entsprechende Richtung haben, werde eine Richtlinie des Feldes genannt. Zu den Vektorfeldern gehören die Kraftfelder, z. B. das des Magneten; die Richtlinien heißen dann Kraftlinien.

Im Normalfalle sind die Richtlinien unseres Vektorfeldes die durch B gehenden Geraden, in dem Felde jedoch, das vom Normalfalle um den Drehwinkel θ abweicht, wie wir noch zeigen wollen, logarithmische Spiralen mit dem asymptotischen Ausgangspunkte B.

Die durch einen Punkt P_0 gehende Richtlinie des durch den Drehwinkel θ charakterisierten Feldes wird nämlich eine Kurve sein, die von P_0 ausgehend die Strahlen $r_0, r_1, r_2, \ldots$ durch den Punkt B in $P_0, P_1, P_2, \ldots$ immer unter dem Winkel θ schneidet, da die Richtung unseres Vektorfeldes in P_ν von der Richtung BP_ν des Normalfalles im positiven Drehsinne um den Winkel θ abweicht (Fig. 171). Nehmen wir zur Vereinfachung an, daß jeder der Strahlen $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n$ mit dem nächstfolgenden denselben kleinen Winkel ε bildet, so ist nach dem Sinussatze $r_1 : r_0 = \sin\theta : \sin(\theta - \varepsilon)$, und da alle Dreiecke $P_0BP_1,\ P_1BP_2, \ldots;\ P_{n-1}BP_n$ einander ähnlich sind, so ist:

$$r_n : r_{n-1} = r_{n-1} : r_{n-2} = \cdots = r_3 : r_2 = r_2 : r_1 = r_1 : r_0 = \sin\theta : \sin(\theta - \varepsilon).$$

Also, indem man jedes dieser Verhältnisse dem letzten gleich setzt und das Produkt dieser n Gleichungen bildet:

$$r_n = r_0\left(\frac{\sin\theta}{\sin(\theta - \varepsilon)}\right)^n = \frac{r_0}{(\cos\varepsilon - \operatorname{ctg}\theta\sin\varepsilon)^n} = \frac{r_0}{(\cos\varepsilon)^n(1 - \operatorname{ctg}\theta\operatorname{tg}\varepsilon)^n}.$$

Hierin setzen wir $\varepsilon = \varphi/n$ und bezeichnen den Punkt P_n, da BP_n mit BP_0 den Winkel φ bildet, mit P_φ, seinen Radiusvektor BP_φ mit r_φ. Dann ist:

$$r_\varphi = \frac{r_0}{(\cos\varphi/n)^n(1 - \operatorname{ctg}\theta\operatorname{tg}\varphi/n)^n}.$$

Jetzt lassen wir n über alle Grenzen wachsen, wodurch der Streckenzug $P_0P_1P_2 \ldots P_n$ immer mehr in eine Richtlinie übergeht. Da bereits für Winkel von einigen Sekunden die Tangente durch den Bogen ersetzt werden kann, was mit abnehmendem Winkel immer genauer wird, so konvergiert der zweite Klammerausdruck mit wachsendem n nach Bd. I, § 113, (5) gegen $e^{-\varphi\operatorname{ctg}\theta}$; der erste geht nach Bd. I, § 114, 3. (am Ende) gegen 1 (§ 126, 127 der 2. u. 3. Auflage). Daher ist:

$$r_\varphi = r_0 e^{\varphi\operatorname{ctg}\theta}.$$

Das ist die Gleichung für die gesuchte Richtlinie in Polarkoordinaten; die Kurve wird wegen der Form dieser Gleichung eine logarithmische Spirale genannt.

In ebenen Kraftfeldern werden die Kurven, die die Kraftlinien senkrecht schneiden, als Niveaulinien bezeichnet. Indem wir diese Bezeichnung auf die Vektorfelder übertragen, machen wir uns durch einen Blick auf nebenstehende Figur 172 klar, daß die Niveaulinien unseres Vektorfeldes einfach die Richtlinien des dem positiven Drehwinkel $\theta' = \theta + 90^0$ entsprechenden Vektorfeldes sind. Ihre Polargleichung ist also:

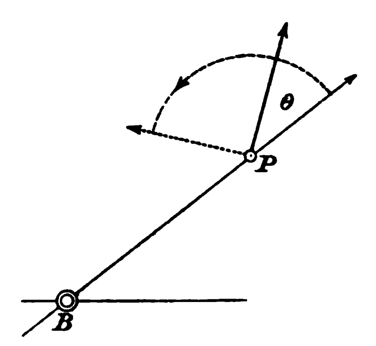


Fig. 172.

$$r_\varphi = r_0 e^{-\varphi \operatorname{tg} \theta}.$$

Es folgt:

Die Niveaulinien des vorliegenden Vektorfeldes sind im Normalfalle ($\theta = 0$) konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt B, im Falle des Drehwinkels $\theta \gtrless 0$ dagegen ebenfalls logarithmische Spiralen mit B als asymptotischem Ausgangspunkte.

Fünfter Abschnitt.

Das ebene Fachwerk.

§ 32. Begriff und Zweck des Fachwerks.

1. Zu den schönsten Anwendungen der Statik gehört die Lehre vom ebenen Fachwerk. Unter einem Fachwerk versteht man das aus Eisenbalken verschiedener Länge und Querschnittform zusammengenietete Gerippe der eisernen Brücken, Viadukte, Bahnhallendächer und anderer Tragkonstruktionen. Die Idee des eisernen Fachwerks ist aus der Holzbautechnick entnommen, wo man seit alten Zeiten die Dachstühle und Fachwände in Holzfachwerk ausführt. Diese Wände sind nicht massiv, sondern sie enthalten feste Rahmen aus Holzbalken, welche die ganze Wandfläche in eine Anzahl von Fächern zerlegen, in die leichtes Mauerwerk als Füllung kommt. Daher der Name Fachwerk.

2. Um den Zweck des eisernen Fachwerks zu verstehen, braucht man sich nur klar zu machen, wie etwa eine hohe, weitgespannte Bahnhofshalle überdacht werden müßte, wenn man sich den Gebrauch von eisernen Trägern versagen wollte. Am nächsten an Konstruktionsmöglichkeiten stände das Holzfachwerk. Aber von der Feuergefährlichkeit und der raschen Vergänglichkeit des Materials ganz abgesehen leidet das Holzfachwerk an dem schweren Mangel, daß es in den Knotenpunkten, in denen zwei oder mehr Balken aneinander stoßen, infolge der Verzapfung sehr geschwächt wird; ein vertikal stehender Balken, der nur zu tragen hat, bedarf der Verzapfung an seinen beiden Enden nur, um nicht auszuweichen. Wird aber der Balken auf Zug beansprucht, so müssen die dünnen Zapfen, mit denen der Balken an seinen beiden Enden in andere eingreift, diesen ganzen Zug aushalten, werden also leicht ausbrechen. Knotenpunkte, in denen zwei oder drei Balken aneinander stoßen, lassen sich haltbar ausbilden, bei mehr Balken geht es nicht.

Der steinerne Gewölbebau kann, wie die Meisterwerke der Gotik und der Barockzeit beweisen, zwar gewaltige Räume überspannen,

nötigt aber zu einer wuchtigen, monumentalen Ausführung der Umfassungsmauern und ist für Zweckbauten des Verkehrs schon der hohen Kosten wegen nicht anwendbar. In konstruktiver Hinsicht ist das Gewölbe dem einfachen Steinbalken gegenüber, wie ihn die alten Ägypter zur Überdeckung ihrer Tempel gebrauchten, dadurch im Vorteil, daß die Steine eines Gewölbes nur den Druck aushalten müssen, dagegen wenig auf Bruch beansprucht werden. Ein Gewölbe mit gleichmäßig verteiltem Druck trägt sogar, wenn die das Gewölbe bildenden keilförmigen Blöcke unverbunden aneinander gereiht sind; der wagerechte Steinbalken dagegen ist der Gefahr des Bruches ausgesetzt, und da vermag ein Stein am wenigsten zu widerstehen. Anderseits leidet der Gewölbebau an dem Mangel, bedeutende Schubkräfte auf die Widerlager auszuüben, denen durch eiserne Zugstangen oder, wie in der Gotik, durch Strebepfeiler und kompliziertere Stützkonstruktionen begegnet werden muß. Vom rein statisch-konstruktiven Standpunkte aus betrachtet führt vom Steinbalken der altorientalischen und griechischen Baukunst über den Gewölbebau der Babylonier, Etrusker, Römer und des Mittelalters bis zum modernen Fachwerkbau ein Weg stetigen Fortschrittes und steigender Vollkommenheit, mit Aussichten auf beinahe unbegrenzte Möglichkeiten, wie u. a. der berühmte Eiffelturm beweist. Das Fachwerk teilt mit dem Gewölbebau die Fähigkeit großer Spannweite, vermeidet aber den Fehler der großen Schubkräfte; es kann so ausgebildet werden, daß es nur den durch sein Eigengewicht bedingten Vertikaldruck auf die Unterlage überträgt und an Schubkräften nur so viel, als durch die Deformation des Fachwerks infolge Wärmeausstrahlung oder Wind- und Schneedruck verursacht wird; es beansprucht, wie das Gewölbe, das Material nicht auf Bruch oder Biegung, sondern wesentlich nur in der Längsrichtung, und das dürfte wohl der Hauptvorzug dieser Konstruktionsart sein.

3. Im großen und ganzen verhält sich ein prismatischer eiserner Balken von bestimmtem Querschnitt Q so, als wenn er aus beliebig viel dünneren prismatischen Stäben zusammengesetzt wäre, die zusammen diesen Querschnitt Q ergeben und im übrigen reibungslos aneinander lagern. Man ist daher berechtigt, einen prismatischen Balken mit einiger Annäherung als ein Konglomerat von außerordentlich dünnen Fasern oder Fäden aufzufassen. Nicht, als wäre das die wirkliche Struktur des Balkens, es gilt nur, sich ein Bild zu machen von dem mechanischen Verhalten des Balkens bei Biegung, Druck, Zug und Drillung. Wenn nun ein gerader Balken in die Form eines Kreisbogens gekrümmt wird, so erfahren die Fasern, die dem Mittelpunkte dieses Kreises am nächsten verlaufen, eine Ver-

kürzung, sie werden gestaucht, die am weitesten abliegenden werden dagegen verlängert. Man schließt daraus nach dem Stetigkeitsprinzip, daß zwischen diesen zwei Arten von Fasern eine Schicht, die sogenannte neutrale Schicht, liegen muß, die ohne Dehnung oder Verkürzung gebogen wird. Bei der Biegung wird also das Material ungleichartig beansprucht, und gegen derartige Behandlung ist es am wenigsten widerstandsfähig. Wir können einen Draht durch wiederholtes Hinundherbiegen leicht zerbrechen, den wir mit den Händen nicht zu zerreißen vermöchten. Ein dünner Eisenstab wird also als Zugstange sehr leistungsfähig sein, wenn er vor Biegung bewahrt bleibt. Auch der Druck, den eine solche Stange aushalten kann, ist verhältnismäßig groß, wenn ein seitliches Ausweichen verhindert wird. So läßt sich bekanntlich eine Stecknadel durch ein Geldstück treiben, wenn man sie in einen Korkstopfen steckt. Wenn es also dem Ingenieur gelingt, ein Fachwerk so zu konstruieren, daß seine Balken oder Stäbe, wie der Fachausdruck lautet, nur Druck oder Zug auszuhalten haben, so kann er sehr an Material und damit an Kosten sparen; er nutzt das Material am vollkommensten aus und das Gewicht des Fachwerks wird nicht unnütz groß.

4. Dieses Ziel nun läßt sich in der Idee vollkommen erreichen, wenn die Verbindung der Stäbe in den Knotenpunkten jedesmal durch einen hindurchgetriebenen Bolzen bewirkt wird, um den die Stäbe nach Lösung der übrigen Zusammenhänge sich drehen können, und wenn alle Lasten, die das Fachwerk tragen soll, auf diese Bolzen verteilt und nicht irgendwo auf die Stäbe selbst gelegt werden. Treten jetzt in einem Knotenpunkte Drehkräfte auf, die bei vollkommen fester Verbindung den einen oder anderen der Stäbe biegen würden, so können sie bei der gelenkartigen Verbindung der Stäbe, da sie am Bolzen wirken, nur diesen selber drehen, und wenn sich die Reibung vermeiden ließe, so blieben die Stäbe selbst von jeder Drehung bewahrt. In die Stäbe fallen also nur die Komponenten der Kräfte, die den Richtungen der Stabachsen entsprechen. Diese ideale Anlage ist aber offenbar praktisch nicht ganz zu verwirklichen, wird aber bei der primären, und — wenn man so sagen darf — idealen Theorie des Fachwerks der Einfachheit halber vorausgesetzt. Eine sekundäre Theorie befaßt sich dann mit den Korrektionen, die man an der idealen vornehmen muß, um den Unvollkommenheiten der Gelenkbildung, den Nebenspannungen und anderen Störungen Rechnung zu tragen. Wir werden uns auf die ideale, überwiegend geometrische Theorie beschränken, und außerdem auf das ebene Fachwerk, dessen Stäbe also angenähert in einer Ebene liegen. Die ebenen Fachwerke machen bei Eisenbahnbrücken und

den meisten Dachkonstruktionen den wesentlichen Bestandteil aus; es sind gleichsam ideale Wände oder Balken, aus denen man das überflüssige Material herausgenommen hat, so daß nur das zur Haltbarkeit Notwendige übrig geblieben ist; solche Fachwerke, die gleichsam einen Balken ersetzen, werden Fachwerkträger oder -Balken genannt.

5. Die Hauptaufgabe der geometrischen Theorie des Fachwerks ist die Lösung des Spannungsproblems. Wenn der Ingenieur ein Fachwerk entwerfen will, z. B. eine eiserne Brücke, so muß er zuerst einen Überschlag über die Lasten machen, die seine Tragkonstruktion aushalten soll. Durch die Größe und den Wechsel dieser Lasten wird die Form und Abmessung des Fachwerks nur im großen bestimmt. Es fragt sich dann, welche von den verschiedenen möglichen Konstruktionen die vorteilhafteste ist; man braucht einen Überblick über die Spannungsänderungen, die in den Stäben der Brücke vor sich gehen, wenn eine schwere Last, etwa ein Güterzug, darüber fährt. Ist die beste Form gefunden, so gilt es, die Profile der Stäbe ihren Leistungen entsprechend zu bemessen; der Querschnitt muß der zu erwartenden Maximalspannung proportional sein. Bei allen diesen Fragen kommt es also darauf an, zu ermitteln, welche Spannungen eine gegebene Belastung in einem Fachwerk von gegebener geometrischer Form hervorruft. Das ist das Spannungsproblem. Es wird in § 34 noch präzisiert werden.

6. Da die Dicke der einzelnen Stäbe selbst noch zu den Unbekannten des Problems gehört, so idealisiert die geometrische Theorie zunächst das Fachwerk noch weiter, indem sie die Stäbe durch gerade Strecken ersetzt, die man sich etwa als Schwerlinien der Stäbe denken darf. Diese Strecken, wiederum Stäbe genannt, stoßen in den Knotenpunkten aneinander, in denen sie gelenkartig aneinander befestigt sind, was also statisch darauf hinausläuft, daß sie nur in ihrer Längsrichtung angreifende Kräfte aufzunehmen vermögen. Alle angreifenden Kräfte werden dem Fachwerk ausschließlich von den Knoten aus mitgeteilt. Beim ebenen Fachwerk liegen diese Kräfte in der Ebene des Fachwerks, was wir zukünftig immer stillschweigend voraussetzen wollen. Zu den Kräften, die an einem Fachwerk wirken, gehört auch die eigene Schwere der Stäbe. In der primären Theorie wird diese außer Betracht gelassen, in der sekundären in der Weise in Ansatz gebracht, daß das Gewicht eines Stabes auf seine beiden Knotenpunkte gleichmäßig verteilt wird. Streng genommen ist das nicht ganz genau, der Stab belastet auch die anderen, doch genügt dieser Ansatz vorläufig allen Ansprüchen. Ein Stab hat also nur zwei Knotenpunkte, nämlich an seinen beiden

Enden A und B; ein Knotenpunkt in der Mitte M von AB, etwa wie im Vertikalstab eines lateinischen K, so daß der Stab an dieser Stelle nur vom Gelenkbolzen durchbohrt, aber selber nicht zerschnitten wird, ist ausgeschlossen; denn wenn der Stab dort nicht selber ein Gelenk hat, also in zwei Stäbe AM und MB zerfällt, könnte er von den in M angreifenden anderen Stäben auf Biegung beansprucht werden, was ausgeschlossen werden sollte. In der Praxis weicht man auch hiervon mitunter ab. Wohl aber kann es vorkommen, daß zwei Stäbe eines ebenen Fachwerkes sich kreuzen, ohne in der Schnittstelle durch ein Gelenk verbunden zu sein. Solche Überschneidungen kommen beim Dreiecksfachwerk, das aus lauter Dreiecken besteht, nicht vor. Auf dieses werden sich unsere ersten Beispiele beschränken, zum Schlusse aber werden wir alle zulässigen Fälle berücksichtigen. Die Knotenpunkte werden wir in der Zeichnung stets durch Nullkreise kenntlich machen, einfache Schnittpunkte erhalten diese Auszeichnung nicht.

§ 33. Die Auflagerreaktionen.

1. Ebene Fachwerke werden in der Regel paarweise verwendet; die beiden Fachwerke eines Paares werden dann durch Querstäbe miteinander zu einem starren Ganzen verbunden, jedoch so, daß dadurch keine Spannungen vom einen zum anderen Bestandteil übertragen werden. Die Belastung wird dabei auf die Knotenpunkte beider Teile so verteilt, daß die Angriffslinien in die Ebenen dieser Fachwerke fallen. Man kann daher jedes dieser Fachwerke unabhängig vom anderen betrachten, wodurch die Theorie der ebenen Fachwerke wesentlich erleichtert wird. Es gibt aber auch Fachwerke, z. B. von Kuppeldächern, bei denen eine solche Sonderung der einzelnen ebenen Bestandteile nicht möglich ist, wo also ihre Beanspruchung nur im Gesamtverband beurteilt werden kann. Das sind die „räumlichen" Fachwerke.

2. Der einzelne ebene Fachwerkträger wird nun noch im allgemeinen irgendwo gestützt sein, damit er sich nicht fortbewegen kann. Soll er, wie ein Balken, an den beiden Enden auf horizontaler Unterlage ruhend, nur vertikal wirkende Lasten tragen, so braucht er an diesen Auflagern nicht weiter befestigt zu werden. Handelt es sich aber z. B. um ein Dach, das dem Winddruck ausgesetzt ist, so muß mindestens an einer Auflagerstelle der Träger befestigt werden, damit er keine Verschiebung erleidet. Diese Befestigung wird, wie die Knotenpunkte, gelenkartig ausgeführt, um drehende Kräfte wir-

kungslos zu machen. Ehe wir aber an das Spannungsproblem herantreten können, müssen wir den ebenen Fachwerkträger aus seiner natürlichen Lage ganz herausnehmen. Es ist am anschaulichsten, wenn man sich vorstellt, daß er nach Lösung etwaiger Auflagerverbindungen auf eine Ebene ausgebreitet wird, auf der er ohne Reibung bewegt werden kann, so daß er ohne Kraftaufwand verschiebbar ist. Die Kräfte Q, die auf dem in situ befindlichen Träger wirkten, werden dann an dem frei beweglichen angebracht, an demselben Knotenpunkte, in derselben Größe und mit derselben Neigung der Angriffslinien gegen die Fachwerkstäbe wie beim montierten Träger. Wenn die Kräfte Q, als linienflüchtige Vektoren betrachtet, sich nicht zufällig aufheben, werden sie das kraftlos bewegliche ruhende Fachwerk offenbar fortschieben. Damit es in seiner Lage bleibt, müssen Gegenkräfte angebracht werden, die Gleichgewicht herstellen, aber so, daß der eintretende Spannungszustand genau dem des in seiner natürlichen Lage befindlichen Trägers entspricht. Diese Gegenkräfte müssen also die statische Wirkung der Auflager vollständig zu ersetzen suchen. Sie werden die „Auflagerreaktionen" genannt. Man erklärt sie auch vom Standpunkte des Prinzips von der Gleichheit der Aktion und Reaktion: Das Fachwerk übt auf die Auflager gewisse Drucke aus, denen die Auflager durch entgegengesetzt gleiche Drucke, die Auflagerreaktionen, begegnen. Das ist aber genau genommen nur eine Definition des Begriffes der Reaktion; man tut gut, diesem Begriffe durch die Vorstellung des auf ebener Unterlage reibungslos beweglichen Trägers, den die Lagerreaktionen gegen Fortbewegung durch die Belastung schützen, einen konkreten Inhalt zu geben. — Wie sind nun diese Gegenkräfte anzubringen?

3. Die allgemeine Vorschrift, daß die Auflagerreaktionen die Wirkungsweise der fortgenommenen Auflager ersetzen sollen, erfährt je nach der Art der Auflager verschiedene Auslegung. Am leichtesten ist die Beurteilung der Rollenlager: An einem Knotenpunkte und um ihn drehbar ist so zu sagen ein kleines Wägelchen mit zylindrischen Rändern angebracht, das, wenn das Fachwerk nicht anderweit befestigt wäre, auf seiner Unterlage hin- und herfahren könnte (Fig. 173); diese ist eben und horizontal oder geneigt.

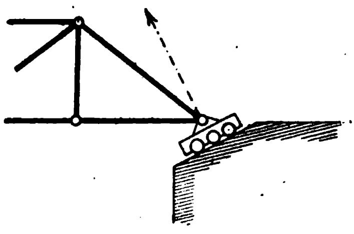


Fig. 173.

Sieht man von der Reibung ab, so kann eine solche Vorrichtung auf die Unterlage nur Drucke übertragen, die senkrecht auf die Gleitebene wirken. Also halten wir fest:

Die Auflagerreaktion eines Rollenlagers steht senkrecht auf der Gleitebene desselben und geht durch den Knotenpunkt.

4. Wird die Befestigung durch einen Stab s bewirkt, der von einem gelenkartigen Knotenpunkte in irgend einer Richtung in ein festes Widerlager dringt, sagen wir ein solides Mauerwerk (Fig. 174), so kann das Fachwerk nur in der Richtung von s auf das Widerlager wirken. Die gesuchte Ersatzkraft muß also in s der Kraft des Fachwerkes entgegenwirken.

Die Auflagerreaktion eines Befestigungsstabes hat diesen zur Angriffslinie.

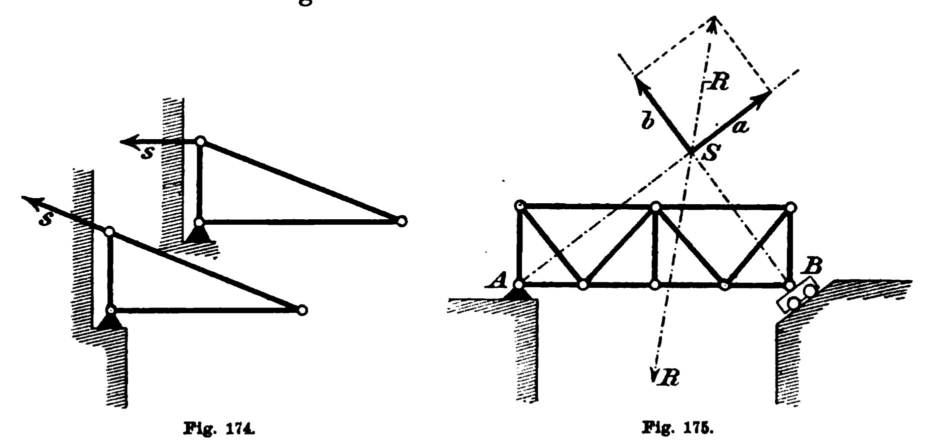


Fig. 174. Fig. 175.

5. Der Befestigungsstab dient offenbar nur dazu, einen Knotenpunkt an einem Widerlager so zu befestigen, daß man beurteilen kann, mit welcher Kraft der Stab in seiner eigenen Richtung in das Widerlager hineingepreßt, oder vielmehr, was in der Praxis wichtiger ist, mit welcher Kraft er herausgerissen wird; diese Art der Befestigung wird z. B. bei Vordächern angewandt, worauf sich auch Figur 174 bezieht. Wird hingegen ein Knotenpunkt an einem Widerlager so fixiert, daß er nach allen Seiten hin Kräfte auffangen kann, so wird er ein **Drehpunkt** genannt.

Von einem Drehpunkte läßt sich hinsichtlich der Auflagerreaktion nur sagen, daß ihre Angriffslinie durch diesen Punkt geht (Fig. 175).

6. Nach diesen Ausführungen sind die Auflagerreaktionen leicht zu bestimmen. Die technisch wichtigsten Fälle sind:

A. Befestigung durch einen Drehpunkt A und ein Rollenlager B (Fig. 175).

Das in B auf der Gleitebene des Rollenlagers errichtete Lot treffe die Resultante $\boldsymbol{R}$ der das Fachwerk angreifenden Kräfte in S. Da die Auflagerreaktionen von A und B der Kraft $\boldsymbol{R}$ das Gleichgewicht halten sollen und die eine dieser Gegenkräfte auf SB liegt, so muß SA die Angriffslinie der Auflagerreaktion von A sein. Zerlegt man daher die umgedrehte Resultante $-\boldsymbol{R}$ in ihre Komponenten $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ auf SA und SB, so sind $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$, gebunden an AS und BS, die gesuchten Reaktionskräfte.

B. Befestigung durch einen Drehpunkt A und einen Befestigungsstab BC (Fig. 176).

Die Resultante $\boldsymbol{R}$ der das Fachwerk angreifenden Kräfte treffe CB in S; dann wird $-\boldsymbol{R}$ wiederum in zwei Komponenten $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ auf SA und SB zerlegt; das sind dann die Auflagerreaktionen (Fig. 176, a, b).

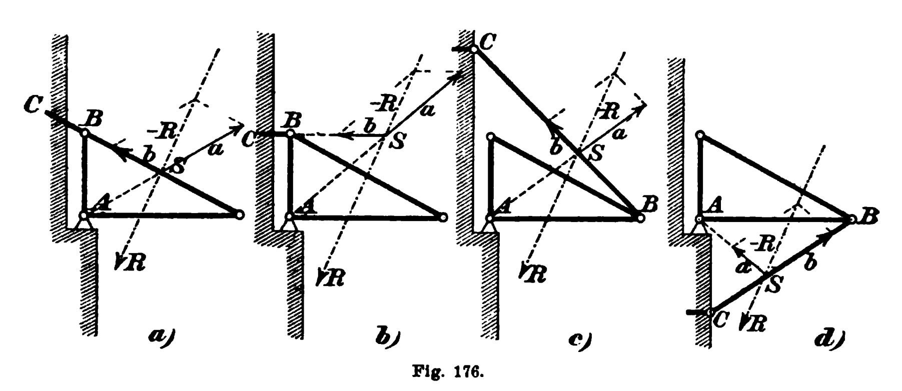


Fig. 176.

Der Befestigungsstab BC kann auch als Zugstange (Fig. 176, c) oder Druckstange (Fig. 176, d) ausgeführt werden. Die Bestimmung der Auflagerreaktionen erfolgt wie in a) und b) und ist aus den Figuren c) und d) unmittelbar ersichtlich, die mit a) und b) in der Bezeichnung übereinstimmen.

Des theoretischen Interesses halber erwähnen wir noch

C. Befestigung durch drei Zugstangen (Fig. 177).

Die drei Stangen a, b, c bilden ein Dreieck ABC, auf dessen Seiten die Auflagerreaktionen $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ wirken müssen. Diese sind also gleich den drei Komponenten der umgekehrten Resultante der Belastungskräfte nach a, b, c. Diese werden nach § 28, 7. gefunden.

7. Sind mehr als drei Auflager gegeben, so werden ihre Reaktionen unbestimmt; denn man könnte sie alle bis auf zwei oder drei willkürlich vorschreiben und die beiden noch fehlenden nach dem Vorangehenden konstruieren. Aber selbst bei zwei Auflagern kann diese sogenannte statische Unbestimmtheit ihrer Reaktionen auf-



treten, nämlich z. B., wenn zwei Drehpunkte A, B gegeben sind. Dann müssen die Angriffslinien der Auflagerreaktionen durch A und B gehen und sich in irgend einem Punkte der Resultante der Belastungskräfte treffen, was auf unendlich viel Weisen geschehen kann.

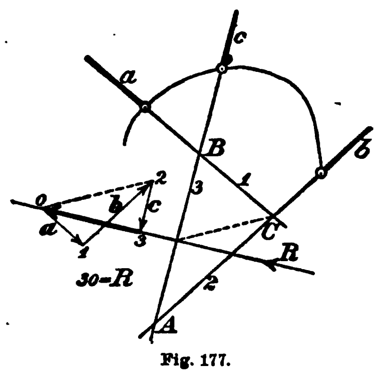


Fig. 177.

Solche statisch unbestimmte Befestigungen werden nach Möglichkeit vermieden, lassen sich aber nicht ganz ausschließen. Im Falle der statischen Unbestimmtheit ist auch dem Spannungsproblem statisch nicht beizukommen; gelöst wird es in diesem Falle mit den sehr viel schwierigeren Mitteln der Elastizitätstheorie. Wir wollen daher im folgenden immer nur statisch bestimmte Auflagerreaktionen voraussetzen. Dann können wir unmittelbar zur begrifflichen Festlegung des Spannungsproblems übergehen.

§ 34. Das Spannungsproblem.

1. Sei ein ebenes Fachwerk gegeben und in seiner Ebene ein System Q von Kräften, die an den Knotenpunkten angreifen. Wir lösen das Fachwerk aus seinen Auflagerverbindungen und ersetzen diese durch die Auflagerreaktionen. Wenn wir also nach § 33, 2. das Fachwerk mit allen diesen Kräften auf eine horizontale Ebene legen, wo es reibungslos beweglich ist, oder, was auf dasselbe hinausläuft, wenn diese Ebene mittels untergelegter gleich großer Stahlkugeln auf einer zweiten ohne Kraftaufwand verschiebbar ist, so halten die Auflagerreaktionen dem System Q das Gleichgewicht und verhindern so eine Bewegung des Fachwerks. So kommen wir dazu, das frei bewegliche Fachwerk uns unter der Einwirkung eines ebenen Systems von Kräften zu denken, die einander das Gleichgewicht halten. Ein solches System wollen wir einfach ein Angriffssystem nennen. Ein Angriffssystem besteht also 1) aus den die Belastung bildenden Kräften Q und 2) aus den Auflagerreaktionen; wir werden uns jedoch häufig das Angriffssystem willkürlich geben, da für das Spannungsproblem die Einteilung in Belastungskräfte und Reaktionen nicht in Betracht kommt. Wir heben aber noch einmal hervor, daß die Kräfte eines Angriffssystems immer im Gleichgewicht stehen und in der Ebene des Fachwerkes an den Knotenpunkten, genauer an den Gelenkbolzen derselben, angreifen sollen, so daß auf die Stäbe nur in ihrer Längsrichtung wirkende Komponenten des Angriffssystems entfallen.

2. Um nun das Spannungsproblem zu konkreter Anschauung zu bringen, nehmen wir an, daß es sich um ein leichtes Modellfachwerk und dementsprechend um geringe Angriffskräfte handele, und beseitigen irgend einen Stab AB, ohne in seinen Endpunkten A und B die Gelenkverbindung der übrigen Stäbe aufzuheben; dann wird das frei bewegliche Fachwerk entweder nach wie vor in Ruhe bleiben, oder es wird, wenn es mit jenem Stabe seiner inneren Festigkeit beraubt ist, unter Änderung seiner Gestalt in Bewegung geraten. In diesem Falle stelle ich mich in die Lücke des herausgenommenen Stabes AB und suche durch die Kraft meiner Arme die beiden Knotenpunkte A und B in der Entfernung s auseinander zu halten, die ihnen ursprünglich der Stab AB aufgenötigt hatte. Zu diesem Zwecke muß ich entweder mit beiden Armen in entgegengesetzter Richtung drücken oder ziehen, jedenfalls also ein Paar entgegengesetzt gleicher Kräfte mit der Angrifflinie AB ausüben, die wir Abwehrkräfte nennen wollen, im Gegensatz zu den von außen her auf das Fachwerk eindringenden Angriffskräften. Läßt sich ein Stab ohne Störung des Gleichgewichts herausnehmen, so daß also in seine Lücke kein Paar von Abwehrkräften zu treten braucht, so wollen wir ihm ein Paar verschwindender Abwehrkräfte zuschreiben; die Bedeutung dieses Vorkommnisses wird erst später hervortreten. So entspricht denn also jedem Stabe ein Paar von Abwehrkräften, und es gilt der

Satz 1. Alle diese Abwehrkräfte zusammengenommen halten den Angriffskräften das Gleichgewicht. Das Spannungsproblem verlangt nun, diese Abwehrkräfte zu bestimmen.

3. Diese Aufgabe läßt sich noch schärfer fassen. Zunächst wollen wir, um den anthropomorphistischen Standpunkt zu verlassen, alle Kräfte am Fachwerk durch Gewichte an Schnüren verwirklichen, die je über eine Rolle laufen und an den Knotenpunkten befestigt sind. Durch passende Aufhängung der Rollen können wir jeder dieser Kräfte die gewünschte Richtung geben. Durch dieses Verfahren können wir auch die Abwehrkräfte darstellen und zugleich meßbar machen. Mußte ich bei dem soeben besprochenen Experiment mit beiden Armen ziehen, um die Knotenpunkte A, B in der richtigen gegenseitigen Entfernung s zu halten, so müssen die Rollen und Gewichte, die dieselbe Wirkung hervorbringen sollen, in der aus Figur 178 ohne weiteres zu verstehenden Weise aufgehängt sein, und die Größe der beiden gleichen Gewichte α, β kann experimentell bestimmt werden. Die Schnüre mit den Gewichten α, β lassen die Richtung der Abwehrkräfte erkennen, die Pfeile AA', BB' in der

Verlängerung der Schnüre zeigen, in welcher Richtung mir die Knotenpunkte zu entfliehen suchen. Die Figur illustriert auch den Fall, daß ich die Abwehr durch Druckkräfte leisten mußte. Die Größe der gleichen Gewichte α, β ist das gemeinschaftliche Maß dieser Kräfte, es wird ihnen aber mit entgegengesetzten Vorzeichen zugeschrieben. Die Pfeile AA', BB' zeigen wiederum die Richtung an, in der ohne mein Eingreifen die Knotenpunkte sich bewegen würden.

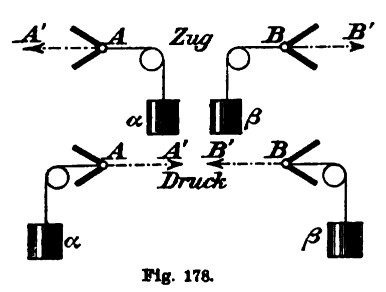


Fig. 178.

Nach Maßgabe dieser Figuren denken wir jetzt sämtliche Stäbe herausgenommen und ihre Wirkung durch Gewichte an Schnüren ersetzt. Wenn das vielleicht auch praktisch nicht durchführbar ist, so hat dieses ideale Experiment doch den Wert, eine möglichst klare Anschauung von der statischen Auffassung des Spannungsproblems zu geben, die in ihrer vollen Reinheit, und wenn man will, Einseitigkeit, von elastischen Kräften und Deformationen der eisernen Fachwerkstäbe nichts weiß. Nach Beseitigung aller Stäbe nun müssen alle Paare von Abwehrkräften zusammengenommen den Angriffskräften das Gleichgewicht halten; wenn man also die Knotenpuukte bis zur Anhängung sämtlicher Schnüre festgehalten hat — die Stäbe sind ja herausgenommen — und sie nach vollendeter Aufhängung losläßt, ohne ihnen einen Stoß zu erteilen, so muß das ganze System in Ruhe bleiben.

4. Die hier beschriebene Vorrichtung, die man treffend ein Fadenmodell des Fachwerks nennen könnte, ist in einfachen Fällen an einer Wandtafel leicht ausführbar, wozu man die zur Demonstration des Parallelogrammgesetzes dienenden Fäden, Rollen und Gewichte benutzen kann; die Knotenpunkte werden durch kleine Ringe dargestellt, an welche die Schnüre geknüpft werden; diese Ringe muß man, bis sämtliche Gewichte angehängt sind, mit Nägeln festhalten und dann freigeben.

Faßt man nun einen einzelnen Knotenpunkt A dieses Fadenmodells ins Auge, so bemerkt man sofort, daß die in ihm wirksamen Kräfte, nämlich die etwa vorhandene Angriffskraft und die Abwehrkräfte, für sich im Gleichgewicht sind; denn hätten diese Kräfte eine (nicht verschwindende) Resultante, so müßte der Knotenpunkt in der Richtung derselben fortgeschoben werden. So folgt der wichtige

Satz 2. Das Gleichgewicht der Angriffskräfte und der Abwehrkräfte kommt in der Weise zu stande, daß in jedem Knotenpunkte für sich Gleichgewicht herrscht.

Einer Unklarheit soll noch vorgebeugt werden, die daraus entspringen könnte, daß wir schon von den Angriffskräften vorausgesetzt hatten, sie ständen für sich im Gleichgewicht. Hier bedeutet das Wort Gleichgewicht, wie immer, wenn man keinen näheren Zusatz macht, die Tatsache, daß diese Kräfte in der starren Ebene, als linienflüchtige Vektoren behandelt, sich aufheben würden. Am Fachwerk dagegen sind diese Kräfte keine linienflüchtigen Vektoren mehr, sie sind an die Knotenpunkte geknüpft und dürfen auf ihren Angriffslinien nicht verschoben werden. Daß die so an feste Punkte gebundenen Angriffskräfte gleichwohl im Gleichgewicht stehen, nämlich vermittels des Fachwerks, wird eben durch die Lösung des Spannungsproblems in Evidenz gesetzt; denn nach der Lösung dieses Problems wird einerseits sichtbar, daß in jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herrscht, andererseits ordnen sich die Abwehrkräfte zu Paaren entgegengesetzt gleicher Kräfte, die durch die festen Stäbe des Fachwerks zerstört werden, weil sie auf diesen sich wie linienflüchtige Vektoren verhalten.

5. Am Fadenmodell lösen die Abwehrkräfte in vollkommener Weise die Aufgabe, die Knotenpunkte trotz ihrer Beweglichkeit und trotz der Angriffskräfte in der gegenseitigen Entfernung festzuhalten, die sie ursprünglich im Fachwerk hatten. Am Fachwerk selbst fällt diese Aufgabe den Stäben zu. Diese lösen sie aber nur angenähert, denn das Eisen gibt infolge seiner Elastizität den Kräften immer ein wenig nach. Wenn das Fadenmodell für einen Stab AB Zug anzeigt (Fig. 178), so wird der Stab ein wenig verlängert, und die Pfeile AA', BB' der Figur können als Kennzeichen dieses Zustandes aufgefaßt werden. Man sagt dann, der Stab sei auf Zug beansprucht, und als Maß dieses Zuges dient die Kraft α oder die ihr gleiche Kraft β der Figur. Während bei der anthropomorphistischen Auffassung des Kraftbegriffes, von der wir in 3. ausgingen, unsere Arme den Zug ausüben mußten, um den Abstand der Knoten A, B festzuhalten, erfährt der wieder eingefügte Stab einen Zug in entgegengesetzten Richtungen, den auch wir natürlich empfinden würden, wenn wir nicht den Gegenzug leisteten, sondern uns passiv verhielten.

Weist hingegen das Fadenmodell für den Stab AB auf Druck, der also, wenn wir uns wieder selber in die Lücke schalteten ohne Widerstand zu leisten, unsere Arme zusammenpressen würde, so erfährt der Stab im Fachwerk eine kleine Stauchung, er wird auf Druck beansprucht, und die Pfeile AA', BB' der Figur 178 zeigen diesen Zustand an.

Der Druck oder Zug, den der Stab erleidet, ist also entgegen-

gesetzt dem Druck oder Zug, den er ausüben müßte, um jede Längenänderung zu vermeiden.

Wir werden im folgenden der Eindeutigkeit halber die Wörter Druck und Zug nicht auf die Abwehrkräfte beziehen, sondern, passiv aufgefaßt, auf die Kräfte, unter deren Einfluß der elastische Stab deformiert wird.

Das den Zug bewirkende Kräftepaar hat in Figur 178 die Sinne AA' und BB'; der Größe nach stimmen diese Kräfte aber mit den Abwehrkräften α, β bis aufs Vorzeichen überein.

Druck- und Zugkraft werden zusammengefaßt unter dem Namen Stabkraft.

Die Stabkräfte bilden also in jedem Stabe ein Gegenpaar.

Da die Stabkräfte aus den Abwehrkräften durch Umkehrung der Pfeile hervorgehen, die Abwehrkräfte aber die Angriffskräfte im Schach halten, so folgt:

Satz 3. Die Stabkräfte halten den umgekehrten Angriffskräften das Gleichgewicht.

6. Jetzt läßt sich das Spannungsproblem auch so aussprechen:

Man soll an den Knotenpunkten in den Stäben solche Kräfte anbringen, daß

1. in jedem Stabe zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte wirken und
2. diese „Stabkräfte" den umgekehrten Angriffskräften das Gleichgewicht halten.

Mit anderen Worten: Die Stabkräfte sind die Komponenten der Angriffskräfte in den einzelnen Stäben. Doch ist es zur Vermeidung von Vorzeichenfehlern, die bei Anfängern häufig vorkommen, sicherer, wenn man sich die Kräfte an jedem Knotenpunkte im Gleichgewicht denkt: Also gehören zusammen entweder die Angriffskräfte und die Abwehrkräfte, oder die umgekehrten Angriffskräfte und die Stabkräfte. Beide Auffassungen sind in der Technik vertreten; wir werden uns an die letzte halten. Sachlich sind beide Auffassungen kaum verschieden, praktisch entsprechen ihnen aber Unterschiede in der Anlage der Figur.

Wir werden nun zunächst eine Reihe von Beispielen bringen, in denen das Spannungsproblem mit den einfachsten Mitteln lösbar ist, dann aber die Fälle eingehender untersuchen, in denen die Lösung aus inneren Gründen unmöglich ist. Nach diesen Vorbereitungen wird dann das Problem im umfassendsten, statisch lösbaren Falle erledigt.

§ 35. Das Krafteckverfahren.

1. Der in Figur 179 abgebildete symmetrische Fachwerkträger sei in den Knoten 2, 4, 6 drei vertikal abwärts wirkenden Kräften P_2, P_4, P_6 von gleicher Größe P ausgesetzt, die aus Figur 180 zu ersehen ist; in 1 sei ein Drehpunkt, in 7 ein Rollenlager auf wagerechter Gleitfläche. Die Auflagerreaktion P_7 in 7 ist daher ebenfalls vertikal, und da sie zusammen mit der in 1 den drei Kräften P_2, P_4, P_6 das Gleichgewicht halten soll, so ist auch die Auflagerreaktion P_1 in 1 vertikal. Wegen der Gleichheit der Strecken 12, 24, 46, 67 fällt die Angriffslinie der Resultante $3P$ von P_2, P_4, P_6 zusammen mit der von P_4, und die Auflagerreaktionen sind je gleich $-\frac{3}{2}P$. Wie in diesem Beispiele, so kann man häufig bei parallelen Kräften die Auflagerreaktionen durch einfache Rechnung finden.

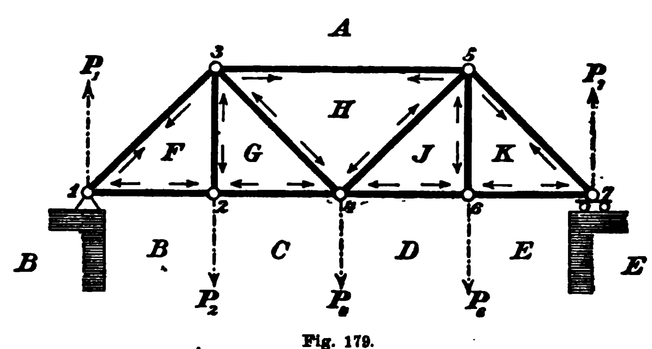


Fig. 179.

2. Das Spannungsproblem verlangt, die Angriffskräfte P_1, P_2, P_4, P_6, P_7 so in Komponenten längs der Stäbe zu zerlegen, daß in jeden Stab zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte kommen, die an seine beiden Endpunkte geknüpft sind (§ 34).

Wollte man diese Zerlegung etwa am Knoten 3 beginnen, wo die Angriffskraft Null ist, so hätte man diese nach den vier Richtungen 31, 32, 34, 35 zu zerlegen; diese Aufgabe hat aber eine unendlich vieldeutige Lösung. Denn man könnte in 31 und 32 an 3 ganz beliebige Kräfte annehmen und ihre umgekehrte Resultante nach 34 und 35 zerlegen; diese vier Kräfte hätten dann, wie verlangt wird, die Resultante Null. In 3 können wir also nicht anfangen, auch in 5 und in 2, 4, 6 nicht. Eindeutig kann eine Kraft an einem Punkte nur nach zwei durch diesen Punkt gehenden Komponenten zerlegt werden. Wir können also nur in 1 oder 7 anfangen und entscheiden uns für 1.

Wenn also ein Fachwerk keinen Zweistabknoten hat, so ist das Spannungsproblem nicht unmittelbar durch Zerlegung der Angriffskräfte graphisch lösbar.

3. In 1 beginnend zerlegen wir die Auflagerreaktion $P_1 = -\frac{3}{2}P$ nach den Richtungen 12 und 13. Um nicht die Figur des Fachwerks durch Hilfslinien zu verwirren, geschieht die Zerlegung in einer Hilfsfigur (Fig. 180), in der wir $B_1A_1 = -\frac{3}{2}P$, also in vertikal aufwärts gehendem Sinne auftragen und durch B_1 die Parallele zu 12, durch A_1 die Parallele zu 13 ziehen. Ist F_1 der Schnittpunkt der Parallelen, so ist B_1A_1 die Resultante von B_1F_1 und F_1A_1, also B_1F_1 die Stabkraft auf 12 und F_1A_1 die Stabkraft auf 13 im Knotenpunkte 1 nach Größe und Richtung. Daß die umgekehrte Angriffskraft des Knotenpunktes 1 mit den Stabkräften an 1 im Gleichgewichte steht, ist unmittelbar am Krafteck (1) dieser drei Kräfte in Figur 180 ersichtlich: Die umgekehrte Angriffskraft ist A_1B_1, und wenn man das Krafteck $A_1B_1F_1$ im Sinne von A_1B_1 durchläuft, so

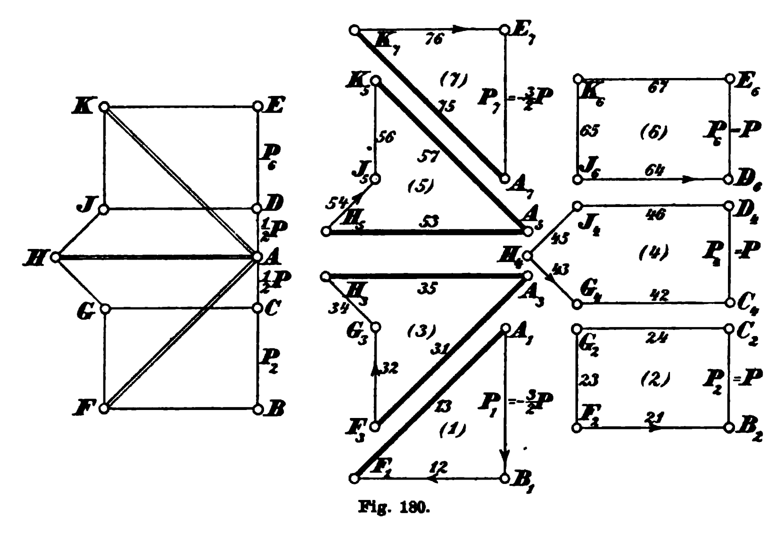


Fig. 180.

durchläuft man die Stabkräfte in ihrem richtigen Sinne, und das Polygon schließt sich. Dem Knotenpunkte 1 entspricht demnach ein Krafteck $(1) = A_1B_1F_1$, und es gilt die Regel:

> Durchläuft man das Krafteck (1) im Sinne der **umgekehrten** Angriffskraft, so durchläuft man die übrigen Kräfte desselben in ihrem Sinne.

Auf dem Stabe 12 weist dieser Sinn von 2 nach 1, auf 13 von 1 nach 3. In 12 herrscht also Zug, in 13 Druck, was wir im Fachwerk Figur 179 durch Pfeile bei 1 andeuten.

> Im Krafteck oder am Fachwerk pflegt man Druckkräfte kräftiger oder doppelt auszuziehen,

wie in Figur 180, (1) geschehen ist.

4. Das Spannungsproblem verlangt, daß auf 13 die an 1 ermittelte Kraft F_1A_1 mit entgegengesetztem Sinne an 3 wirke, und ebenso ist auf 12 in 2 die Gegenkraft der in 1 auf 12 wirkenden Kraft anzubringen. Infolgedessen sind von den Stabkräften am Knoten 3 noch drei, am Knoten 2 dagegen nur die zwei Kräfte auf 23 und 24 unbekannt. Diese können daher bestimmt werden. Auch an 2 müssen nämlich die Stabkräfte der umgekehrten Angriffskraft das Gleichgewicht halten; das Krafteck (2), das diese vier Kräfte summiert, muß sich daher schließen. Von diesem Krafteck zeichnen wir zuerst die Seite $F_2B_2 = F_1B_1 = -B_1F_1$, entsprechend der in 12 an 2 wirkenden Kraft $-B_1F_1$, setzen $B_2C_2 = -P_2$ daran, also nach oben, und legen durch C_2 die Parallele zu 24, durch F_2 die Parallele zu 23.

> Durchläuft man das so entstandene Krafteck $(2) = F_2B_2C_2G_2$ im Sinne der umgekehrten Angriffskraft, so werden wiederum die übrigen Seiten in ihrem Sinne durchlaufen,

und es wirken daher in 2 auf 21, 24, 23 die Zugkräfte F_2B_2, C_2G_2, G_2F_2, was auch in Figur 180, (2) durch die Beischriften an den Seiten von (2) angedeutet ist.

> Betrachtet man am Fachwerk die vier Kräfte des Knotens 2 in der zyklischen Folge, die sich bei positiver Umkreisung des Punktes 2 (d. h. gegen den Drehsinn des Uhrzeigers) ergibt, so folgen diese Kräfte im Krafteck (2) aufeinander in dem Durchlaufungssinne, der durch die umgekehrte Angriffskraft festgelegt wird und der den Stabkräften entspricht.

5. Trägt man die Pfeile der nun bekannten Stabkräfte im Fachwerk selber ein (Fig. 179)[1]), sowie in den Endpunkten der betreffenden Stäbe die entgegengesetzten Pfeile, so zeigt sich, daß jetzt der Knotenpunkt 3 aufgeschlossen, d. h. der Lösung zugänglich ist, da in ihm nur noch zwei Stabkräfte unbekannt sind. Dagegen hat 4 noch drei Unbekannten. Dem Knoten 3 ordnen wir ein Krafteck $(3) = A_3F_3G_3H_3$ zu (Fig. 180) mit $A_3F_3 = A_1F_1$, $F_3G_3 = -G_2F_2 = F_2G_2$, $G_3H_3 \parallel 34$, $H_3A_3 \parallel 35$, wodurch H_3 bestimmt ist. Demnach wirken in 3 auf 32 und 34 die Zugkräfte F_3G_3, G_3H_3, auf 35 die Druckkraft H_3A_3, die in (3) kräftig ausgezogen ist. Wiederum sehen wir:

1) Dem Leser wird empfohlen, das Fachwerk neu zu zeichnen und die Pfeile der ermittelten Stabkräfte jedesmal einzutragen, weil so deutlicher hervortritt, zu welchem Knoten die Konstruktion alsdann übergehen muß.

Betrachtet man die Kräfte des Knotens 3 im Krafteck (3) in der zyklischen Folge, in der wir sie bei positiver Umkreisung des Knotens 3 antreffen, so wird das Krafteck (3) erstens in stetiger Folge durchlaufen, also ohne eine Seite zu überspringen, und zweitens im **richtigen** Sinne der Stabkräfte.

Ebenso war es in (1) und (2), nur daß dabei die Angriffskräfte im Gegensinne durchlaufen wurden, während in (3) die Angriffskraft fehlt. Diese Zuordnung des positiven Drehsinnes um den Knoten und des hinsichtlich der Stabkräfte richtigen Durchlaufungssinnes seines Kraftecks erleichtert das Verständnis der ganzen Konstruktion so sehr, daß wir sie auch für die anderen Knotenpunkte herbeiführen wollen.

Dazu ist nur nötig, bei der Anlage des Kraftecks immer die Kräfte in dem zyklischen Sinne aneinanderzureihen, in dem man sie bei positiver Umkreisung des Knotens antreffen würde.

6. Wenden wir uns also dem nunmehr aufgeschlossenen Knoten 4 zu, so werden wir zunächst die bekannten Kräfte in der Reihenfolge 43, 42, P_4 aneinandersetzen, die einer positiven Umkreisung von 4 entspricht. So erhalten wir das Krafteck (4) in völlig eindeutiger Weise: $H_4G_4 = H_3G_3$, $G_4C_4 = G_2C_2$, $C_4D_4 = -P_4$ (also aufwärts), $D_4J_4 \| 46$, $J_4H_4 \| 45$, wodurch J_4 bestimmt ist.

Da das Fachwerk symmetrisch gestaltet und symmetrisch bebelastet ist, müssen auch die Stabkräfte symmetrisch verteilt sein. Doch wollen wir davon keinen Gebrauch machen, sondern auch die Kraftecke (5), (6), (7) konstruieren. Bei positiver Umkreisung von 5 trifft man die Stäbe mit bekannter Stabkraft in der Reihenfolge 53, 54, darauf die anderen in der Folge 56, 57. In dieser Anordnung bilden wir auch das Krafteck (Figur 180, (5)): $A_5H_5 = A_3H_3$, $H_5J_5 = H_4J_4$, $J_5K_5 \| 56$, $K_5A_5 \| 57$. Ebenso entsteht (6): $K_6J_6 = K_5J_5$, $J_6D_6 = J_4D_4$, $D_6E_6 = -P_6$ (also aufwärts), $E_6K_6 \| 67$, was von selbst erfüllt ist; schließlich (7): $A_7K_7 = A_5K_5$, $K_7E_7 = K_6E_6$, $E_7A_7 = -P_7$, was natürlich nur eine Kontrolle der vorangehenden Konstruktionen bedeutet; zur Lösung des Spannungsproblems, die im wesentlichen schon mit (4) beendet war, ist (7) nicht erforderlich. Wie man sieht, werden die Stäbe 13, 35, 57 des oberen Fachwerkrandes auf Druck, alle anderen auf Zug beansprucht.

Zum Verständnis der Kraftecke (1) bis (7) sei noch bemerkt, daß an jedem der Umlaufsinn markiert ist, der den Stabkräften und also einer positiven Umkreisung des betreffenden Knotens entspricht; die Namen der Stäbe sind eingetragen; Kräfte verschiedener Kraft-

ecke, wie $H_5 A_5$ und $H_8 A_8$, die in den Buchstaben übereinstimmen und sich nur in den Indizes unterscheiden, sind einander gleich.[1])

7. Da wir im nächsten Paragraphen ein Verfahren der Stabkraftbestimmung entwickeln werden, das aus einer Verschmelzung der den einzelnen Knoten entsprechenden Kraftecke besteht, so mag dieses eine Beispiel zur Erläuterung des Krafteckverfahrens genügen. Halten wir für die Anlage der Kraftecke nur fest, daß die bekannten Kräfte des Kraftecks immer in der Reihenfolge aneinandergesetzt werden, in der man sie bei positiver Umkreisung des Knotens antrifft, und daß auch zum Schluß die neuen Stabkräfte in dieser Reihenfolge aufgesucht werden. Diese Bindung an feste Ordnung ist an sich nicht nötig, gibt aber der Lösung einen bestimmten Gang und schützt vor Irrtümern in der Richtung.

Der Umlaufsinn eines Kraftecks ($\varkappa$), der einer positiven Umkreisung des zugehörigen Knotens $\varkappa$ entspricht, möge „der" Umlaufsinn dieses Kraftecks heißen. Der Umlaufsinn des Kraftecks ist immer dem der etwa vorhandenen Angriffskraft von $\varkappa$ entgegengesetzt.

8. Schließlich seien noch folgende Einzelheiten hervorgehoben:

a) Ein symmetrisches Fachwerk mit symmetrischer Belastung und symmetrischen Auflagerreaktionen zeigt auch symmetrische Verteilung der Stabkräfte.

b) Wenn zwei Stäbe eines Knotenpunktes $\varkappa$ auf einer Geraden liegen, so entsprechen ihm im Krafteck ($\varkappa$) zwei Parallelen.

c) An einem Zweistabknoten ohne Angriffskraft gibt es auch keine Stabkräfte.

d) Wenn zwei Stäbe S_1, S_2 eines Vierstabknotens $\varkappa$ auf einer Geraden u, die beiden anderen S_3, S_4 auf einer Geraden v liegen (Fig. 181), so sind, wenn keine Angriffskraft am Knoten wirkt, an $\varkappa$ die Kräfte auf S_1 und S_2 entgegengesetzt gleich, ebenso die Kräfte auf S_3 und S_4. Denn die Resultante von S_1 und S_3 muß der von S_2 und S_4 entgegengesetzt gleich sein. Aus Figur 181 folgt:

Fig. 181.

1) Der linke Teil der Fig. 180 wird im nächsten Paragraphen besprochen.

e) Wenn von den drei Stäben S, S_1, S_2 eines Dreistabknotens $\varkappa$ zwei auf einer Geraden liegen, S_1 und S_2, während der dritte S, sowie die Angriffskraft $P_\varkappa$, die auch gleich Null sein kann, auf einer zweiten Geraden liegen, so ist an $\varkappa$ die Stabkraft auf S gleich der Angriffskraft, und die Stabkräfte auf S_1, S_2 sind einander entgegengesetzt gleich, also zugleich Zugkräfte oder Druckkräfte.

§ 36. Das Kräfteplanverfahren.

1. Es liegt sehr nahe, zur Ersparung von unnötigen Hilfslinien, die sieben Kraftecke des § 35, Figur 180 zu einer einzigen Figur zu vereinigen. Das ist in dem linken Vieleck der Figur 180 geschehen; man wird dort alle sieben Kraftecke wiederfinden. Die so erzielte Vereinfachung springt dermaßen in die Augen, daß wir uns eingehender damit beschäftigen müssen. Wir setzen die Abbildung des Fachwerks und die vereinfachte Kräftefigur noch einmal hierher (Fig. 182 und Fig. 183). Die Ecken der vereinfachten Kräftefigur oder des „Kräfteplans“, wie der Fachausdruck dafür lautet, sind mit denselben Buchstaben bezeichnet wie in den sieben Kraftecken, nur sind die Indizes weggelassen. Die Druckkräfte sind doppelt ausgezogen.

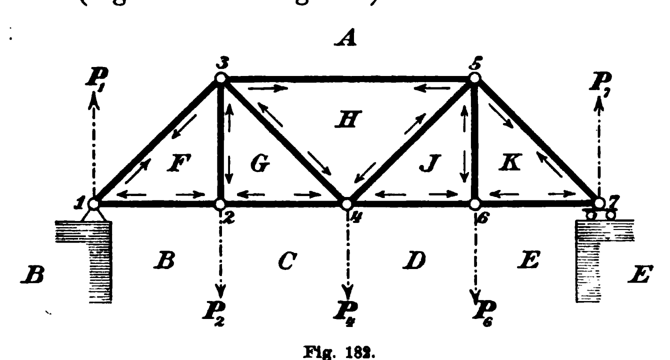


Fig. 182.

2. Die Bezeichnung des Kräfteplans hängt in höchst eigentümlicher Weise mit der Figur des Fachwerks selber zusammen (Fig. 182). Wir denken uns die Halbstrahlen, auf denen die Angriffskräfte P_1, P_2, P_4, P_6, P_7 liegen, im Sinne ihrer Pfeile bis ins Unendliche ausgezogen. Dann teilen sie, zusammen mit den Dreiecken des Fachwerks, die Ebene in zehn Felder, die wir mit den Buchstaben $A, B, \ldots, J, K$ bezeichnet haben; die Auflager denke man sich beseitigt. Das Feld A ist von 1357 und den Halbstrahlen P_1, P_7 begrenzt, das Feld B von P_1, 12 und P_2; ebenso E von P_7, 76 und P_6. Die Felder A und B haben den Grenzstrahl P_1 gemein, und sonst keine Linie am Fachwerk; B und F haben nur den Stab 12 gemein, C und D nur den Halbstrahl, auf dem P_4 liegt, K und A grenzen in 57 aneinander

und sonst in keinem Stabe und in keiner Angriffslinie; dagegen haben F und H gar keine Grenzlinie gemeinsam.

Zusammenfassend können wir sagen: Zwei Felder der Figur 182 haben immer höchstens eine Grenzgerade gemein, und diese ist entweder ein Stab, oder die Angriffslinie einer Kraft; diesen Stab oder diese Kraft wollen wir nun benennen durch Angabe jener zwei Felder. Der Stab 35 heißt demnach AH oder HA, der Stab 45 heißt HJ; ebenso ist AB die Kraft P_1, BC die Kraft P_2, EA die Kraft P_7. Bei positiver Umkreisung des Knotens 3, anfangend von 31, durchläuft man daher die Stäbe AF, FG, GH, HA, wobei die Buchstaben in der Reihenfolge angegeben sind, in der man die betreffenden Felder betritt. Suchen wir nun zu den genannten Stäben in § 35, Figur 180, (3) die in ihnen herrschenden Stabkräfte, so zeigt sich, daß dies die Kräfte A_3F_3, F_3G_3, G_3H_3, H_3A_3 sind, die in Figur 183 einfach AF, FG, GH, HA heißen, also gerade so, wie die Stäbe!

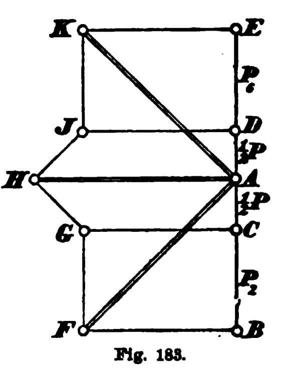


Fig. 183.

3. Um den Knotenpunkt 4 folgen in positivem Umlaufsinne die Stäbe HG, GC, die Kraft CD und die Stäbe DJ, JH; im zugehörigen Krafteck (4) der Figur 180, § 35 folgen aufeinander im Umlaufsinne dieses Kraftecks (vgl. § 35, 7.): H_4G_4, G_4C_4, C_4D_4, D_4J_4, J_4H_4, und es ist H_4G_4 die Stabkraft des Stabes HG an 4, ebenso G_4C_4 die Kraft des Stabes GC, CD die Kraft $-P_4$, D_4J_4 die Kraft des Stabes DJ, J_4H_4 die Kraft des Stabes JH, immer am Knoten 4. Diese selben Kräfte finden wir mit denselben Buchstaben bezeichnet, aber ohne die Indizes, auch in Figur 183, und es gilt also die allgemeine

Regel 1. Will man die Kraft wissen, die an einem Knotenpunkte $\varkappa$ in einem Stabe $\mathfrak{S}$ desselben wirkt, so benenne man diesen Stab mittels der in ihm aneinander stoßenden Felder X, Y der Figur 182[1]) in der Weise, daß man bei positiver Umkreisung von $\varkappa$ aus dem Felde X durch Überschreitung des Stabes $\mathfrak{S}$ in das Feld Y kommt. Dann gibt die Strecke XY des Kräfteplans Figur 183 die gesuchte Kraft nach Größe und Richtung an.

4. Welche Stabkraft ist z. B. in 45 am Knoten 5? Bei positiver Umkreisung (Figur 182) von 5 kommt man aus H über 45 nach J, also ist HJ die richtige Bezeichnung des Stabes und HJ in

1) Es sind X und Y irgend zwei der Buchstaben $A, \ldots, K$.



Figur 183 die gesuchte Kraft; dagegen ist JH die richtige Bezeichnung desselben Stabes, wenn nach seiner Kraft an 4 gefragt wird, und $\boldsymbol{JH} = -\boldsymbol{HJ}$ in Figur 183 die entsprechende Kraft nach Größe und Richtung.

Bei positiver Umkreisung von 4 kommt man aus C über $\boldsymbol{P}_4$ nach D, und in Figur 183 ist $\boldsymbol{CD}$ die umgekehrte Angriffskraft, und so auch in den übrigen Knoten mit Angriffspunkten. Daher ist die Regel 1. so zu ergänzen:

> Regel 2. Wenn man bei positiver Umkreisung eines Knotenpunktes $\varkappa$ am Fachwerk aus dem Felde X über die Angriffskraft $\boldsymbol{P}_\varkappa$ hinweg auf das Feld Y kommt, so ist $\boldsymbol{XY}$ im Kräfteplan gleich $-\boldsymbol{P}_\varkappa$.

5. Dieses elegante Verfahren, um die am Fachwerk Figur 182 auftretenden Kräfte aus Figur 183 abzulesen, ist natürlich ein Ergebnis von Vorbereitungen, die wir stillschweigend bei der Anlage der Kraftecke in Figur 180 des § 35 getroffen hatten: deshalb die Bindung an einen bestimmten Drehsinn und deshalb die Bezeichnung identischer Strecken der verschiedenen Kraftecke mit denselben Buchstaben unter Verwendung von Indizes, die dann im Kräfteplan weggelassen worden sind. Es fragt sich nun: Wie bringt man bei der Anlage der Figur 183 diese vollendete Harmonie zu stande, und wie kann man diese Figur herstellen, ohne die Kraftecke je für sich zu zeichnen?

Die Antwort lautet so:

Zuerst werden die Felder im und am Fachwerk mit Buchstaben benannt. Dann beginnt man mit der Konstruktion des Kraftecks zu (1), indem man diesen Punkt positiv umgehend die umgekehrte Angriffskraft $-\boldsymbol{P}_1$ nach Regel 2 benennt, also hier mit AB, die dann folgenden Stäbe nach Regel 1 mit BF und FA. Darauf konstruiert man, den Kräfteplan beginnend, $\boldsymbol{AB} = -\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{BF} \| BF$, $\boldsymbol{FA} \| FA$, wo die fettgedruckten Buchstaben immer dem Krafteck Figur 183, die gewöhnlichen dem Fachwerk Figur 182 selbst angehören.

Die Pfeile der gefundenen Stabkräfte werden sofort in Figur 182 eingetragen[1]), nebst ihren Gegenpfeilen am anderen Ende der betreffenden Stäbe. So wird sichtbar, daß an 2 nur noch zwei Stabkräfte unbekannt sind. Also konstruieren wir das Krafteck zu diesem Punkte! Bei positivem Umlauf stoßen wir der Reihe nach auf die bekannten Stücke FB, BC und die unbekannten CG, GF; zu den

1) Der Leser wird wiederum gebeten, das Fachwerk neu zu zeichnen und die Pfeile nach und nach einzutragen.

bekannten gehören in Figur 183 die Kräfte **FB, BC,** und wir müssen ziehen: **CG** $\| CG$, **GF** $\| GF$, wodurch der Punkt **G** bestimmt ist; das zu 2 gehörige Krafteck ist also **$FBCG$**.

6. Wiederum tragen wir die Pfeile der neu gefundenen Kräfte an 2 in die Figur des Fachwerks ein, sowie die entgegengesetzten Pfeile an den anderen Enden dieser Stäbe. Dadurch zeigt sich, daß jetzt der Knotenpunkt 3 aufgeschlossen ist, von dem die Kräfte auf AF, FG bekannt sind. In positivem Umlaufe liegen an 3 die Stäbe AF, FG, GH, HA. Das Krafteck (3) muß die dazu parallelen Seiten **AF, FG, GH, HA** haben, von denen die beiden ersten bereits konstruiert, die beiden letzten durch den Parallelismus bestimmt sind; sie legen **H** fest. Die Seiten **AF** und **FG** sind nicht nur durch die vorangehende Konstruktion ermittelt, sondern sie lagern bereits, wie zur Addition, in richtiger Reihenfolge aneinander, was uns der Mühe enthebt, **FG** erst an **AF** in **F** anzusetzen. Diese Bequemlichkeit hat man nicht immer, aber doch an allen Fachwerken, die unmittelbar durch das Krafteckverfahren sich behandeln lassen; auf diese wollen wir uns vorläufig beschränken.

7. Nun kommt der Knotenpunkt 4 an die Reihe mit den in positivem Umlaufsinne geordneten Stücken HG, GC, CD und DJ, JH; da die den drei ersten Stücken in Figur 183 entsprechenden Kräfte **HG, GC, CD** bereits zur Addition richtig aneinander gelagert sind, so braucht man nur **DJ** $\| DJ$, **JH** $\| JH$ zu ziehen, wodurch **J** bestimmt ist. Daher kennt man jetzt **DJ, JH**.

Jetzt ist nicht nur 5 aufgeschlossen, sondern auch 6. Wir wollen, um auch einmal von dem Gedankengange des § 35 abzuweichen, gleich zu 6 übergehen. Bei positivem Umlaufe kommen erst die bekannten Stücke JD, DE, denen in Figur 183 die zur Addition aneinander gereihten Kräfte **JD, DE** entsprechen, darauf die unbekannten EK, KJ, denen in Figur 183 die noch zu konstruierenden Kräfte **EK** $\| EK$, **KJ** $\| KJ$ entsprechen; die beiden Parallelen treffen sich in **K**, worauf **EK, KJ** bekannt sind.

So fährt man fort und überzeugt sich zur Kontrolle auch, daß die übrigen Kraftecke in der Figur des Kräfteplans richtig eingeschlossen sind. Man sieht, daß man die Bezeichnungsweise des Kräfteplans auch auf die Figur 180, § 35 anwenden kann. Einem Knoten $\varkappa$ mit den in positivem Sinne folgenden Stäben MN, NO, OP, PQ, QR, worunter auch eine (umgekehrte) Angriffskraft sein kann, wird ein Krafteck $\mathbf{M_\varkappa N_\varkappa O_\varkappa P_\varkappa Q_\varkappa R_\varkappa}$ entsprechen, wo $\mathbf{M_\varkappa N_\varkappa} \| MN$, $\mathbf{N_\varkappa O_\varkappa} \| NO$, $\mathbf{O_\varkappa P_\varkappa} \| OP$, $\mathbf{P_\varkappa Q_\varkappa} \| PQ$, $\mathbf{Q_\varkappa R_\varkappa} \| QR$ ist. Diese Bezeichnungsweise ist in Figur 180 tatsächlich benutzt; sie

war dann offenbar die Ursache, daß in der Teilfigur links die Indizes fortgelassen werden konnten.

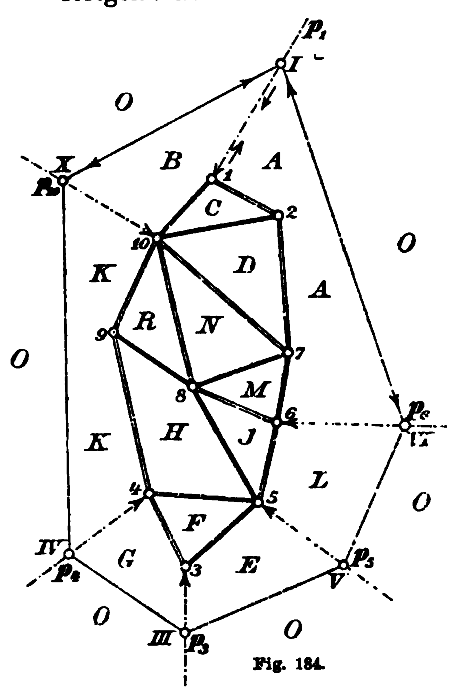


Fig. 184.

8. Als zweites Beispiel zur Einübung des Kräfteplanverfahrens diene das Fachwerk der Figur 184; es hat zehn Knotenpunkte 1, 2, ..., 10 und siebzehn Stäbe. Gegeben sei ein Angriffssystem von sechs Kräften $p_1, p_3, p_4, p_5, p_6, p_{10}$ an den Knoten 1, 3, 4, 5, 6, 10; der Sinn dieser Kräfte ist aus den Pfeilen in Figur 184 zu ersehen, die Größe ist durch die kräftigen Striche in dem Kräfteplan Figur 185 angegeben, die Erläuterung dazu soll gleich gegeben werden. Das Fachwerk und die Angriffslinien der Angriffskräfte teilen die Ebene in die Gebiete $A, B, \ldots, R$. Nach Regel 2 ist p_1 mit AB zu benennen und man findet im Kräfteplan (Figur 185) $p_1 = -AB = BA$; ebenso $p_6 = LA$. Die sechs Angriffskräfte sind also in Figur 185 gegeben und bilden, da sie im Gleichgewicht stehen sollen (§ 34, 1.), ein geschlossenes Krafteck $ABKGEL$. Diese Tatsache allein verbürgt uns aber noch nicht das Gleichgewicht, es muß nach § 28, 6. auch noch ein Seileck sich schließen. Sein Pol sei O (Fig. 185). Ihm entspricht in Figur 184 das geschlossene Seileck I-VI-V-III-IV-X. Um die Angriffskräfte richtig aus der Figur 184 abzulesen, kann man auch von den Ecken des Seilecks ausgehen: wir hatten gefunden, daß $p_1 = BA$ ist; BA ist aber die Benennung von p_1 bei positiver Umkreisung des Punktes I. Also gilt die

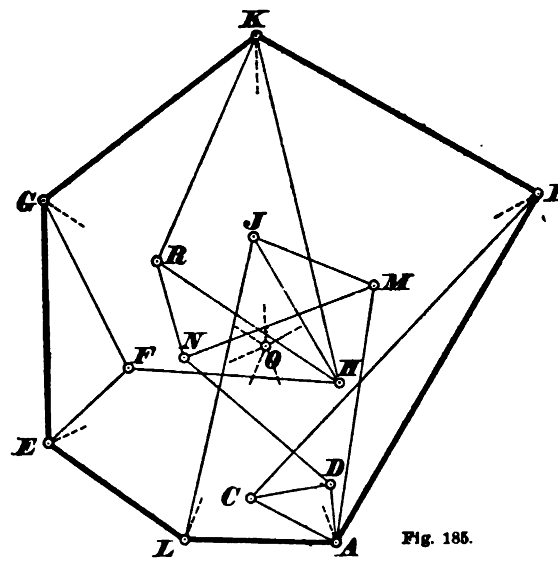


Fig. 185.

Regel 3. Eine Angriffskraft wird mit Hilfe eines Seilecks aus dem Kräfteplane abgelesen, indem man den auf ihrer Angriffslinie liegenden Eckpunkt des Seilecks positiv umkreist und die Kraft mit YZ benennt, wenn man aus Y über die Angriffslinie nach Z gelangt; die Angriffskraft ist dann $\mathbf{YZ}$;

dabei ist von der Angriffslinie nur der Halbstrahl gemeint, der von jenem Eckpunkte ausgehend die Richtung der Angriffskraft hat. So ist:

$$\mathfrak{p}_1 = \mathbf{BA}, \quad \mathfrak{p}_6 = \mathbf{AL}, \quad \mathfrak{p}_5 = \mathbf{LE}, \quad \mathfrak{p}_8 = \mathbf{EG},$$
$$\mathfrak{p}_4 = \mathbf{GK}, \quad \mathfrak{p}_{10} = \mathbf{KB}.$$

9. Die Knotenpunkte sind in der Reihenfolge numeriert, in denen man sie aufschließen kann. Dem Knotenpunkte 1 muß im Kräfteplan ein Dreieck $\mathbf{ABC}$ entsprechen, dessen Seiten zu den Geraden AB, BC, CA der Fachwerkfigur parallel sind, und da $\mathbf{AB}$ bereits gezeichnet vorliegt, ist dieses $\mathbf{C}$ durch den Parallelismus bestimmt. Dem Punkte 2 ist das Dreieck $\mathbf{ACD}$ zugeordnet, von dem $\mathbf{AC}$ soeben bestimmt worden ist, während $\mathbf{D}$ durch $\mathbf{CD} \parallel CD$, $\mathbf{DA} \parallel DA$ festgelegt wird. Hat man von den bis jetzt bestimmten Stabkräften die Pfeile in eine Handskizze des Fachwerks eingetragen, und an den anderen Enden der Stäbe gleich die Gegenpfeile[1]), so zeigt sich, daß wir dem auf dem Rande des Fachwerks nächstfolgenden Knotenpunkte nicht beikommen können, da in ihm noch drei Stabkräfte unbekannt sind. Daher müssen wir an dem mit 3 bezeichneten Knoten die Bildung der Kraftecke neu anfangen. Zu 3 gehört das Dreieck $\mathbf{EFG}$, von dem $\mathbf{GE}$ gegeben und $\mathbf{F}$ durch $\mathbf{EF} \parallel EF$, $\mathbf{GF} \parallel GF$ bestimmt ist. Darauf findet man zu 4 das Viereck $\mathbf{HKGF}$, und die Konstruktion geht ungestört in der durch die Nummern der Knoten angegebenen Reihenfolge zu Ende.

Im Fachwerk sind die auf Druck beanspruchten Stäbe doppelt ausgezogen, im Kräfteplan dagegen die Angriffskräfte in verstärktem Striche wiedergegeben. Es sei noch einmal hervorgehoben, daß die Pfeile der Angriffskräfte in Fig. 184 umgekehrt werden müssen, wenn in den Knotenpunkten Gleichgewicht bestehen soll.

10. Bei dem dritten Beispiele, das einen Brückenträger (Fig. 186) in K-Fachwerk betrifft, können wir uns kürzer fassen. Es führt seinen Namen von den K-förmigen Bestandteilen, die den unteren Rand, den Untergurt, mit dem oberen Rand, dem Obergurt, ver-

1) Da diese Figur nur im Entstehen Wert hat, so wird der Leser wiederum gebeten, sich der kleinen Mühe dieser einfachen Zeichnung zu unterziehen.

binden; jedes einzelne K besteht aus vier Stäben, übereinstimmend mit der in § 32, 6 gemachten Bemerkung, wonach der vertikale Balken nicht etwa als e i n Stab ausgebildet sein dürfte. Der Träger hat in 1

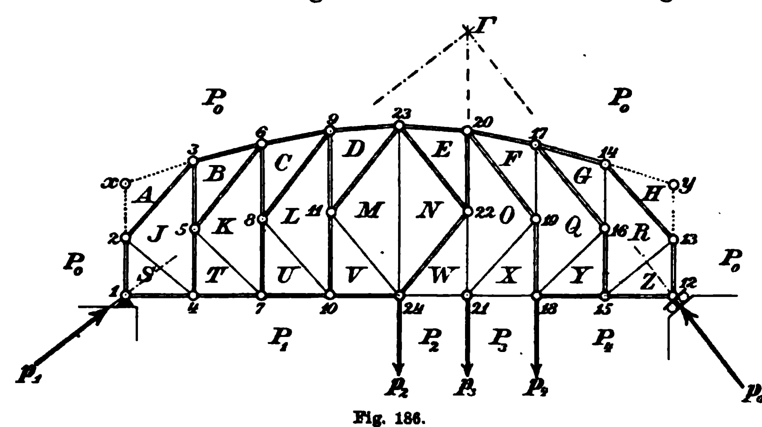


Fig. 186.

einen Drehpunkt, in 12 ein Rollenlager mit geneigter Gleitbahn. Belastet sind die Knotenpunkte 24, 21, 18 mit den Lasten p_2, p_3, p_4, die aus Figur 187 zu entnehmen sind:

$$p_2 = P_2 P_1, \quad p_3 = P_3 P_2,$$
$$p_4 = P_4 P_3.$$

Die Auflagerreaktionen werden nach § 33 ermittelt: Die Angriffslinie der Reaktion p_{12} in 12 steht auf der Gleitbahn senkrecht und trifft die Angriffslinie der Resultante von p_2, p_3, p_4, die mit der von p_3 zusammenfällt, in einem Punkte Γ, durch den auch die Auflagerreaktion p_1 in 1 gehen muß. Die Resultante $p_2 + p_3 + p_4$ ist also nach 1Γ und 12Γ zu zerlegen, und die umgekehrten Komponenten p_1 und p_{12}; in Fig. 187 ist $P_1 P_0 \parallel 1\Gamma$, $P_4 P_0 \parallel 12\Gamma$, also

$$p_1 = P_1 P_0, \quad p_{12} = P_0 P_4.$$

Fig. 187.

11. Das Fachwerk hat zwei unbelastete Knotenpunkte x und y mit je zwei Stäben; diese Stäbe bleiben nach § 35, 8. c) ohne Kraft

und sind deshalb nur punktiert gezeichnet; die doppelt ausgezogenen Stäbe sind auf Druck beansprucht. Der Gang der Konstruktion ist aus den Nummern der Knoten ersichtlich. Wie im vorigen Fachwerk muß man die an einer Ecke begonnene Kette von Kraftecken 1, 2, ..., 12 unterbrechen, und von einer anderen Seite aus, hier vom Knoten 12 aus, vordringen, bis beide Ketten von Kraftecken in der Mitte des Fachwerks aneinander stoßen und die Knotenpunkte 23, 24 aufschließen, an denen man anfangs nicht vorbei konnte. Die Punkte A und H fallen mit P_0 zusammen.

12. Mit Absicht haben wir die beiden letzten Beispiele so gewählt, daß die Knotenpunkte nicht etwa in der Reihenfolge aufgeschlossen werden konnten, in der sie am Rande des Fachwerks aufeinander folgen; alle äußeren Regeln, die hier einzugreifen versuchen, sind für das tiefere Verständnis hinderlich. Den Gang der Konstruktion muß man sich jedesmal selber bestimmen; es genügt dazu, daß man an zugänglicher Stelle anfängt und vordringt, so weit man kann; sitzt man fest, so beginnt man darauf an einer zweiten Stelle u. s. f., bis man den höheren Knotenpunkten von verschiedenen Seiten beikommt. Es muß aber bemerkt werden, daß nicht zu allen Fachwerken ein Kräfteplan existiert, wenigstens nicht in dem bisher gebrauchten Sinne des Wortes. Wenn man z. B. die drei Paar Gegenecken eines gewöhnlichen (nicht regulären) Sechsecks durch drei Stäbe verbindet und auch seine Seiten als Stäbe, seine Ecken aber als (die einzigen) Knotenpunkte auffaßt, so entsteht ein Fachwerk, an das wir mit unseren bisherigen Hilfsmitteln überhaupt nicht heran kommen, und dem auch kein gewöhnlicher Kraftplan entspricht. Da wir auf die Frage nach der Existenz der Kräftepläne nicht eingehen können[1]), also bei Beginn der Konstruktion eines Kräfteplans nie wissen, ob er existieren wird, so sind wir verpflichtet, wie wir es auch im Vorangehenden getan, zu jedem Knotenpunkte das Krafteck wirklich zu zeichnen oder sein Vorhandensein wenigstens nachzuprüfen. Es könnte sich nämlich die Notwendigkeit einstellen, eine Kraft AB an verschiedenen Stellen des Kräfteplans einzeichnen zu müssen, während in unseren Beispielen der Vorzug des Kräfteplans darin bestand, jede Kraft nur ein einziges Mal zu enthalten; der genannte Fall kommt glücklicherweise bei den Fachwerken, deren Spannungsproblem wir ohne weiteres lösen können, nicht vor.

In allen unseren Beispielen hat sich gezeigt, daß es begrifflich und praktisch-geometrisch vorteilhaft ist, wenn man sich den Zustand

1) Es liegen hierüber die schönen, aber schwierigen Untersuchungen von F. Schur vor, Math. Ann. 48, auf die wir für eingehendere Interessen verweisen müssen.



an den Knoten als Gleichgewicht der Stabkräfte mit den umgekehrten Angriffskräften denkt, nicht als Zerlegung der Angriffskräfte in Komponenten nach den Stäben. Aus dieser Auffassung entsprangen unsere klaren Regeln für die Konstruktion des Kräfteplans. Es gibt aber auch Zeichner, die die Angriffskräfte im Kräfteplan nicht umdrehen; was sie dann als „Stabkräfte" bekommen, sind die Kräfte, die wir im § 34, 2. Abwehrkräfte genannt haben, die ja ebenfalls als Maß der Stabkräfte gelten können. Der Anfänger tut aber gut, zunächst bei einer Auffassung zu bleiben.

13. Zum Fachwerk der Fig. 184 zurückkehrend können wir mit Hilfe des dort eingezeichneten Seilecks dem Spannungsproblem eine neue, vollendet schöne Fassung geben.[1]) Wir denken uns nämlich, wie bei 1 durch einen kleinen Pfeil angedeutet, die Pfeile der Angriffskräfte umgedreht, um zunächst in allen Knotenpunkten Gleichgewicht zu haben; dann setzen wir die Gegenpfeile an den Ecken des Seilecks an, wie man bei I sehen kann, d. h. an den Ecken des Seilecks sollen die Angriffskräfte ihren richtigen Pfeil bekommen. Auf der Strecke 1I finden sich demnach zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, an I die Kraft p_1 selber, an 1 die Gegenkraft. Diese Strecke verhält sich jetzt also wie ein Stab, da ja auch in den Stäben Gegenkräfte waren. Wie aber im Krafteck Fig. 185 das gleichsinnig zu durchlaufende Dreieck OBA beweist, kann man auch in I Gleichgewicht herstellen, wenn man auf I-VI die Kraft AO, auf I-X die Kraft OB verlegt. An VI halten sich ebenso die Kräfte OA auf VI-I, AL auf 6-VI, LO auf VI-V das Gleichgewicht. Die drei durch I gehenden Geraden verhalten sich also wie Stäbe eines Fachwerks mit I als Knotenpunkt: Liest man die Kräfte dieser „Stäbe" aus dem Kräfteplan nach Regel 1 ab, so herrscht in dem Punkte I Gleichgewicht. Es folgt:

Regel 4. Aus jedem Fachwerk kann ein „erweitertes Fachwerk" gebildet werden, indem man noch die Seiten eines Seilecks der Angriffskräfte, sowie die Strecken der Angriffslinien der Angriffskräfte als neue Stäbe hinzu nimmt, welche von den Ecken des Seilecks bis zu den Knotenpunkten des alten Fachwerks reichen. Bezeichnet man die Außenfläche des Seilecks am Fachwerk und den Pol des Seilecks im Kräfteplan mit denselben Buchstaben, und liest man die Stabkräfte der neu hinzugekommenen Stäbe ebenfalls nach Regel 1 aus dem

1) Diese Auffassung spielt in der Theorie von Schur eine entscheidende Rolle.

Kräftplane ab, so herrscht in jedem Knotenpunkte und in jedem Stabe des erweiterten Fachwerks Gleichgewicht.

Das Schöne dieser neuen Situation besteht darin, daß am erweiterten Fachwerk die Angriffskräfte ganz fehlen; dafür sind aber gegeben die Kräftepaare, die in den neu hinzugekommenen Stäben wirken sollen; das sind teils die Angriffskräfte des ursprünglichen Fachwerks selber, teils ihre Komponenten nach den Seiten des Seilecks. Das Spannungsproblem kann daher mittels des erweiterten Fachwerks so formuliert werden: Im erweiterten Fachwerk sind in einer Reihe von Stäben (nämlich den neu hinzugekommenen) Kräftepaare gegeben, so daß auf jedem dieser Stäbe an beiden Knoten entgegengesetzt gleiche Kräfte wirken. Man soll auf den übrigen Stäben ebenfalls Kräftepaare anbringen, derart, daß in jedem Knotenpunkte (und natürlich auf jedem Stabe) des ganzen Fachwerks Gleichgewicht besteht. Von Angriffskräften ist also jetzt keine Rede mehr.

§ 37. Das Schnittverfahren.

1. Wo das Kräfteplanverfahren anwendbar ist, liefert es auf einfachste Weise die vollständigste und anschaulichste Lösung des Spannungsproblems. Es gibt aber Fachwerke, die dem Kräfteplanverfahren erst durch vorhergehende mit anderen Hilfsmitteln vorzunehmende Aufschließung höherer Knotenpunkte zugänglich gemacht werden müssen. Nach anderen Hilfsmitteln müssen wir aber noch aus einem anderen Grunde Ausschau halten. Es kommt nämlich häufig vor, daß nicht sämtliche Stabkräfte interessieren, sondern nur die eine oder andere; unsere bis jetzt entwickelten Verfahren würden da zu umständlich sein, da sie immer gleich das ganze Spannungsproblem soweit lösen müssen, bis der betreffende Stab an die Reihe kommt. In vielen Fällen nun kann die Lösung des Spannungsproblems für einen bestimmten Stab des Fachwerks durch die sog. Schnittmethode erzielt werden.

2. Der Grundgedanke des Schnittverfahrens wird, wie wohl alle Probleme der Fachwerkstheorie, am klarsten, wenn man sich in den Knotenpunkten nicht Zerlegung der Angriffskräfte, sondern Gleichgewicht zwischen den Stabkräften und den umgekehrten Angriffskräften vorstellt. Wirkt an einem Knoten keine Angriffskraft, so stehen die Stabkräfte an diesem Knoten allein schon im Gleichgewicht.

Wir grenzen nun einen Teil der Knotenpunkte durch eine geschlossene, sich selbst nicht schneidende oder berührende Kurve λ ab,

die diese Punkte einschließt und durch keinen Knotenpunkt geht. In jedem der eingeschlossenen Knotenpunkte herrscht nach wie vor Gleichgewicht. Die Kurve λ muß aber, wenn sie nicht alle Knotenpunkte enthält, immer einige Stäbe treffen. Diese Stäbe denken wir uns, so weit sie innerhalb λ liegen, ganz beseitigt, indem wir aber zur Erhaltung des Gleichgewichts die in ihnen an den eingeschlossenen Knoten wirksam gewesenen Stabkräfte als „Ersatzkräfte" weiter an diesen Knotenpunkten belassen. Da aber in jedem unverletzten Stabe in λ die Stabkräfte sich aufheben,

so besteht auch Gleichgewicht zwischen den in λ noch übrig gebliebenen Kräften, nämlich zwischen den Ersatzkräften und den umgekehrten Angriffskräften.

Auf diese einfache Tatsache gründen sich alle Schnittverfahren.

3. Das Culmannsche Verfahren.[1]) Sind es der Ersatzkräfte innerhalb λ nur drei, deren Angriffslinien a, b, c nicht durch einen Punkt gehen, so kann man die Resultante der Angriffskräfte innerhalb λ nach Komponenten auf a, b, c zerlegen; die Komponenten halten dann den umgekehrten Angriffskräften des Gleichgewicht, sind also, wenn das Spannungsproblem des betreffenden Fachwerks eindeutig lösbar ist, die gesuchten Ersatzkräfte. Falls die Angriffskräfte (in λ) ein Kräftepaar bestimmen, so muß man die beiden Kräfte desselben einzeln nach den Geraden a, b, c zerlegen und die beiden Komponenten auf jeder dieser Geraden addieren.

Die graphische Lösung dieser Aufgabe ist in § 28, 7. mitgeteilt; wir dürfen von einem weiteren Beispiele um so mehr absehen, als bei parallel wirkenden Angriffskräften, die ja naturgemäß in der Praxis häufig vorkommen, die zur Konstruktion nötigen Schnittpunkte oft außerhalb des Zeichenblattes fallen, was die unmittelbare Verwendbarkeit dieser Methode beeinträchtigt.

4. Das Momentenverfahren von A. Ritter[2]) setzt im allgemeinen ebenfalls voraus, daß innerhalb λ nur drei Ersatzkräfte liegen, deren Angriffslinien a, b, c sich nicht in einem Punkte treffen, bestimmt aber diese Ersatzkräfte einfach auf dem Wege der Rechnung. Da innerhalb λ zwischen den Ersatzkräften und den umgekehrten Angriffskräften Gleichgewicht besteht, so ist die Momentensumme dieser Kräfte für irgend einen Punkt O gleich Null (§ 28, 6.). Verlegt man nun diesen Momentenpunkt in eine der Ecken des von

1) C. Culmann, Graphische Statik, 1. Aufl. (1866), 1. Teil (1864).

2) Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenkonstruktionen, Hannover 1863.

a, *b*, *c* gebildeten Dreiecks *ABC*, so fallen aus der Momentensumme die Momente der Kräfte heraus, die durch *O* gehen; ist z. B. der Punkt *O* mit *A* identisch, so sind die Momente der Kräfte auf *b* und *c* gleich Null, und es kommt von den Ersatzkräften nur eine in der Momentensumme vor, nämlich die auf *a*. Danach kann diese Kraft leicht berechnet werden (§ 29). Ritter hat von vornherein darauf hingewiesen, daß seine Methode auch bei mehr als drei Ersatzkräften anwendbar ist, falls nur ein Punkt *O* da ist, durch den alle Ersatzkräfte bis auf die eine zu suchende gehen. Denn für *O* als Drehpunkt fallen dann die Momente aller durch *O* gehenden Ersatzkräfte fort, und es bleibt eine Gleichung mit nur einer Ersatzkraft übrig, die mithin bestimmbar ist. Der Vorteil der Methode ist also ersichtlich der, daß sie unmittelbar die Stabkraft bestimmen läßt, die man gerade wissen will; doch sind nicht bei jedem Fachwerk die Voraussetzungen des Verfahrens erfüllt.

5. Freiere Verwendung der beiden Verfahren. Wenn die Momentensumme irgend welcher Kräfte der Ebene in einem Punkte *O* verschwindet, so geht die Resultante dieser Kräfte durch *O* (§ 28, 5.).

Mittels dieser einfachen Bemerkung kann man häufig das Momentenverfahren in ein rein graphisches verwandeln. Daß die genannte Resultante durch *O* geht, läßt sich natürlich auch ohne den Momentensatz leicht einsehen; doch macht dieser Satz es besonders bequem.

6. Der in Figur 188 abgebildete Dachbinder von Polonceau

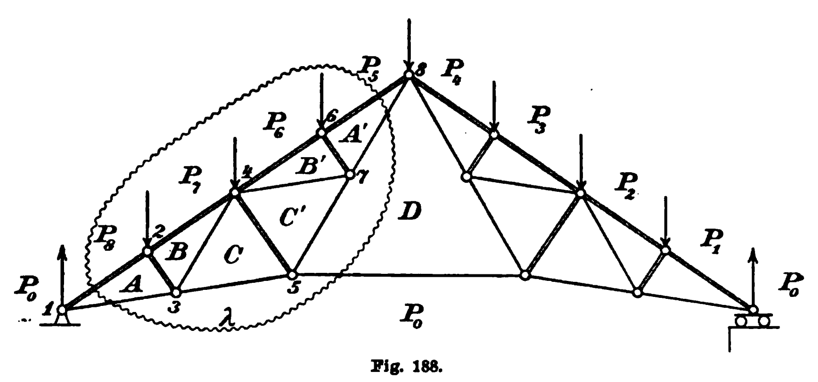


Fig. 188.

wird an sieben Knotenpunkten von gleich großen Kräften angegriffen; die Auflagerreaktionen sind daher gleich dem $3^1/_2$-fachen einer solchen Kraft, jedoch mit aufwärts weisendem Pfeil.

Dem Knotenpunkte 1, um den bei positiver Umkreisung die Kräfte $P_8 P_0$, $P_0 A$, $A P_8$ liegen, entspricht in Fig. 189 ein Krafteck $P_8 P_0 A$, das den in 1 bestehenden Gleichgewichtszustand in Evidenz setzt. Zu 2 gehört ebenso das Krafteck $P_7 P_8 A B$, zu 3 das Krafteck $B A P_0 C$. Soweit gelingt also die Anlage eines Kräfteplans ohne Schwierigkeit. Dann aber ist weder dem Punkte 4, noch dem Punkte 5 beizukommen, weil an ihnen je drei unbekannte Stabkräfte wirken; es nützt diesmal nichts, die Konstruktion des Kraftecks mit den Punkten des Fachwerks weiter zu führen, die zu den bis jetzt benutzten symmetrisch liegen; denn man würde an den zu 4 und 5 symmetrischen Knotenpunkten ebenfalls scheitern.

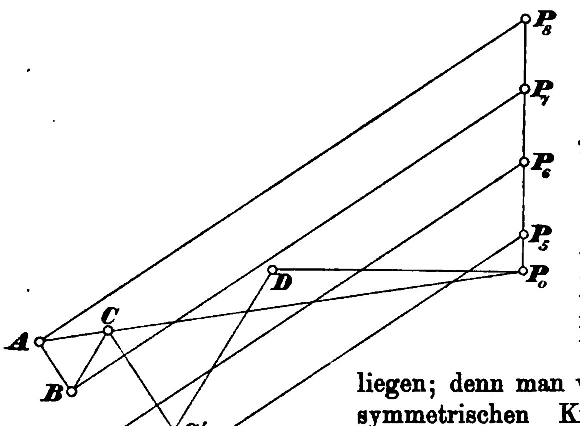


Fig. 189.

Aus dieser Verlegenheit hilft uns nun einfach eine Schnittkurve λ, die um die Knotenpunkte 2, 3, 4, 5, 6, 7 geht (Fig. 188), wenn man 5 zum Drehpunkt nimmt. Ersatzkräfte sind für die zerschnittenen Stäbe (2, 1), (3, 1), (6, 8), (7, 8), (5, 5′)[1] vorzusehen. Von diesen gehen aber (3, 1), (5, 5′), (7, 8) durch den Momentenpunkt 5; also bleiben nur die Momente der Ersatzkräfte von (2, 1) und (6, 8) in der Momentensumme, die außerdem noch die Momente der Kräfte $P_5 P_6$, $P_6 P_7$, $P_7 P_8$ enthält. Also können wir nach 5. sagen:

> Die Resultante der Kräfte $A' P_5$, $P_5 P_6$, $P_6 P_7$, $P_7 P_8$, $P_8 A$ (Fig. 188), von denen die erste und die letzte Ersatzkräfte sind, geht durch 5.

Andererseits liegt aber die Resultante der beiden Ersatzkräfte $A' P_5$ und $P_8 A$ auf (1, 8), geht also durch 4, und die der drei Angriffskräfte geht ebenfalls durch 4, indem sie auf die Angriffslinie von $P_6 P_7$ fällt; folglich fällt die Resultante aller fünf Kräfte auf die Gerade 45. Für die Anlage des Kräfteplans genügt es zu wissen, daß die Resultante von $A' P_5$, $P_5 P_6$, $P_6 P_7$, $P_7 P_8$, $P_8 A$, also die Kraft $A' A$, zu (4, 5) parallel ist. Demnach liegt A' auf der im Kräfteplan schon vorhandenen Geraden AB; dem Knotenpunkt 6 muß aber ein Krafteck $P_5 P_6 B' A'$ entsprechen, von dem die

1) Mit 5′ sei der zu 5 symmetrische Knotenpunkt bezeichnet.

Seite $A'P_5$ zu $A'P_5$ parallel ist; folglich ist A' bestimmt. Das Weitere macht dann keine Schwierigkeiten mehr.

7. In Fig. 190 ist ein in Nordamerika unter dem Namen „Baltimore truss“ eingeführter Fachwerksträger abgebildet, der in den elf

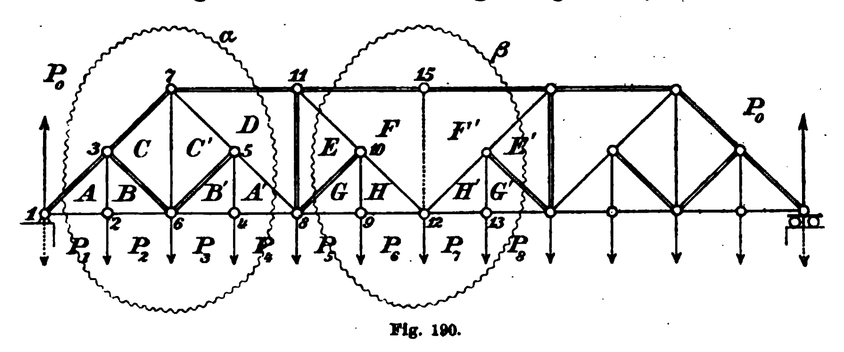


Fig. 190.

nicht unterstützten Knotenpunkten des Untergurtes (der unteren Wagerechten) gleiche Lasten trägt; die Auflager sind als Drehpunkt und als Rollenlager auf wagerechter Gleitfläche ausgebildet, haben also,

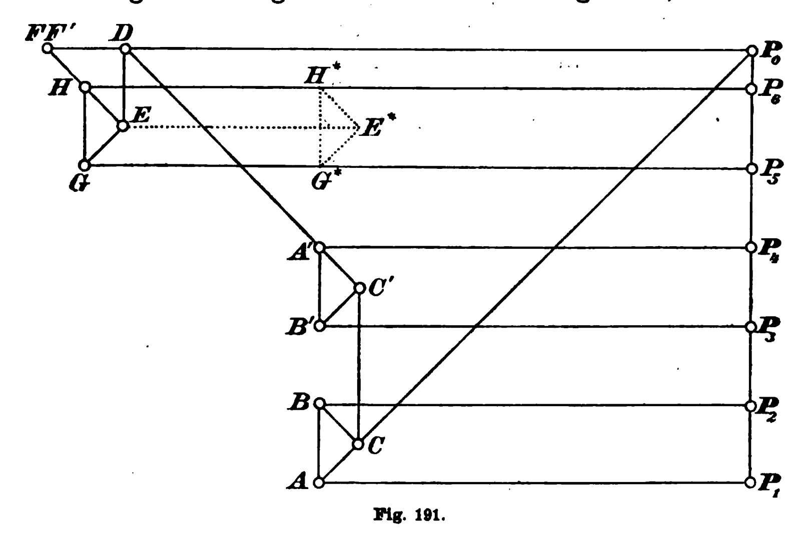


Fig. 191.

wegen der Symmetrie der Lastverteilung, je die Hälfte der Gesamtlast auszuhalten. Die Auflagerreaktionen sind daher das $5^1/_2$-fache der Einzellast eines Knotens.

Die Anlage eines Kräfteplans (Fig. 191) vom Knoten 1 beginnend kommt nach dem Knoten 5 zum Stillstand; es können dann die dazu symmetrischen Knoten am anderen Ende des Fachwerks behandelt

werden, man stößt aber nach der Erledigung von vier Knoten auf dieselbe Schwierigkeit. Diese löst das Schnittverfahren.

Der Schnitt α der Figur 190 macht fünf Ersatzkräfte nötig: in (3, 1), (2, 1), (4, 8), (5, 8), (7, 11); nimmt man aber den Knoten 7 als Momentenpunkt, so heben sich die Momente der drei Angriffskräfte auf, weil ihre Resultante durch 7 geht, und von den Ersatzkräften liefern nur die der Stäbe (1, 2) und (4, 8) einen Beitrag zu der Momentensumme. Folglich sind diese Kräfte einander entgegengesetzt gleich. Im Kräfteplan muß also $P_4A' = -AP_1 = P_1A$ sein. Der Knotenpunkt 4 ergibt jetzt sofort das Rechteck $P_3P_4A'B'$ des Kräfteplans; zu 6 gehört $BP_2P_3B'C'C$, wodurch C' bestimmt ist, und zu 7 gehört das Krafteck $CC'DP_0$, das D bestimmt.

Von dem zu 9 gehörigen Krafteck P_5P_6HG können wir vorerst nur aussagen, daß G uud H auf je einer Parallelen durch P_5, P_6 zum Untergurt des Fachwerks liegen, etwa in der Lage G^*, H^* der Figur 191. Die Umkreisung von 10 ergibt weiter, daß $EG \| EG$, $HFE \| HF$ sein wird, wodurch die Gestalt des Dreiecks EHG, aber nicht seine Lage bestimmt ist. Es kann noch etwa die Lage $E^*H^*G^*$ der Figur 191 haben. Jetzt zeigt aber die Umkreisung von 11, daß DE verstikal stehen muß. Dadurch ist die Lage des Dreiecks $E^*H^*G^*$ endlich fixiert, und zugleich auch F.

Der Schnitt β mit 15 als Momentenpunkt zeigt, was auch aus Symmetriegründen einleuchtet, daß die Stäbe (8, 9) und (13, 14) an 9 und 13 entgegengesetzt gleiche Stabkräfte enthalten. Überhaupt wird die zweite Hälfte des Kräfteplans zur ersten bezüglich FP_0 als Achse symmetrisch liegen müssen, so daß wir der Mühe einer weitergehenden Konstruktion enthoben sind.

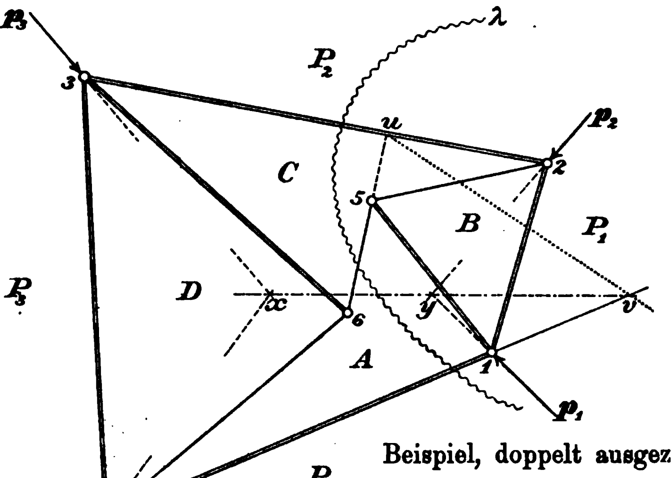


Fig. 192.

Die auf Druck beanspruchten Stäbe des Fachwerks sind, wie beim vorangehenden (und beim folgenden) Beispiel, doppelt ausgezogen.

8. Das Fachwerk Fig. 192 ist dadurch interessant, daß durch jeden seiner sechs Knotenpunkte drei Stäbe gehen, so daß die

unmittelbare Anwendung des Krafteckverfahrens sich verbietet. Mittels des Schnittes λ in Fig. 192 ist aber der Knotenpunkt 1 leicht aufzuschließen, wenn man den Schnittpunkt u der Stäbe (5, 6) und (2, 3) zum Drehpunkt der Momente macht. Die Momente der Ersatzkräfte von (2, 3) und (5, 6) fallen dann aus, und nach 5. muß die Resultante der Kräfte AP_0, P_0P_1, P_1P_2 durch u gehen. Die Resultante von P_0P_1 und P_1P_2 liegt aber auf xy, der Verbindungsgeraden der Schnittpunkte x von p_1, p_2 und y von p_3, p_4. Der Stab (4, 1) trifft diese Resultante in v, und durch diesen Punkt muß die Resultante der drei Kräfte AP_0, P_0P_1, P_1P_2 ebenfalls gehen; wenn wir sie also in einem Krafteck $AP_0P_1P_2$ summieren, so muß AP_2 zu uv parallel sein. Nachdem also die vier Angriffskräfte in einen Kräfteplan eingetragen sind (Fig. 193), die das Viereck $P_0P_1P_2P_3$ ergeben, hat man zur Ermittelung von A durch P_2 die Parallele zu uv, durch P_0 die Parallele zu AP_0 zu ziehen. Darauf können die übrigen Knotenpunkte in der Reihenfolge ihrer Nummern mühelos erledigt werden. Unser Verfahren nötigt also im Kräfteplan nur zu einer einzigen Hilfslinie AP_2. Jedenfalls zeigt auch dieses Beispiel, daß man aus der freien Verwendung des Momentenverfahrens, speziell des Artikels 5., oft Vorteil ziehen kann, ohne den Weg der graphischen Darstellung zu verlassen.

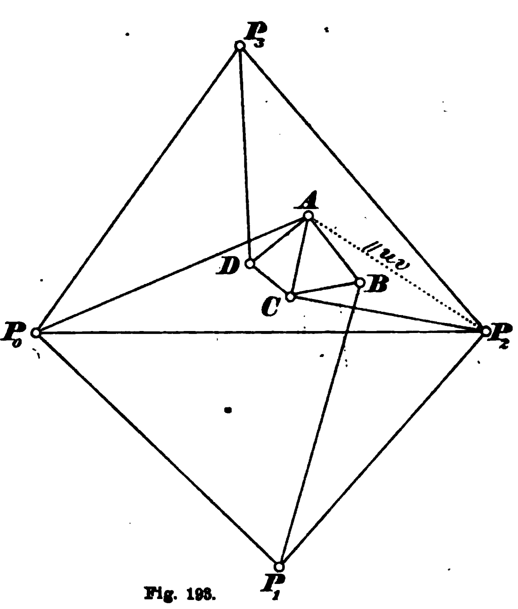


Fig. 193.

9. Das Zweischnittverfahren. Um nach den vorangehenden Ausführungen die Stabkraft x eines Stabes a in einem seiner Knotenpunkte C ohne Aufrollung des ganzen Spannungsproblems zu bestimmen, wird man einen Schnitt λ_1 so anzulegen suchen, daß der Stab a getroffen wird und die sonst noch zerschnittenen Stäbe durch einen Punkt O_1 gehen, der dann als Drehpunkt der Momente dient. In die Momentensumme tritt dann, abgesehen von den Angriffskräften, nur die unbekannte Stabkraft x ein, die daher leicht berechnet werden kan.

Aber nicht immer wird ein Schnitt λ_1 in der gewünschten Weise möglich sein, es wird häufig noch ein Stab b mitgetroffen werden,

der **nicht** durch den Schnittpunkt O_1 der übrigen von der Kurve λ_1 geschnittenen Stäbe geht. Dann kommt also in die Momentensumme bezüglich O_1 als Drehpunkt noch eine zweite Unbekannte, herrührend von der unbekannten Kraft y des Stabes b. Man wird daher nach einer zweiten Gleichung suchen müssen. Gelingt es, einen zweiten Schnitt λ_2 ausfindig zu machen, der außer a und b nur solche Stäbe trifft, die durch einen Punkt O_2 gehen, so ist unsere Absicht erreicht; wir erhalten dann zwei Gleichungen ersten Grades, aus denen x und y sich im allgemeinen bestimmen lassen. Bei der Bildung der Momente ist darauf zu achten, daß, wenn an einem Knotenpunkt eines Stabes die Kraft x wirkt, am anderen die entgegengesetzte Kraft $-x$ sitzt.

Dieses Verfahren ist von H. **Müller-Breslau** eingeführt worden (1887). Das von ihm behandelte Beispiel betraf ein Sechseck mit drei Diagonalen (Fig. 194)[1]; der Schnitt λ_1 trifft außer a und b noch c_1 und d_1; ebenso schneidet λ_2 außer a und b auch c_2 und d_2; die

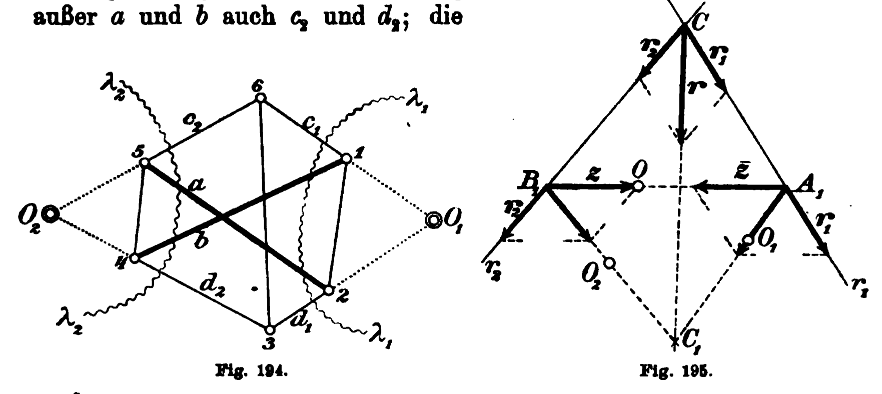


Fig. 194. Fig. 195.

eine Momentensumme wird bezüglich des Schnittpunktes O_1 von c_1 und d_1 gebildet, die andere bezüglich des Schnittpunktes O_2 von c_2 und d_2.

10. Auch diese Methode läßt sich leicht graphisch ausbeuten. Wir nehmen z. B. an, λ_1 habe die einen, λ_2 die anderen Endpunkte von a und b umschlossen (wie in Fig. 194), so daß also in λ_1 auf a und b etwa die Stabkräfte $-x$ und $-y$, in λ_2 dagegen die Stabkräfte $+x$ und $+y$ entfallen. Die Angriffskräfte in λ_1 mögen eine Resultante r_1, die in λ_2 eine Resultante r_2 haben (Fig. 195)[2]. Der Grundgedanke unserer Lösung ist nun der, erst die **Resultante** z der Kräfte

1) Die drei Schnittpunkte derselben gehören **nicht** zu den Knoten.

2) Die Angriffslinien sind r_1, r_2. Die Figur 195 ist der Übersichtlichkeit wegen etwas anders angeordnet als Figur 194.

x und y zu bestimmen; diese wird durch den Schnittpunkt O der Stäbe a und b gehen, der, wie wir annehmen, nicht im Unendlichen liegen soll.

Die Resultante r von r_1 und r_2 kann erstens direkt (am Schnittpunkte C von r_1 und r_2 falls er im Endlichen liegt) konstruiert werden, zweitens aber, indem wir r_1 und r_2 in A_1 und A_2 mit z zum Schnitt gebracht denken, in A_1 die Kraft r_1 mit z, in A_2 die Kraft r_2 mit $-z$ vereinigen, und die beiden so entstehenden Resultanten, von denen die erste durch O_2, die andere durch O_1 gehen muß, in ihrem Schnittpunkte C_1 selber wieder zusammensetzen; dieser liegt daher auf der von vornherein bestimmbaren Angriffslinie von r. Damit ist die statische Aufgabe zurückgeführt auf die geometrische (Fig. 196): Gegeben sind drei Geraden r, r_1, r_2 durch einen Punkt C und drei Punkte O, O_1, O_2; man soll auf r einen Punkt C_1 konstruieren, so daß die Gerade $C_1 O_1$ die Gerade r_1 in einem Punkte A_1, und $C_1 O_2$ die Gerade r_2 in einem Punkte B_1 trifft und daß die Gerade $A_1 B_1$ durch O geht. Nimmt man versuchsweise C_1 auf r in der Lage C_2 an, und sind A_2, B_2 die Schnittpunkte von $C_2 O_1$ mit r_1, von $C_2 O_2$ mit r_2, so wird $A_2 B_2$ im allgemeinen noch nicht durch O gehen; wenn wir aber C_2 die ganze Punktreihe r durchlaufen lassen, so durchläuft B_2 auf r_2 und A_2 anf r_1 eine dazu perspektive Punktreihe. Daher sind die Punktreihen auf r_1 und r_2 zueinander projektiv, und da sie offenbar den Punkt C entsprechend gemein haben, sogar perspektiv, d. h. die veränderliche Gerade $A_2 B_2$ gehört einem Strahlbüschel Q an. Zu den Verbindungslinien $A_2 B_2$ homologer Punkte gehört auch $O_1 O_2$, also muß auf $O_1 O_2$ der Mittelpunkt Q des Strahlenbüschels liegen, und er wird auf $O_1 O_2$ bestimmt durch die soeben probeweise konstruierte Gerade $A_2 B_2$ (Fig. 196). Zieht man jetzt QO, so sind rückwärts in Figur 195 die Punkte A_1, B_1 bekannt, und man kann an ihnen durch Zerlegung von r_2 und r_1 die Kräfte z und $-z$ finden. Zerlegt man z in O seinerseits nach a und b, so hat man x und y. Fig. 196 enthält die vollständige Konstruktion bis auf die Zerlegung von z; die Richtigkeit kann hinterher leicht durch Anwendung des Desarguesschen Satzes auf die Dreiecke $O_1 A_1 B_2$, $O_2 B_1 B_2$ bewiesen werden.

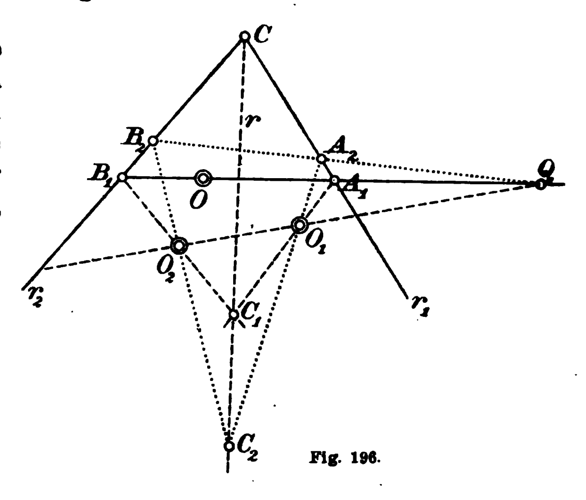


Fig. 196.

§ 38. Das Superpositionsgesetz.

1. Zur Erschließung tiefer liegender Eigenschaften des Fachwerks und zur gemeinsamen Begründung mancher spezieller Lösungsverfahren des Spannungsproblems kann ein Satz dienen, der so einfach ist, daß er beinahe trivial erscheinen möchte:

In einer Ebene sei ein irgendwie geartetes System Σ von Stäben gegeben, die, wo sie verbunden sind, gelenkartige Knotenpunkte haben, so daß an diesen Knoten wirkende Kräfte sich nur in der Längsrichtung der Stäbe äußern können; im übrigen braucht das System durchaus nicht ein zusammenhängendes Ganze zu bilden, es darf sogar aus lauter einzelnen Stäben bestehen, deren Endpunkte wir dann Knotenpunkte nennen. Auf dieses Stabsystem Σ möge nun einmal ein Angriffssystem (P), dann ein Angriffssystem (Q) an den Knotenpunkten einwirken, und es sei jedesmal durch Einführung von „Stabkräften" in den Stäben an den Knotenpunkten gelungen, sowohl in jedem einzelnen Stabe, als auch in jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herzustellen zwischen den Stabkräften und den umgekehrten Angriffskräften. Dem Angriffssystem (P) möge so das System (t^P) von Stabkräften entsprechen[1], dem Angriffssystem (Q) das System (t^Q). Dann bildet auch das aus (P) und (Q) „superponierte" System $(R) = (P) + (Q)$, das aus den zugleich wirkenden Systemen (P) und (Q) besteht, ein Angriffssystem (§ 34, 1.), und man findet ein zugehöriges System (t^R) von Stabkräften, wenn man (t^P) und (t^Q) ebenfalls superponiert, d. h. gleichzeitig in den Stäben anbringt. Jede Stabkraft des Systems (t^R) ist also die Resultante der beiden Kräfte des betreffenden Stabendes im System (t^P) und (t^Q); wir schreiben $(t^R) = (t^P) + (t^Q)$.

Es wird aber nicht behauptet, daß (t^R) die einzige Lösung des Spannungsproblem zu (R) sei.

Wir können auch kürzer sagen:

Entsprechen zwei Angriffssystemen (P) und (Q) die Lösungen (t^P) und (t^Q) des Spannungsproblems, so ent-

1) Das t soll durch den Anklang an *tensio* die Stabkraft bezeichnen; (t^P) soll an die Abhängigkeit dieser Stabkräfte von (P) erinnern; eine Verwechslung mit Potenzen ist nicht denkbar, da das Symbol (t^P) keinen Sinn hätte; allenfalls könnte man $(t^{(P)})$ schreiben; untere Indizes an t sollen für andere Zwecke vorbehalten werden.

steht durch Superposition dieser Lösungen eine Lösung des Spannungsproblems des aus (P) und (Q) superponierten Angriffssystems,

und allgemein:

Entsprechen den Angriffssystemen $(A), (B), (C), (D), \ldots$ die Lösungen $(t^A), (t^B), (t^C), (t^D), \ldots$ des Spannungsproblems, so ist $(t^A) + (t^B) + (t^C) + (t^D) + \cdots$ eine Lösung des Spannungsproblems zu $(A) + (B) + (C) + (D) + \cdots$,

immer unter der Voraussetzung, die allein den Sätzen einen Sinn verleiht, daß es sich allemal um dasselbe Stabsystem Σ handele. Zur Ergänzung können wir noch hinzufügen, wenn wir mit $a(P)$, $a(t^P)$ die Kräftesysteme bezeichnen, die aus (P), (t^P) durch Multiplikation jeder einzelnen Kraft mit der positiven oder negativen Zahl a hervorgehen:

Entspricht dem Angriffssystem (P) die Lösung (t^P), so ist $a(t^P)$ eine Lösung zu $a(P)$,

wo a eine reelle Zahl bedeutet; insbesondere geht $-(P)$ aus (P) und $-(t^P)$ aus (t^P) durch Umkehrung aller Pfeile hervor.

Alles das Gesagte gibt zusammengefaßt das allgemeine

Superpositionsgesetz: An dem eingangs beschriebenen Stabwerk Σ mögen den Angriffssystemen $(A), (B), (C), (D), \ldots$ die Systeme $(t^A), (t^B), (t^C), (t^D), \ldots$ als Lösungen des Spannungsproblems in dem Sinne entsprechen, daß unter der Wirkung von $-(A)$ und (t^A) an sämtlichen Knoten und in sämtlichen Stäben Gleichgewicht ist; ebenso bei $-(B)$ und (t^B), $-(C)$ und (t^C), usw. Dann ist

$$(t^S) = a(t^A) + b(t^B) + c(t^C) + d(t^D) + \cdots$$

eine Lösung des Spannungsproblems zu

$$(S) = a(A) + b(B) + c(C) + d(D) + \cdots.$$

Lassen die Systeme $(A), (B), (C), (D), \ldots$ und (S) an dem Knoten $\varkappa$ je die Kräfte $\mathbf{A}_\varkappa, \mathbf{B}_\varkappa, \mathbf{C}_\varkappa, \mathbf{D}_\varkappa, \ldots$ und $\mathbf{S}_\varkappa$ angreifen, so ist

$$\mathbf{S}_\varkappa = a\mathbf{A}_\varkappa + b\mathbf{B}_\varkappa + c\mathbf{C}_\varkappa + d\mathbf{D}_\varkappa + \cdots,$$

und entsprechen diesen Angriffssystemen in dem Stabe $\mathfrak{S}_\sigma$ die Stabkräfte $t_\sigma^A, t_\sigma^B, t_\sigma^C, t_\sigma^D, \ldots$ sowie t_σ^S, so ist

$$t_\sigma^S = at_\sigma^A + bt_\sigma^B + ct_\sigma^C + dt_\sigma^D + \cdots,$$

wo die t auf ihren Stäben wie algebraische Zahlen zu addieren sind, weshalb ihre Bezeichnung als Vektoren (durch Fettdruck) nicht nötig ist. Das ist in anderen Worten der Inhalt des Superpositionsgesetzes.

2. Aus diesem allgemeinen und mühelos einzusehenden Gesetze strömt eine solche Fülle wichtiger Erkenntnisse, daß wir nur das Allerwenigste in dieser elementaren Theorie darstellen können. Vorläufig müssen wir uns mit einigen Abzählungen begnügen.

Wenn ein Angriffssystem (Q) des Stabwerks Σ sich aus anderen Angriffssystemen (A), (B), (C), ... von Σ in der Form

$$(Q) = a(A) + b(B) + c(C) + \cdots$$

oder wie wir kurz sagen wollen, durch Superposition darstellen läßt, so nennen wir (Q) von (A), (B), (C), ... linear abhängig. Ist eine solche Darstellung unmöglich, so heißt (Q) von (A), (B), (C), ... linear unabhängig. Entsprechendes gilt von (t^A), (t^B), (t^C), ... und (t^Q).

Eine Reihe von Angriffssystemen $(A_1), (A_2), \ldots, (A_\alpha)$, von denen keines durch Superposition aus den anderen darstellbar ist, während alle anderen Angriffssysteme des Stabwerks Σ von $(A_1), \ldots, (A_\alpha)$ linear abhängig sind, wird eine Basis der Angriffssysteme genannt; eine entsprechende Definition gelte für die Lösungen (t^Q) des Spannungsproblems: Durch eine Basis $(t^{B_1}), \ldots, (t^{B_\beta})$ sind alle anderen Lösungen (t^Q) in der Form

$$(t^Q) = b_1(t^{B_1}) + b_2(t^{B_2}) + \cdots + b_\beta(t^{B_\beta})$$

darstellbar, während keines der Elemente der Basis durch die anderen darstellbar ist. Man darf aber nicht schließen, daß einer Basis $(A_1), \ldots, (A_\alpha)$ der Angriffssysteme auch eine Basis $(t^{A_1}), \ldots, (t^{A_\alpha})$ der Lösungen entspreche; wir hatten nirgends vorausgesetzt, daß dem Spannungsproblem nur eine Lösung zukomme.

Eine Basis der Lösungen nun ist sofort angebbar: Es seien $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_s$ die einzelnen Stäbe von Σ, ihre Anzahl also s, und $(\tau^{(\sigma)})$ das System von Stabkräften, das aus den Kräften $+1$ und -1 im Stabe $\mathfrak{S}_\sigma$ an seinen beiden Endpunkten besteht; wir verabreden, bei jedem Stabe einen bestimmten Punkt als Anfangspunkt zu betrachten, den anderen als Endpunkt, und $+1$ soll immer am Anfangspunkt wirken; alle anderen Stabkräfte nehmen wir gleich Null an und konstruieren an den Knotenpunkten solche Angriffskräfte, daß zwischen den umgekehrten Angriffskräften und dem System $(\tau^{(\sigma)})$ Gleichgewicht besteht; d. h. wir bringen an den Endpunkten von $\mathfrak{S}_\sigma$ die Kräfte $+1$ und -1 auch als Angriffskräfte an, während alle anderen Angriffskräfte gleich Null gewählt werden. Dieses Angriffssystem (σ) unterscheidet sich also nur in der Auffassungsweise von $(\tau^{(\sigma)})$, beide Systeme bestehen aus denselben Kräften, die von (σ) werden aber als Angriffskräfte, die von $(\tau^{(\sigma)})$ als Stabkräfte gedacht. Jedenfalls aber dürfen wir $(\tau^{(\sigma)})$ als eine Lösung des Spannungs-

problems auffassen, und nun ist

$$(\tau^{(1)}),\ (\tau^{(2)}),\ \ldots,\ (\tau^{(s)})$$

offenbar eine Basis aller Lösungen; denn läßt man aus dieser Reihe ein Glied fort, etwa $(\tau^{(\sigma)})$, so kann man durch Superposition der übrigen niemals in $\mathfrak{S}_\sigma$ ein Kräftepaar bringen, also auch nicht $(\tau^{(\sigma)})$ darstellen, während andererseits jede Lösung (t) des Spannungsproblems, die etwa in den Anfangspunkten von $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_s$ die Spannungen $t_1, t_2, \ldots, t_s$ ergibt, durch

$$(t) = t_1(\tau^{(1)}) + t_2(\tau^{(2)}) + \cdots + t_s(\tau^{(s)})$$

dargestellt ist.

Die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen ist also gleich der der Stäbe.

Und das gilt von dem eingangs beschriebenen Stabwerk Σ, das nicht einmal als zusammenhängend vorausgesetzt ist.

3. Auch von den Angriffssystemen ist leicht eine Basis anzugeben. Zu diesem Zweck legen wir durch den beliebigen Knoten $\varkappa$ zwei verschiedene Geraden, $z_{2\varkappa-1}, z_{2\varkappa}$, jede mit bestimmtem Sinn versehen, dem folgend wir Strecken dieser Geraden positiv messen, sonst negativ. Durch den vorletzten Knotenpunkt $k-1$ gehen so die Geraden z_{2k-3} und z_{2k-2}, von denen z_{2k-3} auch durch k gehen möge, ohne mit z_{2k-1} oder z_{2k} zusammenzufallen. Nun bringen wir auf z_λ in dem Knotenpunkte von z_λ im Pfeilsinne von z_λ die Krafteinheit an, und bestimmen zu dieser Kraft Z_λ auf $z_{2k}, z_{2k-1}, z_{2k-2}$ an den Knotenpunkten dieser Geraden (nach § 28, 7.) die Kräfte $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$, die Z_λ im Gleichgewicht halten, für $\lambda = 1, 2, \ldots, 2(k-2)$. Unter (Z_λ) verstehen wir das aus $Z_\lambda, A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$ gebildete Angriffssystem.

Ist jetzt (Q) irgend ein Angriffssystem mit der Kraft $Q_\varkappa$ an dem beliebigen Knoten $\varkappa$, die auf $z_{2\varkappa-1}$ und $z_{2\varkappa}$ die Komponenten $c_{2\varkappa-1}, c_{2\varkappa}$ hat, positiv oder negativ gemessen, je nachdem sie die Richtung von $z_{2\varkappa-1}, z_{2\varkappa}$ haben oder nicht, so hat auch $c_{2\varkappa-1}(Z_{2\varkappa-1}) + c_{2\varkappa}(Z_{2\varkappa})$ an $\varkappa$ diese Kraft und bringt sonst nur noch Kräfte nach $(k-1)$ und k. Also stimmt das System

$$(Q') = c_1(Z_1) + c_2(Z_2) + \cdots + c_{2(k-2)}(Z_{2(k-2)})$$

mit (Q) in den Kräften der $k-2$ ersten Knotenpunkte überein und ist zudem im Gleichgewicht, da die (Z_λ) es sind; daher besteht das System $(Q)-(Q')$ nur noch aus Kräften an $(k-1)$ und k, die ebenfalls im Gleichgewicht sein müssen und daher auf z_{2k-3} ein Gegenpaar bilden, das am Knoten $(k-1)$, im Sinne von z_{2k-3} gemessen,

die Größe c_{2k-3} haben möge. Besteht (Z_{2k-3}) aus der positiven Krafteinheit an $(k-1)$ auf s_{2k-3} und der Gegenkraft an k, so ist jenes Kräftepaar gleich $c_{2k-3}(Z_{2k-3})$, also

$$(Q) - (Q') = c_{2k-3}(Z_{2k-3}),$$

und schließlich:

$$(Q) = c_1(Z_1) + c_2(Z_2) + \cdots + c_{2k-3}(Z_{2k-3}).$$

Daraus folgt:

Das $(2k-3)$-gliedrige System $(Z_1), (Z_2), \ldots, (Z_{2k-3})$ ist eine Basis aller Angriffssysteme von Σ;

denn es vermag jedes derselben durch Superposition zu erzeugen, während von den (Z) selber keines durch die anderen darstellbar ist.

4. Nicht jedem dieser Angriffssysteme entspricht an Σ eine Lösung, wenn Σ in sich beweglich oder mehrteilig ist. Nun nehmen wir an, Σ sei ein statisch bestimmtes Fachwerk $\mathfrak{F}$ von s Stäben, k Knoten, d. h. bei jedem Angriffssystem habe das Spannungsproblem eine und nur eine Lösung. Jedem der s linear unabhängigen Systeme $(\tau^{(1)}), (\tau^{(2)}), \ldots, (\tau^{(s)})$, die nach Art. 2 zu den Angriffssystemen (1), (2), ..., (s) eine Lösung des Spannungsproblems liefern, entspricht nunmehr nur diese eine Lösung; und diese s Angriffssysteme sind jetzt nach dem Superpositionsgesetz linear unabhängig. Mit Rücksicht auf das Schlußergebnis von 3. ist daher

$$s = 2k - 3,$$

d. h.:

Ein statisch bestimmtes Fachwerk von k Knoten hat $s = 2k - 3$ Stäbe,

aber nicht jedes Fachwerk von dieser Anzahl der Stäbe und Knoten ist, wie wir sehen werden, statisch bestimmt.

5. Ein statisch bestimmtes Fachwerk ist in sich starr, kein Teil ist gegen den anderen beweglich. Denn könnte sich, wenn man zwei Knotenpunkte 1 und 2 festhält, ein dritter Knotenpunkt 3 noch bewegen, für einen Augenblick etwa auf einer durch 3 gehenden Geraden von bestimmter Richtung, so würde eine an 3 in dieser Richtung angebrachte Kraft, der in 1 und 2 zwei dazu zu konstruierende das Gleichgewicht halten, den Knotenpunkt fortbewegen, könnte also durch innere Kräfte in den Stäben nicht daran gehindert werden, und für diese drei Kräfte als Angriffssystem wäre das Spannungsproblem unlösbar. Ein in sich starres Fachwerk nennt man stabil, doch besagt dieser Begriff noch mehr, was wir mit unseren bis jetzt entwickelten Hilfsmitteln nicht ausdrücken können; es ist nämlich

nicht jedes starre Fachwerk im tieferen Sinne des Wortes stabil, wohl aber jedes stabile Fachwerk starr.

Aus der Starrheit des statisch bestimmten Fachwerkes folgt, daß durch jeden Knoten mindestens zwei Stäbe gehen, weil ein Knoten mit einem Stab die Beweglichkeit dieses Stabes voraussetzte.

6. Aus dem statisch bestimmten Fachwerk $\mathfrak{F}$ geht ein ebenfalls starres Fachwerk $\mathfrak{F}'$ hervor, wenn man in $\mathfrak{F}$ noch nicht verbundene Knoten durch Einführung neuer Stäbe verbindet, ohne neue Knotenpunkte einzuführen. Die alten Stäbe seien $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_{2k-3}$, die neuen, die wir überzählige Stäbe nennen, $\mathfrak{S}_1^0, \mathfrak{S}_2^0, \ldots, \mathfrak{S}_p^0$. Von einem Knoten, an dem einer oder mehrere der überzähligen Stäbe sitzen, strahlen mindestens auch zwei alte aus. Wenn wir daher in dem überzähligen Stabe $\mathfrak{S}_\pi^0$ irgend ein Gegenpaar von Kräften anbringen, von dem je eine Kraft am Anfang und am Ende dieses Stabes wirkt, so können wir in den Stäben des ursprünglichen Fachwerks $\mathfrak{F}$ mit Leichtigkeit Kräftepaare so anbringen, daß in jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herrscht und von den überzähligen Stäben nur $\mathfrak{S}_\pi^0$ ein Kräftepaar trägt; es bilde etwa eine Zugkraft, bestehend aus der Krafteinheit und der Gegenkraft, und der Druck werde als negative Zugkraft gemessen. Das Kräftepaar in $\mathfrak{S}_\pi^0$ ist hiernach ein Teil eines Spannungszustandes (σ_π) des ganzen Fachwerks, bei dem Gleichgewicht an allen Knoten und in allen Stäben waltet, ohne daß Angriffskräfte vorhanden sind. Daran soll der obere Index von $\mathfrak{S}_\pi^0$ erinnern. Das zu $\mathfrak{S}_\pi^0$ gehörige System von Stabkräften (σ_π) läßt also alle überzähligen Stäbe außer $\mathfrak{S}_\pi^0$ kraftlos.

7. Einem Angriffssystem (Q) an $\mathfrak{F}'$ möge nun eine Lösung (t^Q) des Spannungsproblems entsprechen, die für den überzähligen Stab $\mathfrak{S}_\pi^0$ die Zugkraft γ_π ergebe. Dann stimmt das System

$$(\sigma) = \gamma_1(\sigma_1) + \gamma_2(\sigma_2) + \cdots + \gamma_p(\sigma_p)$$

von Stabkräften mit (t^Q) in den Kräften auf den überzähligen Stäben überein, und da (σ) in jedem Knotenpunkte Gleichgewicht bestehen läßt, so stellt auch $(t^Q) - (\sigma)$ einen Spannungszustand dar, bei dem in jedem Knoten und in jedem Stabe Gleichgewicht ist; da aber bei diesem Spannungszustande die überzähligen Stäbe kraftfrei sind, so können diese beseitigt werden. Dann besteht an $\mathfrak{F}$ selber dieser Spannungszustand mit Gleichgewicht; konstruiert man daher zu diesen Stabkräften die Angriffskräfte, so bilden diese ein Angriffssystem, und dieses hat wegen der statischen Bestimmtheit von $\mathfrak{F}$ nur eine in der Form

$$(t^Q) - (\sigma) = c_1(t^{Z_1}) + \cdots + c_{2k-3}(t^{Z_{2k-3}})$$

darstellbare Lösung, wenn (t^{Z_λ}) die Lösung des zu (Z_λ) gehörigen Spannungsproblems am Fachwerk $\mathfrak{F}$ bezeichnet. Also ist endlich:

$$(t^Q) = (\sigma) + c_1(t^{Z_1}) + \cdots + c_{2k-3}(t^{Z_{2k-3}}),$$
$$(t^Q) = c_1(t^{Z_1}) + \cdots + c_{2k-3}(t^{Z_{2k-3}}) + \gamma_1(\sigma_1) + \gamma_2(\sigma_2) + \cdots + \gamma_p(\sigma_p).$$

In dieser Form ist also die Lösung jedes Spannungsproblems am Fachwerk $\mathfrak{F}'$ darstellbar.

8. Wenn andererseits für $\mathfrak{F}'$ irgend ein Angriffssystem (Q) vorgelegt ist, so schreibe man außerdem noch den überzähligen Stäben ganz willkürlich den durch $(\sigma) = \gamma_1(\sigma_1) + \cdots + \gamma_p(\sigma_p)$ bei beliebigen γ dargestellten Spannungszustand vor (der auch die Stäbe von $\mathfrak{F}$ selber in Mitleidenschaft zieht). Die so für $\mathfrak{S}_1^0, \ldots, \mathfrak{S}_p^0$ verabredeten Stabkräfte denke man an $\mathfrak{F}$ als Angriffskräfte angebracht, an denselben Knoten und in denselben Richtungen. Das so aus (Q) hervorgehende System (Q') an $\mathfrak{F}$ ist dann ein Angriffssystem an $\mathfrak{F}$, dem eine ganz bestimmte Lösung des Spannungsproblems entspricht:

$$c_1(t^{Z_1}) + c_2(t^{Z_2}) + \cdots + c_{2k-3}(t^{Z_{2k-3}}),$$

und nach dem Superpositionsgesetz ist dann

$$(t^Q) = c_1(t^{Z_1}) + \cdots + c_{2k-3}(t^{Z_{2k-3}}) + \gamma_1(\sigma_1) + \cdots + \gamma_p(\sigma_p)$$

eine Lösung des Spannungsproblems zu (Q) an $\mathfrak{F}'$, genau wie oben, nur daß jetzt die vollständige Verfügbarkeit der Konstanten $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ zutage tritt. Einem Angriffssystem an $\mathfrak{F}'$ läßt sich also kein eindeutiger Spannungszustand in den Stäben entgegensetzen, man kann die Spannungen der überzähligen Stäbe nach Belieben vorschreiben. Dem gegenüber steht aber die nicht minder sichere Tatsache, daß an einem wirklich ausgeführten Fachwerk sich bei gegebener Belastung immer ein bestimmter Spannungszustand einstellt. Dieser scheinbare Widerspruch klärt sich auf, wenn man bedenkt, daß wir absolut starre Stäbe und rein statische Verhältnisse vorausgesetzt haben, starre Stäbe, indem wir von einem Gegenpaar auf einem Stabe annehmen, daß es sich zerstört. An einem materiellen Fachwerk ist das nicht so, da treten kleine Formänderungen auf und damit Übertragungen bestimmter Spannungszustände in alle Stäbe. Dem Fachwerk unserer Theorie hingegen kommt das in § 34, 4. beschriebene Fadenmodell materiell am nächsten, aber selbst dieses entscheidet sich für bestimmte Spannungen in den überzähligen Stäben (Fäden), weil die Fäden ebenfalls nachgeben. Die Unbestimmtheit des Spannungszustandes von $\mathfrak{F}'$ in den überzähligen Stäben gilt also nur an einem idealen Fachwerk, das den rein sta-

tischen Voraussetzungen der Theorie entspricht. In diesem Sinne heißt $\mathfrak{F}'$ **statisch unbestimmt.**

9. Das Hauptergebnis dieser ganzen Betrachtung, die mit den einfachsten Mitteln geführt werden konnte und nicht einmal die Theorie der Systeme linearer Gleichungen voraussetzt, besteht darin, daß wir die Angriffssysteme wie die Spannungszustände aus ganz einfachen, linear unabhängigen Elementen durch Übereinanderlagerung aufbauen können. Wir wollen das Wesentliche zusammenstellen.

Aus dem statisch bestimmten Fachwerk $\mathfrak{F}$ mit k Knotenpunkten und $s = 2k - 3$ Stäben sei durch Einziehen von p „überzähligen" Stäben $\mathfrak{S}_1^0, \ldots, \mathfrak{S}_p^0$ das im Falle $p > 0$ statisch unbestimmte Fachwerk $\mathfrak{F}'$ mit k Knoten und $s' = s + p$ Stäben abgeleitet. Dann lassen sich alle Angriffssysteme an $\mathfrak{F}'$ (und damit an $\mathfrak{F}$) superponieren aus den $2k - 3$ linear unabhängigen Systemen

$$(Z_1),\ (Z_2),\ \ldots,\ (Z_{2k-3}),$$

die je nur aus höchstens vier Kräften bestehen; drei derselben haben bei allen (Z_λ) dieselben Angriffslinien $z_{2k}, z_{2k-1}, z_{2k-2}$; die vierte, Z_λ, wirkt für $\lambda = 2\varkappa - 1$ und $\lambda = 2\varkappa$ am Punkt $\varkappa$; die Richtungen von $Z_{2\varkappa-1}$ und $Z_{2\varkappa}$ sind verschieden.

Ist nun

$$(Q) = c_1(Z_1) + c_2(Z_2) + \cdots + c_{2k-3}(Z_{2k-3})$$

ein Angriffssystem an $\mathfrak{F}$ und (t^{Z_λ}) die zu (Z_λ) gehörige Lösung des Spannungsproblems, so gehört zu (Q) an $\mathfrak{F}$ der Spannungszustand

$$(t^Q) = c_1(t^{Z_1}) + c_2(t^{Z_2}) + \cdots + c_{2k-3}(t^{Z_{2k-3}}).$$

Die Systeme $(t^{Z_1}), \ldots, (t^{Z_{2k-3}})$ sind voneinander linear unabhängig.

Bezeichnet nun noch $(\tau^{(\pi)})$ einen Spannungszustand an $\mathfrak{F}'$, bei dem von den überzähligen Stäben nur $\mathfrak{S}_\pi^0$ ein Kräftepaar, etwa von der Größe $+1$ und -1 enthält, während die übrigen überzähligen Stäbe kraftfrei sind und durch Konstruktion geeigneter Kräftepaare in den Stäben von $\mathfrak{F}$ für Gleichgewicht an allen Knoten gesorgt ist, so ist nach dem Superpositionsgesetz

$$(t'^Q) = (t^Q) + \gamma_1(\tau^{(1)}) + \cdots + \gamma_p(\tau^{(p)})$$

mit ganz willkürlichen $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ eine Lösung des Spannungsproblems zu (Q) am Fachwerke $\mathfrak{F}'$, und in dieser Form ist jede Lösung des Problems enthalten.

Diese Superposition der Lösungen aus möglichst einfachen, linear unabhängigen spielt, wenn auch nicht in dieser Form, so doch der Sache nach in der Technik eine wichtige Rolle, indem sie den Einfluß der Belastung eines Knotens auf die Gesamtspannung im Fachwerk erkennen läßt. Bemerkenswert ist, daß hiernach am Fachwerk $\mathfrak{F}'$ Spannungen (τ) auftreten können, auch wenn keine Kräfte angreifen. Praktisch kommen diese in der Weise zustande, daß bei der Herstellung von $\mathfrak{F}$ selber alle Stäbe zusammen gerade ausreichen, um erst die Knotenpunkte gegeneinander festzulegen, während beim Einziehen der überzähligen Stäbe schon festgelegte Punkte miteinander verbunden werden, wobei, falls der Stab nicht genau die richtige Länge hat, durch Anwendung von Zwang sich Spannungen einstellen können.

10. Aus der Beziehung

$$s = 2k - 3$$

zwischen den Anzahlen der Stäbe und Knoten eines statisch bestimmten Fachwerks läßt sich eine nützliche Folgerung ziehen. Sei z die Anzahl der Knoten mit zwei, und d die der Knoten mit drei Stäben, so strahlen von jenen $2z$, von diesen $3d$, und von den übrigen $(k - z - d)$ Knoten mindestens $4(k - z - d)$ Stäbe nach den anderen Knoten hin aus, und zwar genau so viel, wenn alle übrigen Knoten je vierstabig sind; in der Summe

$$2z + 3d + 4(k - z - d)$$

dieser Zahlen ist jeder Stab zweimal gezählt, also

$$2z + 3d + 4(k - z - d) \leqq 2(2k - 3),$$

woraus

$$2z + d \geqq 6$$

folgt, d. h.:

Wenn ein statisch bestimmtes Fachwerk keine Dreistabknoten hat, so hat es mindestens drei Zweistabknoten, und wenn es keine Zweistabknoten hat, so hat es mindestens sechs Dreistabknoten.

Ein statisch bestimmtes Fachwerk mit sechs Knotenpunkten ohne Zweistabknoten kann daher nur Dreistabknoten enthalten. In den Figuren 192 und 194 haben wir die beiden möglichen Typen kennen gelernt.

§ 39. Der Grenzfall.

1. Die beiden Fachwerke mit sechs Knotenpunkten sind noch aus einem anderen Grunde von Interesse. Auf das eine, Fig. 192, hatten wir in § 37 das Schnittverfahren angewandt; der Schnitt λ traf die drei Stäbe (1,4), (2,3), (5,6), und es bestand Gleichgewicht zwischen ihren Kräften und den umgekehrten Angriffskräften innerhalb λ; die Resultante $\overline{R}$ der umgekehrten Angriffskräfte in λ, die im Kräfteplan der Größe und Richtung nach durch P_0P_2 wiedergegeben wird, muß daher auf den drei Stäben drei Komponenten haben, die den drei Stabkräften das Gleichgewicht halten. Diese drei Komponenten können nach § 28, 7. gefunden werden, vorausgesetzt, daß die drei Stäbe nicht durch einen Punkt gehen. Bilden die drei Stäbe ein Dreieck ABC, und sind x, y, z die Komponenten von $\overline{R}$, sowie h_a, h_b, h_c die orientierten Hebelarme dieser Komponenten und u, v, w die Hebelarme von $\overline{R}$ selber an den Drehpunkten A, B, C, so ist nach dem Momentensatz

$$h_a x = uR, \quad h_b y = vR, \quad h_c z = wR,$$

wo x, y, z, R die absoluten Größen der Kräfte bezeichnen. Damit sind die Komponenten gefunden; h_a, h_b, h_c sind bis auf das Vorzeichen einfach die Höhen des Dreiecks ABC. Das alles haben wir mit geringen Abänderungen schon in § 29, 4. gesehen. Wenn nun das Dreieck ABC kleiner und kleiner wird, so nehmen die Höhen unbegrenzt ab und die x, y, z werden immer größer, falls nicht die Resultante $\overline{R}$ immer in der Nähe der drei Eckpunkte bleibt und die Abstände u, v, w ebenfalls abnehmen. Bleiben diese Abstände über einer gewissen von Null verschiedenen Grenze, während ABC in einen Punkt S zusammenschrumpft, so werden x, y, z unendlich. Das also ist der tiefere Grund, warum eine Kraft $\overline{R}$ nicht nach drei durch einen Punkt S gehenden Richtungen zerlegbar ist, wenn der Punkt nicht auf der Angriffslinie der Kraft liegt.

Unsere Konstruktion Fig. 192 setzt also notwendig voraus, daß die drei getroffenen Stäbe nicht durch einen Punkt S gehen; träte dieser Fall doch ein, so würde (u, v) mit $(1, 4)$ zusammenfallen, oder, falls auch v mit u sich vereinigte, ganz unbestimmt werden; in beiden Fällen bleibt A unbestimmt, und im ersten, wie wir jetzt sehen, unbestimmbar, denn die Resultante ginge dann an S vorbei.

Dieser „Grenzfall", daß an einem starren Fachwerk, das unbegrenzt viel statisch bestimmte Formen hat, bei spezieller Lage der Knotenpunkte sich Unlösbarkeit des Spannungsproblems (infolge des Auftretens unendlich großer Stabkräfte) herausstellt, ist in seiner Wichtigkeit zuerst von O. Mohr erkannt worden (1885). Wir wollen

ein Fachwerk dieser Art als singulär bezeichnen, verstehen also darunter ein starres System, das bei änderer Lage der Knotenpunkte statisch bestimmt wäre, so aber nicht jedes Spannungsproblem zu lösen gestattet.

2. Wir bilden das zum Typus Fig. 192 gehörige singuläre Fachwerk hier ab (Fig. 197a) und fügen noch den speziellen Fall hinzu (Fig. 197b), wo bei etwas anderer Anlage die drei Stäbe (1,4), (2,3),

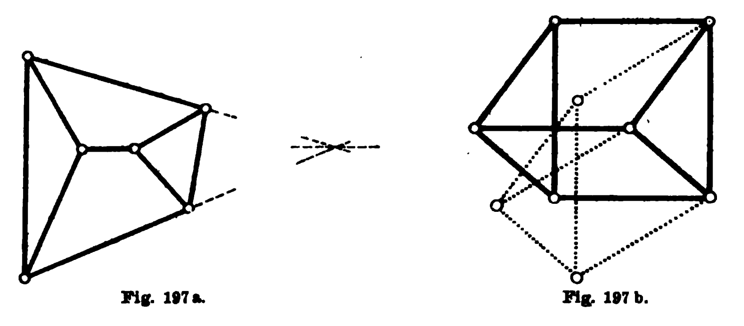


Fig. 197a. Fig. 197b.

(5,6) parallel und gleich werden; dann ist das Fachwerk, wie man sieht, sogar in sich beweglich.

3. Die Ableitung des Grenzfalles mit der Schnittmethode ist nur von begrenzter Anwendbarkeit, die Methode des folgenden Beweises führt weiter (Fig. 198). Angenommen, das Spannungsproblem sei an dem Fachwerk Fig. 198 für irgend ein Angriffssystem $p_1, \ldots, p_6$ gelöst, in jedem Knotenpunkte sei Gleichgewicht zwischen den umgekehrten Angriffskräften und den Stabkräften. Auf den Strahlen $S1$, $S2$, $S5$ nehmen wir drei Punkte $1'$, $2'$, $5'$ so an, daß das Dreieck $1'2'5'$ zu 125 ähnlich ist und ähnlich liegt. Dann sind also die Seiten des neuen Dreiecks denen von 125 parallel. Nun verpflanzen wir alle an den Knoten 1, 2, 5 wirksamen Kräfte (unter Erhaltung ihrer Richtung) nach $1'$, $2'$, $5'$, und da die Stäbe der Knotenpunkte $1'$, $2'$, $5'$ zu denen der Punkte 1, 2, 5 parallel sind, so fallen die Stabkräfte wieder in die Stäbe. Darauf denken wir 1, 2, 5 beseitigt, das Fachwerk also durch $1'2'5'346$ ersetzt. An den Knotenpunkten greifen die alten Angriffskräfte p_1',

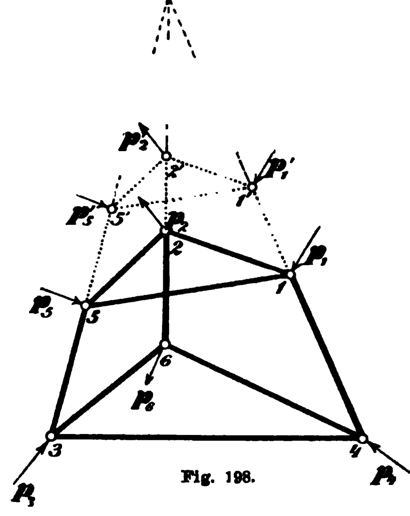


Fig. 198.

$p_1', p_2', p_5', p_3, p_4, p_6$ an, nur, daß die von $1', 2', 5'$ parallel verschoben sind; in den Stäben sind solche Stabkräfte, daß an jedem Knoten und in jedem Stabe Gleichgewicht herrscht:

Das Spannungsproblem für $p_1', p_2', p_5', p_3, p_4, p_6$ ist gelöst.

Da die Stabkräfte sich paarweise aufheben, so müssen auch die Angriffskräfte im Gleichgewicht stehen. Das ist aber nur ausnahmsweise der Fall. Denn nimmt man etwa alle Kräfte außer p_3, p_4, p_5 gleich Null, diese aber so an, daß sie im Gleichgewicht sind und p_5 nicht durch S geht, so wird auch p_5' nicht durch S gehen. Andererseits müssen sich aber p_3, p_4, p_5 wegen des Gleichgewichts in einem Punkte T treffen, und durch diesen müßte auch p_5' gehen, was nur möglich wäre, wenn p_5 durch S ginge. Wir sind also auf einen Widerspruch gestoßen, der beweist, daß wir die Lösbarkeit des Spannungsproblems bei dieser Belastung nicht voraussetzen durften.

4. Diese Überlegung bleibt offenbar noch richtig, wenn an Stelle der Dreiecke 125 und 346 irgend zwei Systeme $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ von Stäben gesetzt und durch drei Stäbe (1, 4), (2, 6), (3, 5) verbunden werden, deren Endpunkte Knoten von $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ sind. Gehen diese Stäbe durch einen Punkt S, so kann man unter Festhaltung von $\mathfrak{F}_1$ an Stelle von $\mathfrak{F}_2$ ein dazu ähnliches und ähnlich gelegenes System $\mathfrak{F}''$ setzen, mit S als Ähnlichkeitspunkt. Wiederum ist in diesem Falle nicht jedes Spannungsproblem lösbar. Wenn dagegen die drei Stäbe ein Dreieck bilden, so sind ihre Spannkräfte nach der Schnittmethode stets bestimmbar, und wenn $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ selber statisch bestimmt waren, so ist es auch das zusammengesetzte Fachwerk.

5. Auch mit diesem Resultate ist die Tragweite unseres (indirekten) Beweisverfahrens noch nicht erschöpft. Den Ausschlag gab doch der Umstand, daß die Winkel zwischen den Stäben des Fachwerks 1, 2, 3, 4, 5, 6 mit denen von $1', 2', 3, 4, 5', 6$ vollständig übereinstimmten; wir konnten daher die an 1, 2, 5 wirksamen Stab- und Angriffskräfte nach $1', 2', 5'$ verschieben, die Stabkräfte fanden dort wieder in den Stäben Unterkunft und hoben sich auf, während die Angriffskräfte trotz ihrer Verschiebung im Gleichgewicht bleiben sollten; diese Schlußweise ist ganz allgemein durchführbar. Zu einem Fachwerk $\mathfrak{F}$ mit den Knoten $1, 2, \ldots, k$ sei ein anderes, $\mathfrak{F}'$, mit gleich viel Knoten konstruierbar, derart, daß jedem Knoten $\varkappa$ von $\mathfrak{F}$ ein bestimmter Knoten $\varkappa'$ von $\mathfrak{F}'$, und dem Verbindungsstab $\varkappa\lambda$ zweier Knoten $\varkappa, \lambda$ von $\mathfrak{F}$ ein dazu paralleler Verbindungsstab der entsprechenden Knoten $\varkappa', \lambda'$ von $\mathfrak{F}'$ zugeordnet ist; wenn $\varkappa, \lambda$ durch keinen Stab

verbunden sind, wird dagegen nicht verlangt, daß $\varkappa'\lambda'$ zu $\varkappa\lambda$ parallel sein soll. Die durch $\varkappa'$ gehenden Stäbe sind zu den durch $\varkappa$ gehenden parallel. Zu einem Angriffssystem (Q) an $\mathfrak{F}$ sei das Spannungsproblem gelöst, in jedem Knoten bestehe Gleichgewicht zwischen den Stabkräften und den umgekehrten Angriffskräften. Verpflanzt man nun die an einem Knoten von $\mathfrak{F}$ wirkenden Kräfte nach dem entsprechenden Knoten von $\mathfrak{F}'$ (unter Erhaltung von Größe und Richtung), so fallen die Stabkräfte wegen des vorausgesetzten Parallelismus einfach in die Stäbe von $\mathfrak{F}'$, in jedem Stabe und in jedem Knoten von $\mathfrak{F}'$ herrscht Gleichgewicht! Da die Stabkräfte sich paarweise aufheben, so müssen wiederum die Angriffskräfte, deren Gesamtheit wir mit (Q') bezeichnen, im Gleichgewicht sein, was unter Umständen ein Widerspruch sein wird. Dem müssen wir noch nachgehen.

6. Die Sache liegt jetzt so: Zu dem Fachwerk $\mathfrak{F}$ haben wir ein „isoklines“ Fachwerk $\mathfrak{F}'$ gefügt, ein Fachwerk mit gleichen Stabneigungen; die Angriffskräfte (Q) von $\mathfrak{F}$ sind (parallel zu sich) an die entsprechenden Knotenpunkte von $\mathfrak{F}'$ verlegt und bilden dort ein System (Q'), das, wenn zu (Q) das Spannungsproblem bei $\mathfrak{F}$ lösbar war, sich im Gleichgewicht befindet, also ebenfalls ein Angriffssystem bildet. Wir fassen jetzt irgend ein Knotenpaar 1, 2 von $\mathfrak{F}$ ins Auge und das entsprechende 1′, 2′ von $\mathfrak{F}'$; falls die Strecke 1′2′ nicht gleich 1 2 ist, dürfen wir $\mathfrak{F}'$ ähnlich so vergrößern oder verkleinern, daß 1′2′ gleich 1 2 wird. Dieses ebenfalls zu $\mathfrak{F}$ isokline Fachwerk nennen wir wieder $\mathfrak{F}'$. Jetzt sind zwei Fälle denkbar: entweder ist $\mathfrak{F}'$ zu $\mathfrak{F}$ kongruent, oder nicht. Im ersten Fall ist das Gleichgewicht von (Q') selbstverständlich, im zweiten aber nur unter Bedingungen erfüllt. In diesem Falle wird es mindestens einen Knoten 3′ von $\mathfrak{F}'$ geben, so daß 1′2′3′ nicht zu 1 2 3 kongruent ist — es ist nicht gesagt, daß diese Dreiecke aus Stäben bestehen sollen —. Dann bestehe (Q) aus nur drei parallelen Kräften an 1, 2, 3, die sich das Gleichgewicht halten sollen (Fig. 199). Um zu verhindern, daß auch (Q') im Gleichgewicht sei, tragen wir $1\,2\,3'' \cong 1'2'3'$ an und wählen die Richtung der drei Kräfte des Systems (Q) von 3 3″ verschieden; damit ist unsere Absicht selbst in dem Falle erreicht, daß 1, 2, 3 und 1′, 2′, 3′ in gerader Linie liegen. Es kann also (Q') nicht, wie geschlossen war, im Gleichgewicht stehen; folglich war die Annahme der Lösbarkeit des Spannungsproblems an $\mathfrak{F}$ bei dieser Belastungsart unzulässig. Ehe wir das Resultat feststellen, sei noch bemerkt, daß 1 2

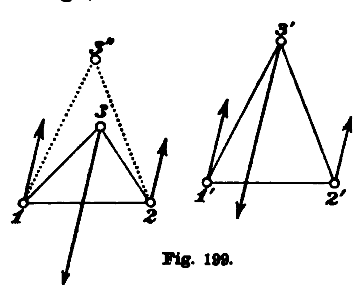


Fig. 199.

nicht notwendig ein Stab sein mußte; wir wollen es jetzt aber der größeren Anschaulichkeit halber voraussetzen. Dann können wir sagen:

> Wenn zwei zueinander isokline Fachwerke in der Länge eines Paares homologer Stäbe übereinstimmen, ohne kongruent zu sein, so gestatten sie nicht die Lösung des Spannungsproblems zu jeder Belastung.

Der Satz gilt von allen irgendwie gearteten ebenen Fachwerken, ist aber von Bedeutung nur für die, welche der Zahl ihrer Knoten und Stäbe nach statisch bestimmt sein könnten:

> Ein Fachwerk $\mathfrak{F}$ mit k Knoten und $s = 2k - 3$ Stäben ist singulär, wenn ein zu ihm isoklines Fachwerk $\mathfrak{F}'$ existiert, das nicht zu ihm ähnlich ist;

dann ist nämlich sofort ein zu $\mathfrak{F}'$ ähnliches und ähnlich gelegenes Fachwerk $\mathfrak{F}''$ konstruierbar, das mit $\mathfrak{F}$ in der Länge eines homologen Stabes übereinstimmt, und dieses ist ebenfalls zu $\mathfrak{F}$ isoklin.

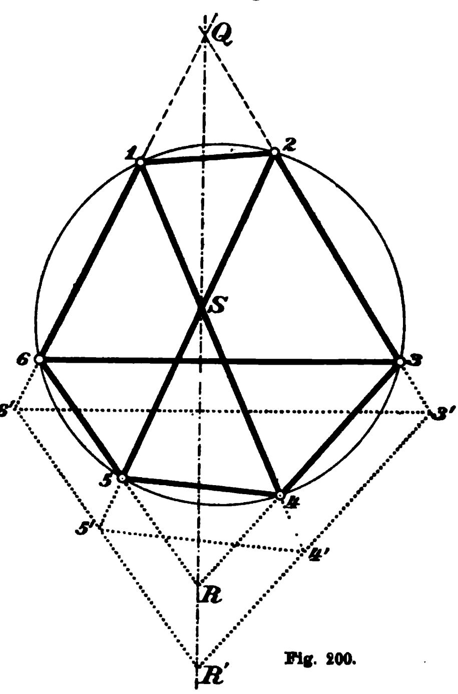


Fig. 200.

7.[1]) In Fig. 198 ist 1'2'5'346 zur 125346 isoklin, beide Fachwerke haben u. a. den Stab 34 gemein. Wir wollen jetzt auch bei dem zweiten aus sechs Dreistabknoten gebildeten Fachwerk Fig. 200 die Bedingung des Grenzfalles aufsuchen. Das Fachwerk $\mathfrak{F}$ in Fig. 200 wird singulär sein, wenn die Anlage eines isoklinen Fachwerkes $\mathfrak{F}'$ gelingt, das mit $\mathfrak{F}$ den Stab 12 gemein hat, ohne mit $\mathfrak{F}$ identisch zu sein. Zu 36 ziehen wir irgend eine von 36 verschiedene Parallele, und es seien 3' und 6' ihre Schnittpunkte mit 23 und 16. Die Parallele durch 3' zu 34 treffe 14 in 4', die Parallele durch 6' zu 65 treffe 25 in 5'; ist jetzt auch, wie wir annehmen wollen, 4'5' parallel zu 45, so ist $\mathfrak{F}' = 123'4'5'6'$ zu $\mathfrak{F}$ isoklin. Der Schnittpunkt von 23 und 16 sei Q, die Seiten 14 und 25 mögen sich in S, die Seiten 34 und 56 in R, 3'4' und 5'6' in R' treffen.

1) Diese Nummer setzt die Kenntnis des Pascalschen Lehrsatzes voraus, kann aber übergangen werden.

Dann ist das Dreieck $36R$ ähnlich und ähnlich gelegen zu $3'6'R'$, also QRR' eine Gerade; ferner ist Dreieck $45R$ ähnlich und ähnlich gelegen zu $4'5'R'$, also SRR' eine Gerade, und mithin ist auch $QSRR'$ eine Gerade. Folglich ist 165234 ein Pascalsches Sechseck, denn seine Gegenseiten schneiden sich, wie aus dem Schema

Seite:	16	65	52
Gegenseite:	23	34	41
Schnittpunkt:	Q	R	S

zu ersehen ist, in drei Punkten Q, R, S einer Geraden. Liegen umgekehrt Q, R, S in einer Geraden, und konstruiert man wieder $3'6' \parallel 36$, $3'4' \parallel 34$, $6'5' \parallel 65$, so ist $36R$ zu $3'6'R'$ ähnlich und ähnlich gelegen, also R' ein Punkt der Geraden QRS; da $6'5' \parallel 65$, $3'4' \parallel 34$, so ist $S5:S5' = SR:SR' = S4:S4'$, also $4'5' \parallel 45$, also $123'4'5'6'$ zu 123456 isoklin. Die Ecken eines Pascalschen Sechsecks liegen aber immer auf einem Kegelschnitt, und so folgt:

Das Fachwerk Fig. 200 ist singulär oder nicht, je nachdem seine sechs Ecken auf einem Kegelschnitt liegen oder nicht.

8. So leicht wie im vorliegenden Falle gelingt die Konstruktion der zu einem Fachwerke isoklinen Fachwerke nur in wenigen einfachen Fällen, und doch ist diese Aufgabe von großer Wichtigkeit für die Erkennung des gefährlichen singulären Falles. Versucht man tiefer zu dringen, so wird man auf die für die Fachwerktheorie geradezu fundamentale Aufgabe geführt, alle Fachwerke von gegebenen Stabneigungen und vorgeschriebener Art der Knotenbildung zu konstruieren; das wären dann offenbar wieder isokline Fachwerke. Zur schärferen Formulierung dieser Aufgabe sind einige Vorbereitungen nötig.

A. Winkelmessung.

Um die Richtungen der Stäbe festzulegen, führen wir eine Gerade x von bestimmtem Sinne — die x-Achse eines Koordinatensystems — als Bezugsgerade ein (Fig. 201); auf dem Stabe $\mathfrak{S}_\sigma$, dessen Neigung φ_σ gegen x zu messen ist, bringen wir in seinen beiden Knotenpunkten zwei nach außen weisende Pfeile an; jeder derselben wird um den betreffenden Knotenpunkt positiv gedreht, bis er mit dem Pfeilsinne von x übereinstimmt. Der kleinere dieser beiden Drehwinkel wird Neigungswinkel φ_σ, sein Scheitelpunkt der An-

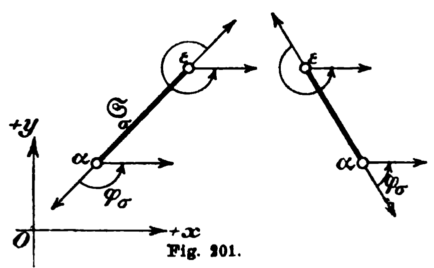


Fig. 201.

fangspunkt des Stabes genannt. Der andere Knoten heißt der Endpunkt des Stabes. Der ihm entsprechende Drehwinkel ist um zwei Rechte größer als der Neigungswinkel φ_σ.

B. Die Gliederung.

Es sei die „Gliederungszahl“

$$\Gamma_{\sigma,\varkappa} = \begin{cases} \;\;0, & \text{wenn } \mathfrak{S}_\sigma \text{ nicht durch den Knoten } \varkappa \text{ geht,} \\ +1, & \text{wenn der Knoten } \varkappa \text{ Anfangspunkt von } \mathfrak{S}_\sigma \text{ ist,} \\ -1, & \text{,, ,, ,, } \varkappa \text{ Endpunkt ,, } \mathfrak{S}_\sigma \text{ ,,.} \end{cases}$$

9. Jetzt können wir isokline Fachwerke als solche mit gleichen Neigungen entsprechender Stäbe und mit gleichen Gliederungszahlen definieren; die Gesamtheit der Gliederungszahlen bestimmt die „Gliederung“ eines Fachwerkes. Das Ziel unserer Untersuchung wird nun der zuerst von F. Schur[1]) in voller Schärfe ausgesprochene Fundamentalsatz sein:

> Ein Fachwerk ist stabil oder nicht, je nachdem es durch seine Gliederung, die Richtungen seiner Stäbe und die mit diesen Bedingungen verträgliche Annahme eines Stabes eindeutig bestimmt ist oder nicht;

dazu gehört noch eine Erläuterung bezüglich der Stabilität. Wir haben bereits gesagt, daß die (ursprünglich kinematische) Definition dieses Begriffes sich mit unseren bis jetzt entwickelten Hilfsmitteln nicht geben läßt. Stabil besagt mehr als der Begriff starr des täglichen Lebens; auch das singuläre Fachwerk ist in diesem weiten Sinne starr, es hält fest zusammen. Aber es ist nicht stabil.

Um die Ausschließung der singulären Fachwerke von den stabilen wenigstens vorläufig verständlich zu machen, denken wir uns ein Dreieck ABC als Fachwerk ausgebildet. Dieses ist sicher fest, ist statisch bestimmt und nicht singulär. Wenn aber die Summe der Seiten AB und BC gleich der Seite AC wird, so daß B auf die Gerade AC fällt (Fig. 202), so ist das Fachwerk singulär, denn es vermag einem Angriffssystem paralleler Kräfte, deren Richtung von AC verschieden ist, nicht durch Entgegensetzen von Stabkräften das Gleichgewicht zu bieten. Man sieht nun, daß eine verhältnismäßig kleine Kraft genügt, um B aus der Geraden AC herauszudrängen. Das Fachwerk ist zwar im vulgären Sinne starr, aber so wenig form-

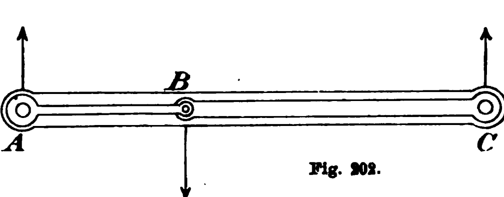


Fig. 202.

1) F. Schur: Über ebene einfache Fachwerke. Math. Ann. 48 (1896).

beständig, daß man mit leichter Mühe eine beträchtliche Verschiebung von B aus der Geraden AC heraus erzielen kann, wie es bei einem Dreiecke ABC nicht entfernt möglich wäre. Der kinematische Begriff der Stabilität verlangt gegenseitige Unbeweglichkeit der Knoten des Fachwerks auch unter Ausschluß dieser minimalen Bewegungen.

§ 40. Analytische Lösung des Spannungsproblems.[1])

1. Es liegt nahe, das ganze Problem mit den Mitteln der analytischen Geometrie in Angriff zu nehmen. Der Ansatz ist sehr einfach, macht aber, wenn man den erhaltenen Formeln einen tieferen Sinn abgewinnen will, einige Kunstgriffe nötig, die anfangs ein wenig befremden werden.

Wir stellen uns zuerst die Aufgabe, ein Fachwerk von k Knoten und $s = 2k - 3$ Stäben aus seiner Gliederung, den Neigungen φ_σ seiner Stäbe und einer Stablänge zu bestimmen.

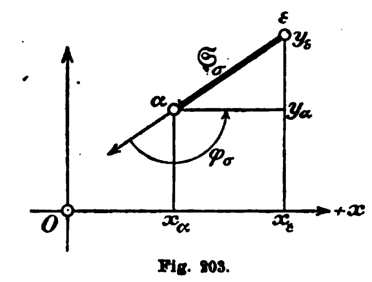


Fig. 203.

Gegeben sind also die Gliederungszahlen $\Gamma_{\sigma,x}$, die Winkel φ_σ und die Länge eines Stabes, dessen Knotenpunkte wir mit k und $k-1$ bezeichnet annehmen dürfen; die übrigen sollen $1, 2, \ldots, k-2$ heißen.

Sei nun $\mathfrak{S}_\sigma$ ein Stab mit dem Anfangspunkte α und dem Endpunkte ε. Dann ist (Fig. 203) bei Voraussetzung rechtwinkeliger Koordinaten:

$$\frac{\sin\varphi_\sigma}{\cos\varphi_\sigma} = -\frac{y_\varepsilon - y_\alpha}{x_\varepsilon - x_\alpha} = -\frac{y_\alpha - y_\varepsilon}{x_\alpha - x_\varepsilon}.$$

Es ist aber

$$y_\alpha = \Gamma_{\sigma,\alpha} y_\alpha, \qquad x_\alpha = \Gamma_{\sigma,\alpha} x_\alpha,$$

und

$$-y_\varepsilon = \Gamma_{\sigma,\varepsilon} y_\varepsilon, \qquad -x_\varepsilon = \Gamma_{\sigma,\varepsilon} x_\varepsilon,$$

also

$$\frac{\sin\varphi_\sigma}{\cos\varphi_\sigma} = -\frac{\Gamma_{\sigma,\alpha} y_\alpha + \Gamma_{\sigma,\varepsilon} y_\varepsilon}{\Gamma_{\sigma,\alpha} x_\alpha + \Gamma_{\sigma,\varepsilon} x_\varepsilon},$$

wofür man, da $\mathfrak{S}_\sigma$ nur durch die Knoten α, ε geht, auch setzen kann:

1) Dieser Paragraph setzt den Begriff der Determinante und den Satz von der Vertauschbarkeit der Zeilen mit den Spalten voraus. Die Ergebnisse dieses Paragraphen werden in den nächsten auf elementarem Wege neu begründet; praktischen Wert hat die analytische Lösung wohl kaum, gibt aber einen vollkommenen Einblick in die algebraische Natur der ganzen Fragestellung.

$$\frac{\sin\varphi_\sigma}{\cos\varphi_\sigma} = -\frac{\sum_\varkappa \Gamma_{\sigma,\varkappa} y_\varkappa}{\sum_\varkappa \Gamma_{\sigma,\varkappa} x_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k).$$

Daher hat man zur Bestimmung der $2k$ Koordinaten der k Knotenpunkte die Gleichungen:

$$(1) \qquad \sum_\varkappa y_\varkappa \Gamma_{\sigma,\varkappa} \cos\varphi_\sigma + \sum_\varkappa x_\varkappa \Gamma_{\sigma,\varkappa} \sin\varphi_\sigma = 0$$

$$\text{für} \quad \sigma = 1, 2, \ldots, s.$$

Unbeschadet der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß der Knoten k zum Koordinatenanfang gemacht ist:

$$(2) \qquad x_k = 0, \quad y_k = 0,$$

und da von dem Stabe $(k, k-1)$ außer der Neigung auch noch die Länge vorgeschrieben ist und wir weiterhin voraussetzen dürfen, daß dieser Stab nicht zur x-Achse senkrecht steht, so ist uns $x_{k-1} \gtrless 0$ bekannt, sagen wir

$$(3) \qquad x_{k-1} = a.$$

Man dürfte sich sogar diesen Stab auf x gelegen denken, doch wollen wir der Übersichtlichkeit der Formeln zuliebe darauf verzichten.

2. Wir haben jetzt für $2k-3$ unbekannte Koordinaten die s Gleichungen (1), die unter Hervorhebung der bekannten Stücke die Form

$$(4) \qquad y_1 \Gamma_{\sigma,1} \cos\varphi_\sigma + \cdots + y_{k-1} \Gamma_{\sigma,k-1} \cos\varphi_\sigma + x_1 \Gamma_{\sigma,1} \sin\varphi_\sigma + \cdots$$
$$+ x_{k-2} \Gamma_{\sigma,k-2} \sin\varphi_\sigma = -a \Gamma_{\sigma,k-1} \sin\varphi_\sigma$$
$$(\sigma = 1, 2, \ldots, s)$$

annehmen. Sollen die Unbekannten eindeutig bestimmt sein, so muß daher

$$(5) \qquad s = 2k - 3$$

sein, und außerdem darf die Determinante D des Systems nicht verschwinden. Wir schreiben diese Determinante, indem wir ihre σ^{te} Zeile angeben und in doppelte Determinantenstriche fassen:

$$(6) \qquad D = \| \Gamma_{\sigma,1} \cos\varphi_\sigma, \quad \Gamma_{\sigma,2} \cos\varphi_\sigma, \ldots, \Gamma_{\sigma,k-1} \cos\varphi_\sigma;$$
$$\Gamma_{\sigma,1} \sin\varphi_\sigma, \quad \Gamma_{\sigma,2} \sin\varphi_\sigma, \ldots, \Gamma_{\sigma,k-2} \sin\varphi_\sigma \|$$
$$(\sigma = 1, 2, \ldots, 2k-3).$$

Es soll also

$$D \neq 0 \tag{7}$$

sein.

3. Ehe wir daraus unsere Schlüsse ziehen, muß auch das Spannungsproblem angesetzt werden. Für diesen Zweck ist es am bequemsten, Zugkräfte **stets positiv**, Druckkräfte **stets negativ** zu messen, auch auf demselben Stabe. Um das Gleichgewicht in sämtlichen Knotenpunkten auszudrücken, brauchen wir die Komponenten der Stabkräfte nach den beiden Richtungen der Koordinatenachsen. Der Stab $\mathfrak{S}_\sigma$ möge nach unserer jetzigen Übereinkunft an seinen beiden Enden je die Kraft t_σ haben; $\xi_{\sigma,\alpha}$, $\eta_{\sigma,\alpha}$ seien die beiden Komponenten am Anfangspunkte α, und $\xi_{\sigma,\varepsilon}$, $\eta_{\sigma,\varepsilon}$ die Komponenten am Endpunkte ε des Stabes. Diese entnimmt man aus beistehender Figur 204:

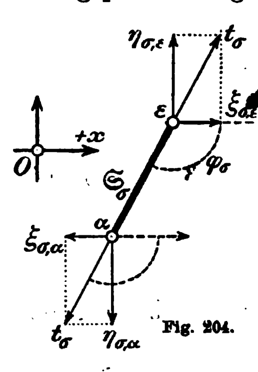


Fig. 204.

Bei Zug (t_σ positiv):

am Stabanfang α:

$$\xi_{\sigma,\alpha} = + t_\sigma \cos\varphi_\sigma = + t_\sigma \Gamma_{\sigma,\alpha} \cos\varphi_\sigma,$$
$$\eta_{\sigma,\alpha} = - t_\sigma \sin\varphi_\sigma = - t_\sigma \Gamma_{\sigma,\alpha} \sin\varphi_\sigma,$$

am Stabende ε:

$$\xi_{\sigma,\varepsilon} = - t_\sigma \cos\varphi_\sigma = + t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varepsilon} \cos\varphi_\sigma,$$
$$\eta_{\sigma,\varepsilon} = + t_\sigma \sin\varphi_\sigma = - t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varepsilon} \sin\varphi_\sigma.$$

Also hat die Zugkraft t_σ des Stabes $\mathfrak{S}_\sigma$ am Knotenpunkte $\varkappa$ die Komponenten

$$\xi_{\sigma,\varkappa} = + t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varkappa} \cos\varphi_\sigma,$$
$$\eta_{\sigma,\varkappa} = - t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varkappa} \sin\varphi_\sigma,$$

und diese Ausdrücke gelten auch, wenn t_σ eine Druckkraft bedeutet, weil dann einerseits die Komponenten ihren Pfeil umkehren müssen, andererseits die Ausdrücke

$$+ t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varkappa} \cos\varphi_\sigma, \quad - t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varkappa} \sin\varphi_\sigma$$

die entgegengesetzten Werte annehmen.

Fig. 205.

Die Angriffskraft $\mathbf{P}_\varkappa$ möge die Neigung $\alpha_\varkappa$ haben, und $\bar{\mathbf{P}}_\varkappa$ sei die umgekehrte Angriffskraft $\mathbf{P}_\varkappa$. Nach beistehender Figur 205 ist

die x-Komponente von $\bar{\mathbf{P}}_\varkappa$ gleich $- P_\varkappa \cos\alpha_\varkappa$,
" y- " " $\bar{\mathbf{P}}_\varkappa$ " $+ P_\varkappa \sin\alpha_\varkappa$,

wenn $P_\varkappa$ die absolute Größe von $\mathbf{P}_\varkappa$ bedeutet.

4. Am Knoten $\varkappa$ ist Gleichgewicht zwischen $\overline{P}_\varkappa$ und den Stabkräften dieses Knotens, und folglich sowohl zwischen den x-Komponenten dieser Kräfte, als auch zwischen den y-Komponenten:

$$\sum_\sigma t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varkappa} \cos\varphi_\sigma - P_\varkappa \cos\alpha_\varkappa = 0,$$

$$-\sum_\sigma t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varkappa} \sin\varphi_\sigma + P_\varkappa \sin\alpha_\varkappa = 0.$$

Die hinreichenden und notwendigen Bedingungen des Gleichgewichts an den Knoten sind also:

$$\sum_\sigma t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varkappa} \cos\varphi_\sigma = P_\varkappa \cos\alpha_\varkappa, \tag{8}$$

$$\sum_\sigma t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varkappa} \sin\varphi_\sigma = P_\varkappa \sin\alpha_\varkappa, \tag{9}$$

$$\varkappa = 1, 2, \ldots, k; \; \sigma = 1, 2, \ldots, s.$$

5. Das Gleichgewicht der Angriffskräfte für sich wird gesichert durch die Gleichungen

$$\sum_\varkappa P_\varkappa \cos\alpha_\varkappa = 0, \quad \sum_\varkappa P_\varkappa \sin\alpha_\varkappa = 0, \tag{10}$$

und eine weitere Gleichung, die das Verschwinden der Momentensumme dieser Kräfte für irgendeinen Drehpunkt C ausdrückt; die orientierten Hebelarme der Komponenten $-P_\varkappa \cos\alpha_\varkappa$, $+P_\varkappa \sin\alpha_\varkappa$ von $\overline{P}_\varkappa$ am Drehpunkte C seien $m_\varkappa$, $n_\varkappa$. Dann lautet die Momentengleichung

$$\sum_\varkappa m_\varkappa P_\varkappa \cos\alpha_\varkappa + \sum_\varkappa n_\varkappa P_\varkappa \sin\alpha_\varkappa = 0. \tag{11}$$

Wegen (10) ist eine der k Gleichungen (8) von den anderen abhängig und kann daher gestrichen werden; wir streichen die letzte, dem Werte $\varkappa = k$ entsprechende; ebenso in (9). Drückt man in (11) die Glieder $P_k \cos\alpha_k$, $P_k \sin\alpha_k$ nach (10) durch $P_1, \ldots, P_{k-1}$ aus, so zeigt sich, daß nach der vorgenommenen Streichung immer noch eine von den rechten Seiten des Systems (8), (9) durch die anderen ausdrückbar ist; es muß also noch eine Gleichung weggelassen werden. Hat man den Drehpunkt der Momente nicht auf einer der $2k$ Komponenten der Kräfte $\overline{P}_\varkappa$ angenommen, so ist keines der $m_\varkappa$ und $n_\varkappa$ gleich null, und man darf dann eine beliebige der Gleichungen unterdrücken, also etwa die dem Werte $\varkappa = k-1$ entsprechende Gleichung des Systems (9).

6. Zur Bestimmung der s Stabkräfte t_σ liegen demnach die $2k-3$ Gleichungen

$$(12)\quad \begin{aligned} \sum_\sigma t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varkappa} \cos\varphi_\sigma &= P_\varkappa \cos\alpha_\varkappa, \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, k-1, \\ \sum_\sigma t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varkappa} \sin\varphi_\sigma &= P_\varkappa \sin\alpha_\varkappa, \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, k-2 \end{aligned}$$

vor. Es folgt:

Die Stabkräfte sind nur dann eindeutig bestimmbar, und das Fachwerk ist nur dann statisch bestimmt, wenn die Zahl der Stäbe gleich $2k-3$ ist und die Determinante des Systems (12) nicht verschwindet.

Diese Determinante ist aber mit der in (6) angegebenen identisch[1]),

denn nach (12) deckt sich ihre σ^{te} Spalte:

$$\Gamma_{\sigma,1}\cos\varphi_\sigma,\ \Gamma_{\sigma,2}\cos\varphi_\sigma,\ \ldots,\ \Gamma_{\sigma,k-1}\cos\varphi_\sigma;$$
$$\Gamma_{\sigma,1}\sin\varphi_\sigma,\ \Gamma_{\sigma,2}\sin\varphi_\sigma,\ \ldots,\ \Gamma_{\sigma,k-2}\sin\varphi_\sigma$$

mit der σ^{ten} Zeile von D.

Diese Übereinstimmung besagt aber:

Ein Fachwerk ist nur dann statisch bestimmt, wenn es durch die Gliederung und Richtung seiner Stäbe und die damit verträgliche Annahme zweier Knotenpunkte als geometrische Figur eindeutig bestimmt ist.

Wenn zwischen der Zahl s der Stäbe und der Zahl k der Knoten die Beziehung $s = 2k-3$ besteht, so ist $D \neq 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung für die geometrische Bestimmtheit, d. h.:

Das Verschwinden der Determinante D ist charakteristisch für den sogenannten Grenzfall, in dem das Fachwerk singulär wird.

Daß die geometrische Bestimmtheit durch Gliederung, Neigungswinkel und Fixierung zweier Knoten, oder, was dasselbe sagen will, die Unmöglichkeit isokliner nicht ähnlicher Fachwerke eine notwendige Bedingung für die statische Bestimmtheit ist, haben wir schon auf anderem Wege eingesehen. Jetzt erfahren wir, daß diese Bedingung auch hinreichend ist.

§ 41. Stabilität.

1. Um das Spannungsproblem vollständig zu lösen, sind einige einfache Betrachtungen infinitesimaler Natur nötig, die sich nun nicht länger mehr hinausschieben lassen. Es gilt, den Begriff der Stabilität,

1) Der Satz ist zuerst von A. Föppl (1880) bewiesen worden.

den wir nur vorläufig erklärt hatten, schärfer zu erfassen. Stabil sollte ein Fachwerk heißen, wenn es in sich unbeweglich ist; wir haben inzwischen gesehen, daß außer der gewöhnlichen, sinnenfälligen Beweglichkeit noch eine schwerer zu beschreibende minimale Beweglichkeit möglich ist, die am Fachwerk Figur 202 jedenfalls leichter ist, als wenn dasselbe ein richtiges Dreieck wäre. Das sagt uns unser statisches Gefühl. Dafür soll nun ein zutreffender mathematischer Ausdruck gefunden werden.

Es handelte sich in Figur 202 um ein ausgeartetes Dreieck ABC, dessen Spitze B auf der Basis liegt; wenn das ganze System in der angegebenen Weise etwa aus Eisenstäben mit drei Gelenken A, B, C hergestellt ist, wird es ein Leichtes sein, durch Druck auf das Mittelgelenk B dieses aus der Geraden AC um eine Strecke h heraus in eine Lage B' zu drängen (Fig. 206), wobei der Stab AC etwas zusammengedrückt und auf die Strecke $A'C'$ reduziert wird, die sich von $AC = 2e$ um den allerdings außerordentlich kleinen Betrag ε unterscheidet.

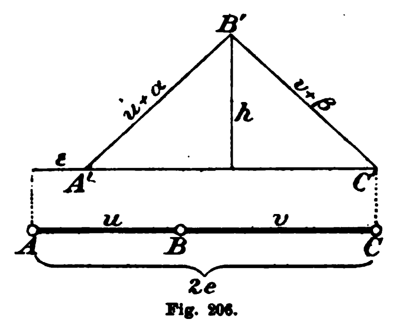


Fig. 206.

Die Stäbe $AB = u$ und $BC = v$ erfahren eine noch unbedeutendere Streckung α und β. Es ist also

$$u + v = 2e, \tag{1}$$

und nach dem Pythagoreischen Lehrsatze:

$$\varepsilon = 2e - \sqrt{(u+\alpha)^2 - h^2} - \sqrt{(v+\beta)^2 - h^2},$$

$$= 2e - (u+\alpha)\sqrt{1 - \frac{h^2}{(u+\alpha)^2}} - (v+\beta)\sqrt{1 - \frac{h^2}{(v+\beta)^2}}.$$

Da schon h gegen u und v sehr klein ist, gilt das in erhöhtem Maße von $h^2/(u+\alpha)^2$ und $h^2/(v+\beta)^2$; man darf sich daher, unter x einen dieser beiden Ausdrücke verstehend, in der Entwicklung $(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - x/2 - x^2/8 + \cdots$, auf die beiden Anfangsglieder beschränken und findet nach einfacher Rechnung:

$$\varepsilon = -(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}h^2\left(\frac{1}{u+\alpha} + \frac{1}{v+\beta}\right)$$

$$= -(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}h^2\left(\frac{1}{u}\left(1 - \frac{\alpha}{u} + \cdots\right) + \frac{1}{v}\left(1 - \frac{\beta}{v} + \cdots\right)\right),$$

also

$$\varepsilon + \alpha + \beta = \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right) - \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\alpha}{u^2} + \frac{\beta}{v^2}\right) + \cdots$$
$$= h^2 \frac{e}{uv} - \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\alpha}{u^2} + \frac{\beta}{v^2}\right) + \cdots .$$

Hier sind gegen das erste Glied rechts alle folgenden Glieder so klein, daß sie nicht in Betracht kommen; daher ist mit der allergrößten Annäherung:

$$\varepsilon + \alpha + \beta = \frac{h^2 e}{uv}. \tag{2}$$

Bezeichnen wir die Summe der drei positiven Zahlen α, β, ε mit $\varDelta$, so ist

$$\varDelta = \frac{h^2 e}{uv} \tag{3}$$

größer als α, β, ε einzeln genommen. $\varDelta$ ist aber nach dieser Formel im Vergleich zu der ebenfalls kleinen Strecke h so außerordentlich geringfügig, daß das Verhältnis $\varDelta : h$ mit abnehmendem h verschwindet, und $\varDelta : h^2$ dem Grenzwerte e/uv zustrebt. Wenn man h im Vergleich zu den Stablängen als (unendlich) klein von der ersten Ordnung bezeichnet, indem das Verhältnis von h zu einer Stablänge von Null nur wenig verschieden ist, so muß $\varDelta$ im Verhältnis zu h ebenfalls klein von der ersten Ordnung genannt werden, und mit den Stablängen verglichen heißt $\varDelta$ unendlich klein von der zweiten Ordnung. Das gilt also auch von α, β, ε.

2. Wir können jetzt sagen: Das spezielle Fachwerk Fig. 202 gestattet bei festgehaltenem Stabe AC von der ersten Ordnung unendlich kleine Bewegung des Knotenpunktes B, die nur von der zweiten Ordnung unendlich kleine Veränderungen der Stablängen bedingen.

Etwas Ähnliches findet bei dem Fachwerk Fig. 192 statt, das in dem Spezialfalle Fig. 198 endliche Bewegung eines Teiles gegen den anderen zuläßt: Wenn man das Dreieck 346 festhält, kann man 125 so verschieben, daß die Stäbe, die dieses Dreieck mit dem anderen verbinden, im Verhältnis zu jener kleinen Verschiebung selbst wieder unendlich kleine Längenänderungen erleiden. Ganz allgemein möge eine Verschiebung eines Knotens gegen einen festgehaltenen Teil des Fachwerks infinitesimal genannt werden, wenn sie gegen die Stablängen gehalten verschwindend klein ist und wenn die sie ermöglichenden Längenänderungen der Stäbe gegen die Verschiebungsstrecke selber wieder unendlich klein, gegen die Stablängen also unendlich klein von der zweiten Ordnung sind.

3. Stabil soll jetzt ein Fachwerk heißen, wenn es weder endliche, noch infinitesimale Bewegungen von Knotenpunkten gegen festgehaltene andere gestattet. Zu den nicht stabilen oder instabilen



Fachwerken gehören die beweglichen mit endlicher Verschiebung eines Teiles gegen den anderen und die singulären. Daß Fachwerke mit endlicher Beweglichkeit nicht jedes Spannungsproblem zu lösen gestatten, hatten wir in § 38, 5. aus der Erfahrung entnommen. Es läßt sich aber auch rein statisch begründen, was wir jetzt nachholen wollen, weil dieser Beweis der Schlüssel für das Verständnis alles folgenden ist.

4. Zwei gleichsinnig kongruente Dreiecke ABC und $A'B'C'$, die in einer Ebene zueinander ähnlich liegen, können durch eine Parallelverschiebung des einen zur Deckung gebracht werden. Die Ecken bewegen sich auf den drei parallelen Geraden AA', BB', CC'. Im Falle nicht ähnlicher Lage dagegen existiert ein Drehzentrum O, derart, daß $A'B'C'$ durch Drehung um O mit ABC zusammenfällt. O ist der Schnittpunkt der Mittellote von AA', BB' (und CC'), denn für den so definierten Punkt ist $OA = OA'$, $OB = OB'$, $OC = OC'$.

Denken wir nun das Dreieck ABC durch eine kontinuierliche Bewegung in die Endlage $A'B'C'$ übergeführt und diesen Vorgang, wie beim Kinematographen, in einer großen Reihe von Zwischenstadien momentan festgehalten, so kann nach dem Vorangehenden der Übergang von jeder dieser Lagen des Dreiecks in die nächstfolgende als Parallelverschiebung oder als Drehung aufgefaßt werden. Ist die Gesamtbewegung nicht eine fortwährende Parallelverschiebung oder Drehung um einen festen Punkt, so werden Parallelverschiebungen und Drehungen wechseln können und die Drehungen fortgesetzt ihr momentanes Zentrum ändern, d. h. das Zentrum ihrer augenblicklichen Bewegung.

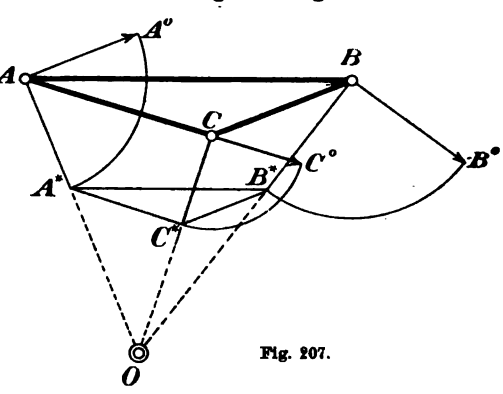


Fig. 207.

5. Bei der Drehung des Dreiecks ABC (in seiner Ebene) um den Punkt O beschreibt jeder Punkt einen Kreis um O. Im selben Zeitpunkte verhalten sich die Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte wie ihre Abstände von O. Diese Bemerkung kann dazu verwendet werden, aus der Geschwindigkeit eines Punktes die jedes anderen zu konstruieren. Sei etwa die von A durch die Strecke AA^0 gegeben (Fig. 207); diese muß natürlich den Kreis um O mit OA als Radius in A berühren, also auf OA senkrecht stehen, also allgemein:

Die Geschwindigkeit eines bewegten Punktes steht senkrecht auf seiner Verbindungslinie mit dem momentanen Drehzentrum.

Dreht man nun die Strecken AA^0, BB^0, CC^0, welche die Geschwindigkeiten von A, B, C darstellen, um A, B, C im Uhrzeigersinne um 90° weiter, so fällt A^0 auf AO in die Lage A^*, B^0 auf BO in die Lage B^*, C^0 auf CO in die Lage C^*, und es ist, da $AA^* : BB^* : CC^* = OA : OB : OC$ sein soll, $A^*B^* \parallel AB$, $B^*C^* \parallel BC$, $C^*A^* \parallel CA$. Aus dem bekannten A^* sind daher B^*, C^* durch Ziehen von Parallelen leicht ableitbar. Das Dreieck $A^*B^*C^*$ ist zu ABC ähnlich und ähnlich gelegen.

6. Da sich die um 90° weiter gedrehten Geschwindigkeiten AA^*, BB^*, CC^*, wie man sieht, zur unmittelbaren konstruktiven Verwendung besser eignen als die wirklichen, so ist es nach dem Vorgang von J. Schadwill[1]) üblich geworden, statt der wirklichen Geschwindigkeit AA^0 eines Punktes A seine durch einen rechten Winkel im Uhrzeigersinne um A gedrehte „normale" Geschwindigkeit AA^* als bestimmendes Element der Bewegung zu betrachten. Die Wahl dieses Drehsinnes ist natürlich eine Sache der Übereinkunft. A^* heißt der Geschwindigkeitspol von A in dem Momente der Bewegung, den wir gerade betrachten; die Gerade AA^* geht durch das momentane Zentrum der Drehung. Der Inbegriff der Geschwindigkeitspole aller Punkte eines bewegten Systems heißt sein momentaner Geschwindigkeitsplan.

In Fig. 207 ist das Dreieck $A^*B^*C^*$ der Geschwindigkeitsplan von ABC im Momente der Drehung um O. Ist PQ irgend eine Strecke der Ebene, die, mit ABC starr verbunden, an der Drehung teilnimmt, so ist, da die momentanen Geschwindigkeiten von P und Q den Abständen von O proportional sind, $OP^* : OP = OQ^* : OQ$, also auch $P^*Q^* \parallel PQ$, und wenn R irgend ein Punkt der Geraden PQ ist und OR die Gerade P^*Q^* in R^* trifft, so ist ebenfalls wegen der Proportionalität der Geschwindigkeit zu den Abständen von O auch R^* der Geschwindigkeitspol von R.

Satz 1. Die Geschwindigkeitspole einer starren Strecke s erfüllen daher eine dazu parallele Strecke s^*, und die Beziehung zwischen den Punkten von s zu ihren Geschwindigkeitspolen auf s^* ist eine Ähnlichkeit mit O als Ähnlichkeitspunkt.

Das bleibt auch noch richtig, wenn es sich nicht um eine Drehung, sondern um Parallelverschiebung handelt, vorausgesetzt, daß

1) J. Schadwill, Das Gliedervierseit als Grundlage der Kinematik, Verh. d. Ver. z. Beförd. des Gewerbefl. 55 (1876), S. 407.

man sich den Drehpol senkrecht zur Verschiebungsrichtung im Unendlichen denkt. Auch die Geschwindigkeiten bei Parallelverschiebung werden, um einen rechten Winkel im Uhrzeigersinne gedreht, als normale Geschwindigkeiten bezeichnet, sie sind also sämtlich zueinander parallel, und die Strecken s, s^* des Satzes 1 sind zueinander kongruent. Nach dieser Auffassung erscheint die Parallelverschiebung als ein besonderer Fall der Drehung, was wir nun nicht weiter hervorheben werden.

7. Unter einem geometrisch starren (ebenen) System verstehen wir eine Gesamtheit von Punkten einer Ebene, deren gegenseitige Abstände (während einer Bewegung des Systems) unveränderlich sind. Das System kann aus einzelnen Punkten oder kontinuierlichen Punktmengen, wie Linien oder Flächenstücken, bestehen. Auch ist nicht gesagt, daß ein während eines Bewegungsvorganges geometrisch starres System auch in dem Sinne starr sein müsse, daß eine Beweglichkeit eines seiner Teile nach Fixierung zweier Punkte des Systems ausgeschlossen wäre. Nach Satz 1 können wir dann feststellen:

Satz 2. Der Geschwindigkeitsplan eines in seiner Ebene irgendwie bewegten geometrisch starren Systems ist in jedem Momente der Bewegung dem System ähnlich und zu ihm ähnlich gelegen bezüglich des momentanen Drehzentrums als Ähnlichkeitspunkt.

Durch Angabe oder Annahme der Geschwindigkeitspole P^*, Q^* zweier Punkte P, Q des Systems in einem Momente der Bewegung sind die gleichzeitigen Geschwindigkeitspole der übrigen Punkte vollkommen bestimmt. Wenn nämlich die Strecken PP^*, QQ^* auf verschiedenen Geraden liegen, so ist ihr Schnittpunkt O der Ähnlichkeitspunkt in der Ähnlichkeitsbeziehung des Satzes 2, und durch diese Ähnlichkeit ist der Geschwindigkeitsplan eindeutig bestimmt; wenn PP^*, QQ^* auf derselben Geraden g liegen, so drehe man einfach PP^* um P, QQ^* um Q im positiven Sinne durch 90^0 in die Lagen PP^0, QQ^0 zurück, dann treffen sich PQ und P^0Q^0 im Drehzentrum O, weil die Abstände OP, OQ zu den Geschwindigkeiten proportional sind. In dem ganz speziellen Falle schließlich, daß eine der Geschwindigkeiten PP^*, QQ^* verschwindet, etwa QQ^*, ist Q selber das Drehzentrum und es muß PP^0 durch Q gehen, woraus zu entnehmen ist, daß die Richtungen PP^*, QQ^* nicht immer beliebig gewählt werden können, wenn ihnen eine mögliche Bewegung des Systems entsprechen soll.

8. Der Satz 2 ist folgendermaßen umkehrbar:

Satz 3. Wenn der Geschwindigkeitsplan in einem bestimmten Augenblicke der Bewegung dem Systeme ähnlich ist und dazu ähnlich liegt, so ist das System im Augenblick der Bewegung geometrisch starr;

denn wenn auch nur ein Punkt C des Systems seine relative Lage zu zwei anderen Punkten A und B desselben ändert, so kann $A^* B^* C^*$ nicht mehr zu ABC ähnlich liegen und ähnlich sein, weil sonst die Geschwindigkeiten von A, B, C zu den Abständen vom Drehzentrum proportional, die Bewegung also die eines geometrisch starren Systems wäre.

Die Sätze 2 und 3 werden uns ein einfaches Kennzeichen der Beweglichkeit eines Fachwerks in sich abgeben. Bei einer Bewegung nämlich, die die gegenseitigen Abstände der Knotenpunkte ändert, kann im Momente dieser Änderung nach Satz 3 der Geschwindigkeitsplan dem Fachwerk nicht ähnlich sein und zugleich dazu ähnlich liegen. Nach Satz 1 liegen aber wenigstens die Geschwindigkeitspole der Punkte jedes Stabes[1]) auf einer zum Stab parallelen Strecke, und zwischen den Punkten des Stabes und ihren Polen besteht Ähnlichkeit mit dem momentanen Drehzentrum des Stabes als Ähnlichkeitspunkt. Es gibt jetzt also kein einheitliches Drehzentrum mehr, und die **Figur der Geschwindigkeitspole ist offensichtlich nur ein zu dem gegebenen Fachwerk isoklines, aber nicht ähnliches Fachwerk.**

9. Diese Wendung ist entscheidend. Sie gilt nämlich auch bei infinitesimalen Bewegungen des Fachwerks. Da in Fig. 206 im Vergleich zu h die Strecke ε unendlich klein ist, so wird auch die Geschwindigkeit, mit der A nach A' geht, im Vergleich zu der Geschwindigkeit, mit der B nach B' ausweicht, unendlich klein sein, so daß sie graphisch nicht in Betracht kommt. Die Fig. 208 gibt daher die tatsächlichen Verhältnisse besser wieder, indem sie den Punkt A an seiner Stelle läßt; BB^0 sei die wirkliche Geschwindigkeit, mit der wir B aus der Geraden AC herausdrängen; $BB^* = BB^0$ fällt auf AB selber; A^* ist mit A, C^* mit C identisch, falls man den Stab AB ruhend denkt. Daher ist $A^* B^* C^*$ zwar zu ABC isoklin, aber nicht ähnlich. Und so allgemein. Die Stabänderungen, die eine infinitesimale Bewegung ermöglichen, erfolgen im Vergleich zu der Geschwindigkeit dieser Bewegungen so langsam, daß sie nicht in Betracht kommen, und die Veränderungen sind gegen die Bewegung der Knoten gehalten

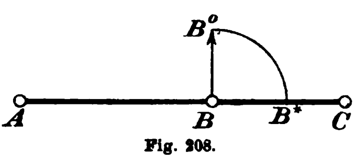


Fig. 208.

1) Die Stäbe selbst werden ja als (geometrisch) starr vorausgesetzt.

so klein, daß die Stablängen als unveränderlich angesehen werden können. Die infinitesimale Beweglichkeit eines Knotens R bei Fixierung zweier Knoten P und Q ist also dadurch charakterisiert, daß ihm eine **Geschwindigkeit** zukommen kann, während P und Q bewegungslos sind. Die Figur der Geschwindigkeitspole des Dreiecks PQR ist daher ein isoklines, aber nicht ähnliches Dreieck.

Nach Art. 3 sollte ein Fachwerk stabil heißen, wenn es keine endlichen oder infinitesimalen Bewegungen in sich zuläßt. Jetzt sehen wir:

Satz 4. Ein Fachwerk ist stabil oder instabil, je nachdem die isoklinen Fachwerke ihm ähnlich sind oder nicht.

Denn sind sie nicht ähnlich, so sind Geschwindigkeitspläne ausgeschlossen, die einer deformierenden Bewegung entsprechen, und im Falle der Ähnlichkeit befindet sich das isokline Fachwerk zum ursprünglichen in ähnlicher Lage, der Ähnlichkeitspunkt ist also das Zentrum einer Drehung des geometrisch starr bleibenden Fachwerks. Das ist der Fundamentalsatz von F. Schur, der uns jetzt in viel hellerem Lichte erscheint als in § 39, 3.

In Fig. 200 kann jetzt $123'4'5'6'$ als Geschwindigkeitsplan des Fachwerks 123456 betrachtet werden: Obgleich der Stab 12 fest bleibt, ist eine Bewegung mit den normalen Geschwindigkeiten $33'$, $44'$, $55'$, $66'$ möglich, aus denen die wirklichen durch positive Drehung um einen rechten Winkel hervorgehen. Dieses Fachwerk ist also instabil, und zwar singulär, da es keine endlichen, also nur infinitesimale Bewegungen in sich gestattet.

§ 42. Geschwindigkeitspläne.

1. Von zwei Bewegungen eines Fachwerkstabes AB seien die beiden Geschwindigkeitspläne Φ_1 und Φ_2 gegeben. Das sind einfach zwei zu AB parallele Strecken A_1B_1 und A_2B_2. Wir wollen nun die durch Φ_1 und Φ_2 bildlich dargestellten Bewegungen zusammensetzen, d. h. zu einer dritten Bewegung vereinigen, deren Geschwindigkeiten sich aus denen der Figur 209 durch das Parallelogramm der Geschwindigkeiten ergeben. Wenn man aber aus den normalen Geschwindigkeiten AA_1 und AA_2 die wirklichen ableitet und durch ein Par-

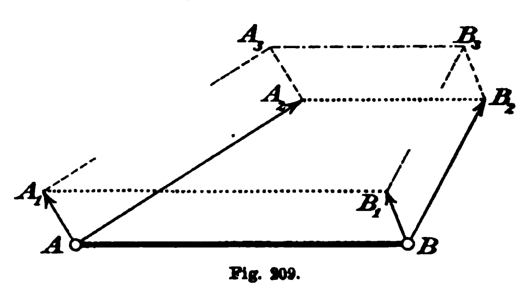


Fig. 209.

allelogramm zu einer Resultante vereinigt, so geht dieses Parallelogramm durch rechtwinklige Drehung im Uhrzeigersinne um A in ein Parallelogramm $AA_1A_3A_2$ über, das man aus A, A_1, A_2 unmittelbar, ohne Vermittelung der wirklichen Geschwindigkeiten, konstruieren kann. Die Diagonale AA_3 stellt also unmittelbar die aus den normalen Geschwindigkeiten AA_1 und AA_2 resultierende normale Geschwindigkeit dar. Verfährt man so auch am Knotenpunkte B, indem man das Parallelogramm $BB_1B_3B_2$ anlegt, das, wie das Parallelogramm der Kräfte, auch in einen Streckenzug einer Geraden ausarten kann, so ist BB_3 die aus BB_1 und BB_2 resultierende normale Geschwindigkeit, also A_3B_3 nach Satz 1, § 41 der Geschwindigkeitsplan der Punkte von AB; diese Strecke muß nach Satz 1 zu AB parallel sein, was sich an Figur 209 auch durch eine einfache planimetrische Betrachtung bestätigen läßt.

Sind jetzt Φ_1 und Φ_2 die Geschwindigkeitspläne zweier Bewegungen eines Fachwerks Φ, von dem AB ein Stab sei, so denken wir uns nach dem angegebenen Verfahren die beiden Geschwindigkeiten jedes Knotenpunktes zusammengesetzt; es entsteht so der aus Φ_1 und Φ_2 zusammengesetzte Geschwindigkeitsplan $\Phi_3 = \Phi_1 + \Phi_2$, der ein zu Φ isoklines Fachwerk bildet.

2. Von zwei isoklinen Fachwerken $F = ABC \ldots UV \ldots Z$ und $F_1 = A_1B_1C_1 \ldots U_1V_1 \ldots Z_1$ ausgehend teilen wir die Strecken AA_1, BB_1, ..., ZZ_1 durch die Punkte A', B', ..., Z' in demselben übrigens beliebigen Verhältnisse; falls eine solche Strecke verschwindet, verschwinden auch die Teilstrecken. Die Teilpunkte bestimmen dann ein zu F und F_1 isoklines Fachwerk $F' = A'B'C' \ldots U'V' \ldots Z'$. Den unendlich vielen Werten des Teilverhältnisses entsprechend gibt es unendlich viele Fachwerke F', deren Inbegriff die von F und F_1 bestimmte Schar (F, F_1) genannt wird. Die zu einem Knotenpunkte X von F homologen Ecken X', X'', ... an den Fachwerken F', F'', ... der Schar sind entweder sämtlich mit X identisch, wenn auch X_1 mit X zusammenfällt[1]), oder sie liegen, falls die Strecke XX_1 von Null verschieden ist, auf der Leitlinie XX_1. Durch Annahme eines solchen Knotenpunktes X' auf seiner Leitlinie ist das Teilverhältnis $XX' : X_1X'$ und damit das ganze Fachwerk F' bestimmt.

Je zwei verschiedene Fachwerke der Schar (F, F_1) erzeugen ebenfalls die Schar.

3. Eine mit Gestaltänderung verbundene endliche oder infinitesimale Bewegung eines instabilen Fachwerks Φ nach einem Geschwindigkeitsplane Φ_1 läßt sich zusammensetzen:

1) Mit X_1 bezeichnen wir den zu X homologen Knotenpunkt von F_1.

1) aus einer Bewegung nach einem Geschwindigkeitsplane $\varphi_1(XY)$, bei der ein beliebiger Stab XY des Fachwerks in Ruhe bleibt und mindestens ein Knotenpunkt seine Lage zu diesem Stabe ändert, und

2) aus einer Gesamtbewegung des Fachwerks nach einem Geschwindigkeitsplane $\psi_1(XY)$, bei der es geometrisch starr bleibt;

Φ_1 ist der aus $\varphi_1(XY)$ und $\psi_1(XY)$ zusammengesetzte Geschwindigkeitsplan

$$\Phi_1 = \varphi_1(XY) + \psi_1(XY).$$

Unter **Reduktion eines Geschwindigkeitsplanes** Φ_1 **auf einen Stab** XY verstehen wir die Konstruktion von $\varphi_1(XY)$, und $\varphi_1(XY)$ heiße **der auf den Stab** XY **reduzierte Plan** Φ_1. Bezeichnet allgemein $\overline{\psi}$ den Geschwindigkeitsplan, dessen Geschwindigkeiten denen eines Planes ψ sämtlich entgegengesetzt gleich sind, so daß die Zusammensetzung von ψ und $\overline{\psi}$ für jeden Punkt des bewegten Systems die Geschwindigkeit Null ergibt, so ist

$$\Phi_1 + \overline{\psi}_1(XY) = \varphi_1(XY) + \psi_1(XY) + \overline{\psi}_1(XY) = \varphi_1(XY),$$

und es wird zur Konstruktion von $\varphi_1(XY)$ darauf ankommen, $\overline{\psi}_1(XY)$ zu finden. Das ist sehr leicht: Φ_1 möge den Punkten X und Y die normalen Geschwindigkeiten XX_1, YY_1 erteilen (Fig. 210); $\overline{\psi}_1(XY)$ muß diese rückgängig machen und folglich den Punkten X, Y auf den Geraden XX_1, YY_1 die Geschwindigkeitspole $\overline{X}$, $\overline{Y}$ so zuordnen, daß X in der Mitte von X_1 und $\overline{X}$, Y in der Mitte von Y_1 und $\overline{Y}$ liegt. Da nach dem Plane $\overline{\psi}_1(XY)$ das Fachwerk sich als geometrisch starres System bewegen soll, so ist $\overline{\psi}_1(XY)$ durch die Punkte $\overline{X}$, $\overline{Y}$ nach Satz 2, § 41 eindeutig bestimmt als ein zu Φ_1 ähnliches und ähnlich gelegenes Fachwerk mit dem Schnittpunkte O von XX_1 und YY_1 (der auch im Unendlichen liegen darf) als Ähnlichkeitspunkt; falls XX_1 und YY_1 auf XY selber liegen, ist O nach § 41, 7 zu bestimmen. Um im Plane $\psi_1(XY)$ etwa zu den Knotenpunkten U, V eines Stabes UV die Geschwindigkeitspole $\overline{U}$, $\overline{V}$ zu finden (Fig. 210), ziehe man

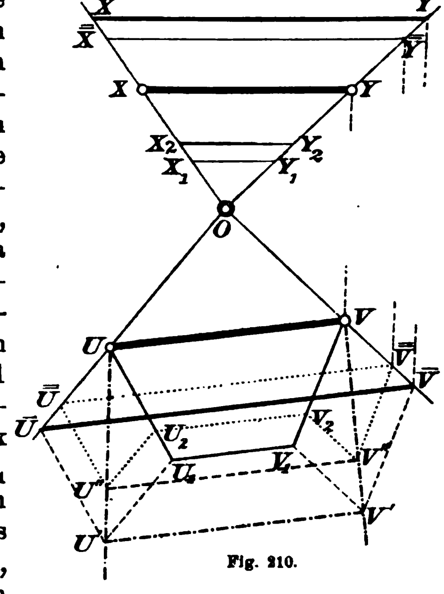


Fig. 210.

daher etwa durch $\overline{Y}$ die Parallele zu YV und bringe sie mit OV zum Schnitt; durch den Schnittpunkt $\overline{V}$ ziehe man die Parallele zu UV, die von OU in $\overline{U}$ getroffen wird. Damit ist $\overline{\psi}_1(XY)$ bestimmt; jetzt ist nur noch Φ_1 mit $\overline{\psi}_1(XY)$ nach Art. 1 und Figur 209 zusammenzusetzen. Dann erhält man den gesuchten Geschwindigkeitsplan $\varphi_1(XY)$, demzufolge den Punkten U und V die Geschwindigkeitspole U', V' zukommen mögen; es ist $U'V' \parallel UV$.

4. In der Schar (Φ, Φ_1) nehmen wir einen zweiten Geschwindigkeitsplan Φ_2 an, der den Punkten X, Y, U, V die Pole X_2, Y_2, U_2, V_2 zuordnen möge (Fig. 210). Nach 2. ist

$$(1) \qquad UU_2 : U_2U_1 = VV_2 : V_2V_1 = XX_2 : X_2X_1 = YY_2 : Y_2Y_1,$$

und zwar liegen X_2, Y_2, U_2, V_2 auf den Leitlinien XX_1, YY_1, UU_1, VV_1, insoweit diese bestimmt sind. Wir zerlegen auch Φ_2 in zwei Komponenten $\varphi_2(XY)$ und $\psi_2(XY)$, von denen $\varphi_2(XY)$ einer Bewegung bei festgehaltenem Stabe XY, und $\psi_2(XY)$ einer Bewegung des ganzen starr gehaltenen Fachwerkes entspricht. Auch $\overline{\psi}_2(XY)$ ist ein zu Φ ähnliches und ähnlich gelegenes Fachwerk mit O als Ähnlichkeitspunkt, das durch die Punkte $\overline{\overline{X}}, \overline{\overline{Y}}$, die auf OX und OY in den Abständen $X\overline{\overline{X}} = X\overline{X}$, $Y\overline{\overline{Y}} = Y\overline{Y}$ liegen, eindeutig bestimmt ist; $\overline{\overline{U}}, \overline{\overline{V}}$ seien in $\overline{\psi}_2(XY)$ die Geschwindigkeitspole von U, V, woraus

$$(2) \qquad U\overline{\overline{U}} : \overline{\overline{U}}\overline{U} = V\overline{\overline{V}} : \overline{\overline{V}}\overline{V} = X\overline{\overline{X}} : \overline{\overline{X}}\overline{X} = Y\overline{\overline{Y}} : \overline{\overline{Y}}\overline{Y} = YY_2 : Y_2Y_1$$

folgt. Aus (1) und (2) ergibt sich, daß das zur Konstruktion des aus U_2 und $\overline{\overline{U}}$ resultierenden Geschwindigkeitspols U'' erforderliche Parallelogramm $UU_2U''\overline{\overline{U}}$ zu $UU_1U'\overline{U}$ ähnlich ist; also liegt U'' auf UU', und ebenso V'' auf VV', wenn V' den Pol der aus VV_2 und $V\overline{\overline{V}}$ zusammengesetzten Bewegung bedeutet. Daher ist $\varphi_2(XY)$ ein zu Φ isoklines Fachwerk, dessen Knotenpunkte U'', V'' auf den Leitlinien UU', VV' liegen; $U'V'$ sind die Drehpole von U, V nach dem Plane $\varphi_1(XY)$, und da UV jeder beliebige Stab des Fachwerks Φ sein kann, so heißt das: $\varphi_2(XY)$ gehört der von Φ und $\varphi_1(XY)$ erzeugten Schar an. Da Φ_2 der Schar (Φ, Φ_1) angehört, so folgt:

Satz 1. Reduziert man eine Schar (Φ, Φ_1) von Geschwindigkeitsplänen eines Fachwerks Φ auf denselben Stab XY, so erhält man wiederum eine Schar.

5. Mit Hilfe dieses Satzes beweist man leicht den von F. Schur[1]) gefundenen

1) l. c., § 1, 5.

Satz 2. Wird ein stabiles Fachwerk bei Entfernung eines Stabes instabil, so bilden die bei Festhaltung irgend eines Stabes des instabilen Fachwerks möglichen Geschwindigkeitspläne eine einzige Schar.

Zunächst leuchtet nach Satz 1 ein, daß es gleichgültig ist, welchen Stab des instabilen Fachwerks Φ man festhält: Eine bei Fixierung des Stabes XY mögliche Schar von Geschwindigkeitsplänen geht durch Reduktion auf den Stab UV in eine Schar von Geschwindigkeitsplänen über, die bei festgehaltenem Stabe UV eintreten können, und umgekehrt. Wir dürfen daher zur Erleichterung des Beweises den festzuhaltenden Stab AB so wählen, daß er mit dem aus dem ursprünglichen Fachwerk F entfernten Stabe AC den Knotenpunkt A gemeinsam hat; da das so entstandene Fachwerk Φ instabil sein soll, so muß es bei Festhaltung von AB noch eine Bewegung gestatten, deren Geschwindigkeitsplan

$$\Phi_1 = ABC_1 \ldots U_1 V_1 \ldots Z_1$$

zu Φ isoklin ist, ohne mit Φ identisch zu sein, und durch Einführung des Stabes AC_1 nicht zu F selber isoklin wird, denn sonst wäre F gegen die Voraussetzung instabil; daher liegt C_1 nicht auf AC.

Die Fachwerke Φ und Φ_1 erzeugen eine Schar (Φ, Φ_1) von Fachwerken, die den Stab AB gemeinschaftlich haben und daher einer bei Festhaltung von AB möglichen Bewegung als Geschwindigkeitspläne dienen können. Es kommt nun beim Beweise des Satzes 2 darauf an, zu zeigen, daß es außerhalb dieser Schar (Φ, Φ_1) kein zu Φ isoklines Fachwerk

$$\Phi_2 = ABC_2 \ldots U_2 V_2 \ldots Z_2$$

gibt, das mit Φ den Stab AB gemein hat. Das läßt sich in der Tat durch Scheidung zweier Fälle leicht nachweisen:

a) Wenn die Strecken CC_1 und CC_2 auf verschiedenen Geraden liegen, so nehme man auf CC_1 und CC_2 zwei Punkte C' und C'' so an, daß $C'C''$ die Gerade AC in einem im Endlichen liegenden und von C verschiedenen Punkte C^* trifft; die Punkte C' und C'' bestimmen dann in den Scharen (Φ, Φ_1) und (Φ, Φ_2) je ein Fachwerk Φ' und Φ'', und C^* ist in der Schar (Φ', Φ'') Knotenpunkt eines Fachwerks Φ^*, das nicht nur, wie alle Fachwerke der Schar (Φ', Φ''), zu Φ, sondern sogar zu F selber isoklin ist und mit F den Stab AB gemein hat. Dann wäre aber F instabil, entgegen der Voraussetzung, und deshalb ist die Annahme der Existenz von Φ_2 unzulässig.

b) Wenn die Punkte C_1 und C_2 mit C auf derselben Geraden liegen, so kann die Schar (Φ_1, Φ_2) weder mit der Schar (Φ, Φ_1)



identisch sein, weil sonst Φ_2 selber dieser Schar angehörte, noch das Fachwerk Φ enthalten, weil sonst nach 2. auch Φ und Φ_1 die Schar (Φ_1, Φ_2) erzeugen müßten, was wiederum zur Folge hätte, daß Φ_2 der Schar (Φ, Φ_1) angehörte. Nun liegt aber C auf der Leitlinie C_1C_2 der Schar (Φ_1, Φ_2), bestimmt also ein von Φ verschiedenes Fachwerk

$$\Phi^* = ABC \ldots U^*V^* \ldots Z^*$$

dieser Schar, das nach Einführung des Stabes AC die Instabilität von F selber beweisen würde; wiederum ist die Annahme von Φ_2 unzulässig. Damit ist Satz 2 in vollem Umfange bewiesen.

6. Durch Beseitigung des Stabes AC war das stabile Fachwerk F in das instabile Fachwerk Φ übergegangen, von dem Φ_1 ein Geschwindigkeitsplan bei deformierender Bewegung und festgehaltenem Stabe AB war. Es soll nun versucht werden, Φ durch Einziehen eines neuen Stabes UV wieder stabil zu machen, der aber nicht am Knotenpunkte C angegliedert werden darf.

Wählt man die Knotenpunkte U, V auf gut Glück, so wird Φ entweder nach wie vor instabil bleiben, oder stabil werden.

Im Falle der Instabilität wird Φ_1 auch ein Geschwindigkeitsplan des neuen Fachwerks F' bei festgehaltenem Stabe AB bleiben, also U_1V_1 zu UV parallel sein; ist umgekehrt die Gerade U_1V_1 von Φ_1 zu UV parallel, so wird durch Einziehung des Stabes UV die Instabilität von Φ nicht beseitigt, und es ist außerdem in der ganzen Schar (Φ, Φ_1) die zu UV homologe Strecke mit UV parallel.

Soll F' stabil werden, so darf also jedenfalls U_1V_1 zu UV nicht parallel sein, und diese Bedingung reicht auch aus. Denn die bei Fixierung von AB möglichen Geschwindigkeitspläne von F' hat man in der Schar (Φ, Φ_1) zu suchen, und wenn U_1V_1 nicht zu UV parallel ist, so gilt das auch von allen zu UV homologen Geraden der Schar, weil umgekehrt bei Existenz einer von UV verschiedenen zu UV parallelen Geraden $U'V'$ sofort folgen würde, daß alle zu UV homologen Geraden der Schar zueinander parallel sind: folglich ist, falls UV und U_1V_1 sich im Endlichen schneiden, F' durch Annahme des Stabes AB und durch die Gliederung und Richtungen der übrigen Stäbe eindeutig bestimmt, also nach § 39, 9 stabil.

7. Es fragt sich also nur, ob man in Φ eine Strecke UV finden kann, die zu der homologen U_1V_1 in Φ_1 nicht parallel ist; außerdem darf sich unter den Punkten U, V nicht C befinden. Betrachten wir zuerst die Fachwerke Ψ und Ψ_1, die aus Φ und Φ_1 durch Beseitigung der Knoten C und C_1 und der zugehörigen Stäbe hervorgehen. Wären alle Verbindungsstrecken der Knoten von Ψ zu den homologen von Ψ_1

parallel, so wären Ψ und Ψ_1 ähnlich — „Fall A" —, es müßten denn die Punkte von Ψ auf einer Geraden liegen — „Fall B" —.

Im Falle A würde aus der Ähnlichkeit von Ψ und Ψ_1 sofort die Ähnlichkeit von Φ und Φ_1 folgen, wenn in Φ durch C mindestens zwei Stäbe gehen, die nicht auf einer Geraden liegen; denn man brauchte dann an Ψ nur C mit seinen Stäben wieder anzugliedern und an Ψ_1 zu diesen Stäben die Parallelen zu ziehen, so wäre das so entstandene Fachwerk Φ_1 zu Φ ähnlich. Wenn dagegen in Φ die Stäbe, die am Knotenpunkte C sitzen, auf einer Geraden x liegen, so können trotz der Ähnlichkeit von Ψ und Ψ_1 die Fachwerke Φ und Φ_1 unähnlich sein, indem C_1 zwar auf der zu x homologen Geraden x_1, aber außerhalb des Punktes angenommen werden kann, der dem Punkte C in der Ähnlichkeit entspricht.

Andererseits können aber die Fachwerke Φ und Φ_1 einander nicht ähnlich sein, da sie infolge des gemeinsamen Stabes AB gleich miteinander identisch sein müßten; folglich sind Ψ_1 und Ψ unähnlich, und es gibt im Falle A mindestens eine Strecke UV in Ψ, die zu U_1V_1 nicht parallel ist. Das kann nicht ein schon vorhandener Stab sein; denn mit diesem Stabe wird das Fachwerk Φ stabil, ausgenommen den einzigen Fall, daß die in Φ an C sitzenden Stäbe auf einer Geraden x liegen, wo, wie wir gesehen haben, ein zu Φ isokliner, aber nicht ähnlicher Geschwindigkeitsplan Φ_1 möglich ist.

Im Falle B liegen die Punkte von Ψ auf einer Geraden; C muß außerhalb derselben liegen, weil F sonst instabil wäre. Das Fachwerk besteht daher aus den Verbindungsstäben des Punktes C mit gewissen Punkten einer Geraden u, die auch noch untereinander verbunden sind. Ein solches Fachwerk kann aber, wenn es nach Loslösung des Stabes AC instabil wird, durch weitere Verbindungen auf u nicht stabil gemacht werden. So ergibt sich der

Satz 3.[1]) Sitzen an einem Knotenpunkte C eines stabilen Fachwerks F, das durch Beseitigung eines Stabes AC instabil wird, mehr als zwei Stäbe, die nicht auf einer Geraden liegen, so kann man nach Beseitigung von AC immer einen nicht an C sitzenden Stab UV so einfügen, daß das neue Fachwerk F' wieder stabil ist, vorausgesetzt, daß nicht alle Knotenpunkte von F außer C auf einer Geraden liegen. — Ist F so beschaffen, daß die Stabilität durch Fortnahme jedes einzelnen Stabes aufgehoben werden kann, so gilt das auch von F'.

Dieser Zusatz ist noch zu beweisen. Bleibt F' nach Beseitigung des Stabes XY stabil, so tritt nach Fortnahme von UV Instabilität

1) Schur, l. c. § 2, 6.



ein, und es gibt bei Fixierung von AB eine einzige Schar (Φ, Φ_1) von Geschwindigkeitsplänen, die identisch ist mit der bei Fortnahme des Stabes AC aus F auftretenden Schar. Dann würde F' nach Beseitigung von XY und Einfügung von AC sicher in ein stabiles Fachwerk Ω übergehen. Denn bei Fixierung von AB und Beseitigung von AC würde Ω sich nur nach dem Plane Φ_1 bewegen können, in welchem AC_1 nicht zu AC parallel ist; sollte nun Ω mit dem Stabe AC beweglich sein, so müßte in der Schar (Φ, Φ_1) ein zu Ω isokliner, aber nicht ähnlicher Geschwindigkeitsplan Φ' zu finden sein; in diesem Plane müßte $AC' \| AC$ sein, was nach dem Gesagten unmöglich ist. Somit ist die Stabilität von Ω gesichert; dieses Fachwerk geht aber aus F hervor durch Beseitigung des Stabes XY und kann nach der Voraussetzung über F nicht stabil sein. Folglich war die Annahme unzulässig, daß F' nach Fortnahme von XY stabil bleibt.

§ 43. Vollständige Lösung des Spannungsproblems.

1. Nach diesen Vorbereitungen sind zu einer vollständigen Lösung des Spannungsproblems alle Wege geebnet. Zunächst können wir unabhängig von den statischen Überlegungen des § 38 die Anzahl s der Stäbe eines statisch bestimmten Fachwerks $\mathfrak{F}_k$ mit k Knotenpunkten noch einmal ermitteln. Diese Fachwerke sind, wie sich alsbald zeigen wird, identisch mit denen, die F. Schur in seiner mehrfach erwähnten Abhandlung als einfache bezeichnet: Ein stabiles Fachwerk heißt einfach, wenn es durch Fortnahme jedes einzelnen Stabes instabil wird.

Satz 1. Hat ein einfaches, stabiles Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ von k Knotenpunkten einen zweistabigen Knoten A, so geht es durch Ablösung dieses Knotens und seiner beiden Stäbe AB, AC wieder in ein stabiles, einfaches Fachwerk $\mathfrak{F}_{k-1}$ von $k-1$ Knoten über.

Denn wäre $\mathfrak{F}_{k-1}$ instabil, so existierte bei Festhaltung irgend eines Stabes ein Geschwindigkeitsplan $\mathfrak{F}'_{k-1}$, der den Punkten B und C etwa die Geschwindigkeitspole B' und C' zuweisen möge, und wenn man durch B' und C' die Parallelen zu BA und CA legte, deren Schnittpunkt A' sei, so hätte man zugleich auch einen Geschwindigkeitsplan von $\mathfrak{F}_k$ selber. Dieser wäre zu $\mathfrak{F}_k$ isoklin, hätte mit $\mathfrak{F}_k$ einen Stab gemein, ohne mit $\mathfrak{F}_k$ zusammenzufallen und würde folglich die Instabilität von $\mathfrak{F}_k$ beweisen (§ 39, 6.).[1]). Mithin ist $\mathfrak{F}_{k-1}$ stabil.

1) Der Beweis wird wirkungslos, wenn BA und CA auf einer Geraden liegen; dieser Fall tritt aber bei stabilen Fachwerken nicht ein; man könnte sonst ein zu $\mathfrak{F}_k$ isoklines Fachwerk angeben, das mit $\mathfrak{F}_k$ alle Knotenpunkte gemein hätte bis auf den Punkt A, der auf AB eine beliebige Lage A' einnehmen könnte. Dann wäre $\mathfrak{F}_k$ nach § 39, 6. instabil.

und zugleich auch einfach, weil ein Stab von $\mathfrak{F}_{k-1}$, dessen Fortnahme die Stabilität von $\mathfrak{F}_{k-1}$ nicht beeinträchtigte, auch aus $\mathfrak{F}_k$ selber unbeschadet der Stabilität beseitigt werden könnte.

Hat $\mathfrak{F}_k$ keinen zweistabigen Knoten, so nehmen wir an dem Knoten, an dem die wenigsten Stäbe sitzen, einen Stab fort und fügen einen anderen, nicht durch diesen Knoten gehenden Stab so ein, daß das Fachwerk stabil bleibt; das ist nach § 42, Satz 3 immer möglich und hebt die Einfachheit nicht auf. An dem neuen Fachwerk verfahren wir an demselben Knoten ebenso, und wiederholen das Verfahren, bis wir zu einem stabilen und einfachen Fachwerk $\mathfrak{F}_k'$ gelangt sind, das an diesem Knoten nur zwei Stäbe hat. Dieser wird dann, wie vorhin, nebst seinen Stäben beseitigt, und das neue Fachwerk $\mathfrak{F}_{k-1}$ ist wieder stabil und einfach.

Wir können also immer von dem Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ zu einem stabilen und einfachen Fachwerk $\mathfrak{F}_{k-1}$ übergehen, das einen Knoten und zwei Stäbe weniger hat als $\mathfrak{F}_k$. Von $\mathfrak{F}_{k-1}$ aus gelangt man ebenso zu einem Fachwerk $\mathfrak{F}_{k-2}$, von diesem zu einem $\mathfrak{F}_{k-3}$ usw., bis man schließlich an einem $\mathfrak{F}_3$ Halt machen muß, das, wie alle vorangehenden Fachwerke, stabil und einfach ist und daher aus drei Stäben mit drei Knoten besteht, die ein Dreieck bilden. Da $\mathfrak{F}_3$ aus $\mathfrak{F}_k$ durch Fortnahme von $(k-3)$-mal zwei Stäben hervorgegangen ist, so zählte $\mathfrak{F}_k$ selber

$$s = 2(k-3) + 3 = 2k - 3$$

Stäbe, wie ein statisch bestimmtes Fachwerk. Daß $\mathfrak{F}_k$ wirklich auch statisch bestimmt ist, können wir nunmehr leicht nachweisen, indem wir ein Verfahren angeben, das von jedem einzelnen Stabe direkt die Stabkraft zu bestimmen gestattet.

2. Der Stab von $\mathfrak{F}_k$, dessen Spannung gesucht wird, sei $A_u A_v$. Das Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ geht nach Wegnahme von $A_u A_v$ in ein instabiles Fachwerk

$$\Phi = A_1 A_2 A_3 \ldots A_u A_v \ldots A_k$$

über, das bei Festhaltung des Stabes $A_1 A_2$ mindestens eine infinitesimale Bewegung nach einem Geschwindigkeitsplane

$$\Phi' = A_1 A_2 A_3' \ldots A_u' A_v' \ldots A_k'$$

ausführen kann. Die Strecke $A_u' A_v'$ kann nicht zu $A_u A_v$ parallel sein, weil sonst Φ' nach Einzeichnung des Stabes $A_u' A_v'$ ein Geschwindigkeitsplan von $\mathfrak{F}_k$ selber wäre, der mit $\mathfrak{F}_k$ den Stab $A_1 A_2$ gemein hätte, ohne mit $\mathfrak{F}_k$ identisch zu sein, was nach § 39, 6. die Instabilität von $\mathfrak{F}_k$ beweisen würde.

Als Beispiel möge das schon in § 37, 9. untersuchte Fachwerk mit sechs Knoten und neun Stäben dienen (Fig. 211 und 212), das, falls seine Knotenpunkte nicht auf einem Kegelschnitte liegen, stabil und einfach ist (§ 42, 7.). Der Geschwindigkeitsplan einer bei festgehaltenem $A_1 A_2$ möglichen Bewegung ist punktiert, man sieht, daß die Strecke $A_u' A_v'$ zu $A_u A_v$ nicht parallel ist.

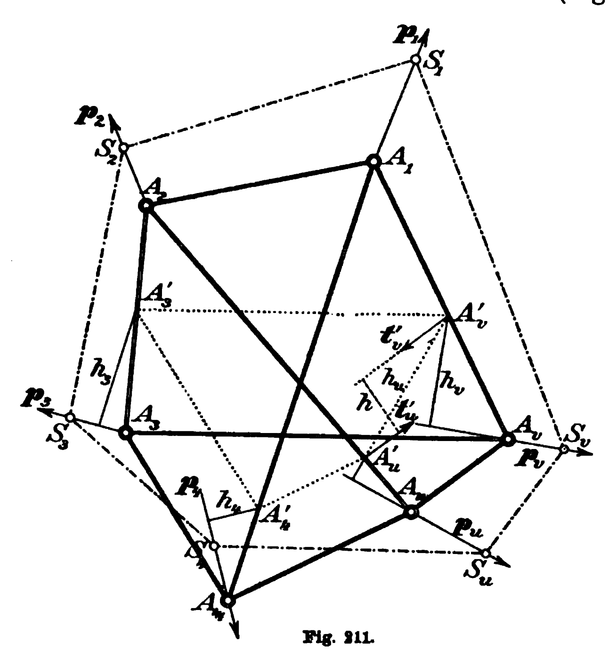


Fig. 211.

Die Angriffskräfte seien

$$(1) \qquad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \cdots, \mathfrak{p}_u, \mathfrak{p}_v, \cdots, \mathfrak{p}_k$$

(Fig. 212), wobei $k = 6$ ist.[1]) Nach Lösung des Spannungsproblems soll in jedem Knotenpunkte von $\mathfrak{F}_k$ Gleichgewicht bestehen zwischen den Stabkräften und den umgekehrten Angriffskräften. Denkt man nun alle diese Kräfte an die homologen Knotenpunkte von Φ' verlegt, wodurch das System (1) in die Lage

$$(2) \qquad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3', \cdots, \mathfrak{p}_u', \mathfrak{p}_v', \cdots, \mathfrak{p}_k'$$

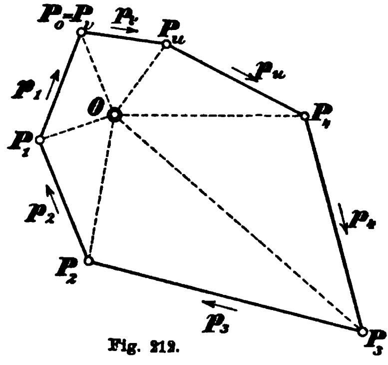


Fig. 212.

kommen möge, so fällt auf jeden Stab von Φ' ein Paar entgegengesetzt gleicher Kräfte, die wir diesem Stabe als „Stabkräfte“ zuschreiben wollen. Das sind die früheren Stabkräfte von $\mathfrak{F}_k$, die so alle in den Stäben von Φ' unterkommen, mit alleiniger Ausnahme der beiden gesuchten Kräfte t_u, t_v des Stabes $A_u A_v$, denn $A_u' A_v'$ ist zu $A_u A_v$ nicht parallel. Diese Kräfte bilden also nach ihrer Verlegung nach den Punkten A_u', A_v' ein eigentliches Gegenpaar t_u', t_v', von dem wir von vornherein bereits die Angriffslinien u', v' angeben können: es sind die Parallelen zu $A_u A_v$ durch A_u' und A_v'. Da nun die Stabkräfte von Φ' sich gegenseitig aufheben, so folgt:

1) Das Seileck $S_1 S_2 S_3 S_4 S_u S_v$ verifiziert das Gleichgewicht dieser Kräfte.

Satz 2. Am Fachwerk Φ' stehen die Kräfte (2) nach Umkehrung ihrer Pfeile vereint mit dem Kräftepaar t_u', t_v' im Gleichgewicht.

3. Hierdurch sind die entgegengesetzt gleichen Kräfte t_u', t_v' bestimmt. Man findet sie leicht auf dem Wege der Rechnung, indem man das Gleichgewicht der vorstehend genannten Kräfte durch das Verschwinden ihrer Momentensumme für irgend einen Drehpunkt O ausdrückt. Der orientierte Hebelarm der Kraft p_x am Drehpunkt O sei h_x', ihre absolute Größe $p_x (x = 1, 2, \ldots, k)$; die absolute Größe von t_u', t_v' sei t, der Abstand von u' und v' sei h. Dann ist nach dem Satze von der Momentensumme:

$$h_1' p_1 + h_2' p_2 + \cdots + h_k' p_k = \pm ht, \tag{3}$$

wo rechts das positive oder negative Zeichen gilt, je nachdem die linke Seite positiv oder negativ ist; bis auf das Vorzeichen ist nämlich ht die Momentensumme von t_u', t_v', die, wie bei jedem Kräftepaare, von der Wahl des Drehpunktes unabhängig ist. Aus (3) kann man t berechnen.

4. Die kinematische[1]) Methode von Mohr und Müller-Breslau bedient sich zur Berechnung von t einer Formel, die eine einfache Folge der Formel (3) und des Umstandes ist, daß auch die Kräfte (1) im Gleichgewicht stehen, also am Drehpunkte O eine verschwindende Momentensumme haben. Ist h_x'' der orientierte Hebelarm von p_x am Drehpunkt O, so ist demnach:

$$h_1'' p_1 + h_2'' p_2 + \cdots + h_k'' p_k = 0; \tag{4}$$

indem man (4) von (3) abzieht und $h_x' - h_x'' = h_x$ setzt, folgt die erwähnte Formel:

$$h_1 p_1 + h_2 p_2 + \cdots + h_k p_k = \pm ht. \tag{5}$$

Hierin ist h_x bis auf das Vorzeichen der Abstand der parallelen Kräfte p_x, p_x', und zwar kann h_x als der orientierte Hebelarm von p_x am Drehpunkt A_x' aufgefaßt werden; das Vorzeichen rechts in (5) ist immer noch so zu wählen, daß es mit dem der ganzen Summe links übereinstimmt. Bei positivem Zeichen bestimmt das unbekannte Kräftepaar t_u', t_v' positive Drehung, bei negativem aber negative.

1) Die Methode wird kinematisch genannt, weil die Geschwindigkeitspläne, auf denen sie beruht, der Bewegungslehre oder Kinematik entnommen sind.

Im ganzen wird Formel (5) vor (3) kaum einen Vorteil bieten. Jedenfalls aber können wir hiernach t berechnen. Bei der Figur 211 lautet z. B. die zur Berechnung dienende Gleichung:

$$h_3 p_3 + h_4 p_4 + h_u p_u + h_v p_v = \pm h t.$$

Damit ist die Aufgabe der direkten Bestimmung einer beliebigen Stabkraft eines stabilen, einfachen Fachwerks gelöst.

5. Wir sehen hieraus, daß das stabile, einfache Fachwerk zu jedem Angriffssystem eine einzige Lösung des Spannungsproblems gibt:

Satz 3. Das stabile, einfache Fachwerk ist statisch bestimmt.

Da umgekehrt das statisch bestimmte Fachwerk auch stabil ist und gerade so viel Stäbe hat wie ein einfaches Fachwerk mit gleicher Knotenzahl, so folgt:

Satz 4. Das statisch bestimmte Fachwerk ist stabil und einfach.

In diesen beiden Sätzen gipfelt die ganze Theorie des Fachwerks. Jetzt können wir von den verschiedenen Arten der Fachwerke folgende

Übersicht

geben:

A. Stabile Fachwerke.

1. Statisch bestimmte: $s = 2k - 3$. Diese Fachwerke werden durch Wegnahme jedes einzelnen Stabes instabil (d. h. sie sind einfach).
2. Statisch unbestimmte: $s = 2k - 3 + p$. Sie haben p überzählige Stäbe, die unbeschadet der Stabilität beseitigt werden können.

B. Instabile Fachwerke.

1. Infinitesimal bewegliche im „Grenzfall": $s = 2k - 3$. Das Fachwerk ist singulär, d. h. es gibt gleich gegliederte Fachwerke mit anderen Stabrichtungen, die stabil sind.
2. Infinitesimal bewegliche mit $s = 2k - 3 + p$ Stäben.
3. Endlich bewegliche ohne infinitesimale Beweglichkeit (z. B. der Inversor, Bd. II, Fig. 32 und 33).
4. Endlich und infinitesimal bewegliche.

Die instabilen werden uns weiter nicht mehr beschäftigen. Die statisch bestimmten werden durch Einziehung neuer Stäbe statisch

unbestimmt. Man versteht jetzt auch, warum wir ein Fachwerk stets von den Auflagern ablösen und die Wirkung der Auflager durch Auflagerreaktionen zu ersetzen suchen: wo das nicht möglich ist, wird die Lösung des Spannungsproblems statisch unbestimmt. Wenn man z. B. den Polonceau-Träger der Figur 188 an beiden Enden vollkommen starr an die Unterlage befestigte, würde diese unter anderem wirken, wie ein Verbindungsstab u dieser Endknotenpunkte; mit diesem Stabe ist aber das Fachwerk statisch unbestimmt, gestattet also unendlich viele Lösungen des Spannungsproblems, wobei die Stabkräfte von u willkürlich vorgeschrieben werden können.

6. Der Satz 2. ist auch die Grundlage der **Kräftepaarmethode von Schur.** Nimmt man zum Kräftepaar t_u', t_v' noch eine der umgekehrten Angriffskräfte, so halten diese drei Kräfte den übrigen Angriffskräften das Gleichgewicht, d. h. die Resultante r der übrigen Angriffskräfte ergibt jene drei Kräfte als Komponenten, wenn man r nach den drei Angriffslinien dieser Kräfte zerlegt, die natürlich so gewählt sein müssen, daß sie nicht durch denselben (unendlich fernen) Punkt gehen. Das hieraus entspringende Konstruktionsverfahren wird durch die Figuren 213 und 214 hinreichend erklärt. Figur 213 ist das auch in Figur 211 dargestellte Fachwerk; Φ' hat die Ecken $A_1 A_2 A_3' A_4' A_5' A_6'$,

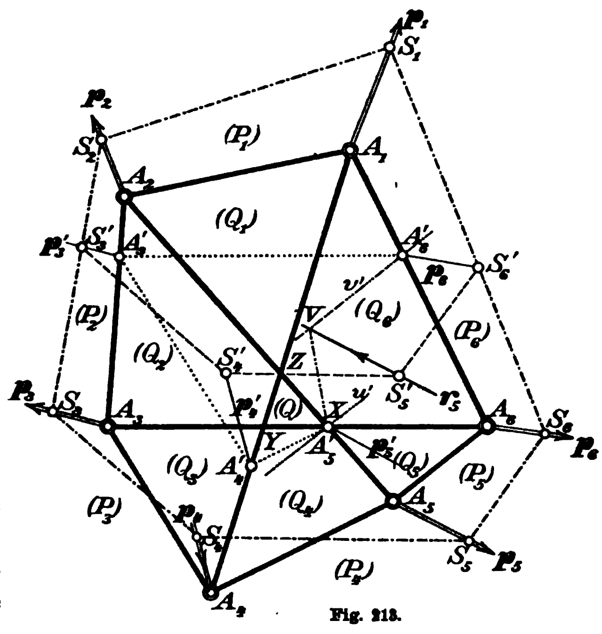


Fig. 213.

von denen A_5' in den Schnittpunkt von $A_2 A_5$ und $A_3 A_6$ verlegt ist, was man aber auch unterlassen kann; der zu untersuchende Stab sei $A_5 A_6$, also $u = 5$, $v = 6$. Durch A_5', A_6' werden die Parallelen u', v' zu $A_5 A_6$ gelegt, und p_5' ist parallel zu p_5. Wir zerlegen nach § 28, 7. die Resultante r_5 der Angriffskräfte p_6, p_1, p_2, p_3, p_4 nach den drei Geraden u', v', p_5'. In Figur 214 sind die Angriffskräfte so eingetragen, daß p_ν durch $P_\nu P_{\nu-1}$ dargestellt wird; O ist der Pol des in Figur 213 eingetragenen Seilecks $S_1 S_2 \ldots S_6$, das zur Verifi-

zierung des Gleichgewichts der Angriffskräfte dient. In Figur 214 findet man $r_5 = P_4 P_5$. Um diese Kraft nun nach u', v', p_5' (Fig. 213) zu zerlegen, konstruieren wir die Angriffslinie dieser Kraft mittels eines Seilecks $S_6' S_1 S_2 S_3' S_4'$ zum Pol O, dessen äußere Seiten $S_4' S_5' \parallel S_4 S_5$ und $S_6' S_5' \parallel S_6 S_5$ sich in einem Punkte S_5' von r_5 treffen. Die Parallele durch S_5' ist also die gesuchte Angriffslinie von r_5. Sie treffe v' in V. Dann muß die Resultante ϱ der beiden Komponenten von r_5 nach den Richtungen u' und p_5' auf $A_5' V$ liegen, und zusammen mit der dritten der gesuchten Komponenten, die auf v' liegt, wieder r_5 ergeben. Zieht man also (Fig. 214) durch P_4 und P_5 die Parallelen zu $A_5' V$ und u' (oder $A_5 A_6$), die sich in Q_5 schneiden mögen, und macht $P_4 R = P_5 Q_5$, so ist $P_4 R = t_u'$, $R Q_5 = -p_5'$ und $P_4 Q_5 = \varrho$, also $Q_5 P_5 = t_v'$ da $\varrho + Q_5 P_5 = P_4 P_5 = r_5$ ist. Die Strecken $P_4 R$ und $R Q_5$, die nur zur Erklärung der Konstruktion dienten, können bei der praktischen Ausführung weggelassen werden: $P_5 Q_5$ ist gleich $P_4 R = t_u'$, und damit ist die Kraft des Stabes $A_5 A_6$ am Punkte A_5 bestimmt. Die anderen findet man jetzt mühelos.

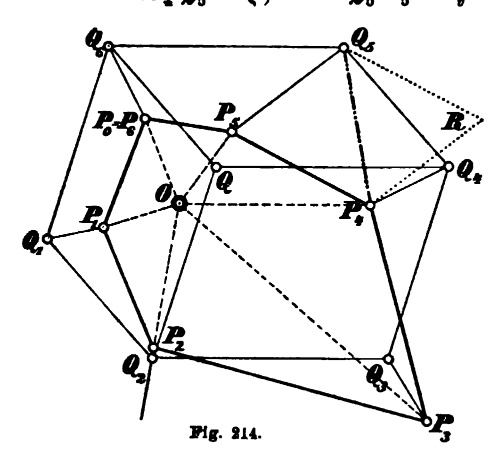


Fig. 214.

7. Da die Stäbe des Fachwerkes sich schneiden, so ist die unmittelbare Anwendung des Kräfteplanverfahrens ausgeschlossen. Wir müssen daher das Krafteckverfahren anwenden, tun dies aber mit der Modifikation, daß wir die den sechs Knotenpunkten entsprechenden Kraftecke an das Krafteck $P_0 \ldots P_6$ der Angriffskräfte lagern. Zum Knotenpunkt A_5, der durch Konstruktion der Stabkraft $P_5 Q_5$ von $A_5 A_6$ aufgeschlossen ist, gehört so das Krafteck $P_4 P_5 Q_5 Q_4$. Ebenso gehört das Krafteck $Q_5 P_5 P_6 Q_6$ zu A_6; $Q_6 P_6 P_1 Q_1$ zu A_1; $Q_1 P_1 P_2 Q_2$ zu A_2; $Q_2 P_2 P_3 Q_3$ zu A_3; $Q_3 P_3 P_4 Q_4$ zu A_4; $Q_4 P_4 P_5 Q_5$ zu A_5.

8. Damit ist denn doch eine Art von Kräfteplan erzielt, nur kommen die Kräfte der Diagonalen des Sechsecks $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ je zweimal darin vor. Macht man noch $Q_2 Q = Q_1 Q_6$ (Fig. 214), so tritt jede Diagonalkraft sogar dreimal in Figur 214 auf: die Kraft der Diagonale

$A_1 A_4$ am Knoten A_1 ist $Q_1 Q_6 = Q_2 Q = Q_3 Q_4$,
$A_2 A_5$ „ „ A_2 „ $Q_2 Q_1 = Q Q_6 = Q_4 Q_5$,
$A_3 A_6$ „ „ A_3 „ $Q_3 Q_2 = Q_4 Q = Q_5 Q_6$.

Versucht man, den Eckpunkten des Kräfteplans in der Figur 213 je eine Vieleckfläche zuzuordnen, so wie es bei den anderen Kräfteplänen war, so gelangt man zu der durch eingeklammerte Buchstaben in Figur 213 bezeichneten Anlage, bei der sofort auffällt, daß die Schnittpunkte X, Y, Z der drei Diagonalen wie wirkliche Knotenpunkte behandelt sind. Wären es Knotenpunkte, so müßte z. B. dem Stabe XY in X die Kraft QQ_4 und in Y die Kraft Q_4Q zukommen, was auch die Kräfte von A_3A_6 selber sind; jede Diagonale würde also in drei Stäbe zerfallen, die bis auf das Vorzeichen gleiche Kräfte hätten. So lesen wir es aus dem Kräfteplane ab. Das läßt sich aber vorhersehen. Zunächst gilt nämlich der

Satz 5. Wenn man den Schnittpunkt zweier Stäbe eines stabilen, einfachen Fachwerks $\mathfrak{F}_k$ von k Knotenpunkten als unbelasteten Knotenpunkt einführt, so erhält man ein stabiles, einfaches Fachwerk $\mathfrak{F}_{k+1}$.

Der Vermehrung der Knotenzahl um 1 entspricht der Zuwachs an zwei Stäben, wie es nach der Formel $s = 2k - 3$ sein muß. Wäre $\mathfrak{F}_{k+1}$ instabil, so würden in jedem Geschwindigkeitsplane Φ, in dem diese Instabilität zum Ausdruck käme, die zwei Teilstäbe, in die jeder der beiden in Rede stehenden Stäbe von $\mathfrak{F}_k$ zerfallen ist, auf einer Geraden liegen, da der Geschwindigkeitsplan zum Fachwerk isoklin ist. Das wäre dann aber auch ein Geschwindigkeitsplan von $\mathfrak{F}_k$ selber, der die Instabilität von $\mathfrak{F}_k$ beweisen würde. Aus diesem Widerspruch folgt, daß $\mathfrak{F}_{k+1}$ stabil ist, und aus der Stäbezahl von $\mathfrak{F}_{k+1}$ folgt dann die Einfachheit.

Führt man nun X, Y, Z in Figur 213 als neue Knotenpunkte ein, so ist das so modifizierte Fachwerk F_9 immer noch stabil und einfach. Nach § 35, 8. d sind aber in jedem der Knoten X, Y, Z die vier Stabkräfte entgegengesetzt gleich. Dieser Forderung wird entsprochen durch die Annahme, daß auf jedem Teilstabe einer Diagonale des $\mathfrak{F}_6$ die Stabkräfte nach Größe und Richtung mit denen der Diagonale selbst übereinstimmen. Da nun durch diese Annahme offenbar den Forderungen des Spannungsproblems an $\mathfrak{F}_9$ genügt wird, und F_9 als statisch bestimmtes Fachwerk nur eine Lösung dieses Problems zuläßt, so ist dies die einzig mögliche.

Es zeigt sich also, daß durch Einführung des Schnittpunktes von zwei Stäben als neuer Knotenpunkt — er wird ein idealer Knoten genannt — in diesen Stäben nur eine Wiederholung der schon vorhanden Stabkräfte bewirkt wird, so daß man also durch Lösung des Spannungsproblems des neuen Fachwerks bei derselben Belastung zugleich auch die Lösung zum ursprüglichen Fachwerk



erhält. Schur hat gezeigt[1]), daß man durch Einführung passender idealer Knotenpunkte stets die Konstruktion eines Kräfteplans ermöglichen kann. Doch sind diese Betrachtungen nicht mehr elementar.

Nunmehr ist die Figur 214 vollkommen durchsichtig: sie ist der Kräfteplan des $\mathfrak{F}_9$.

9. Indem wir die Schursche Kräftepaarmethode auf die Zerlegung einer Kraft r_5 nach ihren Komponenten auf drei nicht durch einen Punkt gehenden Geraden hinausspielen — Schur selbst geht ein wenig anders vor[2]) —, lassen wir ihre enge Verwandtschaft mit einer anderen, ebenfalls von Schur angegebenen Lösung des Spannungsproblems hervortreten, die auf dieselbe Elementaraufgabe hinausläuft.

Ein stabiles, einfaches Fachwerk ohne Zweistabknoten hat mindestens sechs Dreistabknoten (§ 38, 10.). Die **Methode des Dreistabknotens** geht darauf aus, die Stabkräfte an einem Dreistabknoten zu konstruieren.

Satz 6. Durch Wegnahme eines Dreistabknotens O mit seinen drei Stäben OA, OB, OC wird ein stabiles, einfaches Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ in der Weise instabil, daß bei Festhaltung eines der noch vorhandenen Stäbe eine einzige Schar von Geschwindigkeitsplänen möglich ist.

Denn verbindet man die Beseitigung des einen Stabes OA nach § 42, Satz 3 mit der Einziehung eines nicht durch O gehenden Stabes XY, der die Stabilität und Einfachheit aufrecht erhält, so können OB und OC unbeschadet der Stabilität und Einfachheit beseitigt werden (Satz 1). Nimmt man dann auch XY wieder fort, so ist nach § 42, Satz 2 eine einzige Schar von Geschwindigkeitsplänen möglich, die einen Stab gemeinsam haben.

Sei also Φ'_{k-1} ein Geschwindigkeitsplan des aus $\mathfrak{F}_k$ durch Wegnahme von OA, OB, OC entstehenden Fachwerks Φ_{k-1}, der mit Φ_{k-1} den Stab MN gemein habe. Denkt man nun das Spannungsproblem für $\mathfrak{F}_k$ bei irgendeinem Angriffssystem gelöst und diese Angriffskräfte und die Stabkräfte (parallel zu sich) nach den entsprechenden Knoten und Stäben von Φ'_{k-1} verlegt, wobei zu beachten ist, daß jeder Stab von Φ'_{k-1} dem entsprechenden Stabe von Φ_{k-1} und von $\mathfrak{F}_k$ selber parallel ist, so wird in jedem Knotenpunkte von Φ'_{k-1}, abgesehen von den zu A, B, C homologen Knoten A', B', C', Gleichgewicht bestehen zwischen den umgekehrten Angriffskräften und den Stabkräften, und die Stabkräfte in jedem Stabe werden entgegengesetzt gleich sein.

1) l. c. § 4ff.
2) l. c. Seite 162ff.

Um auch noch in A', B', C' Gleichgewicht herzustellen, muß man ersichtlich die Kräfte t_A, t_B, t_C, die beim Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ an A, B, C in den Stäben AO, BO, CO wirken, auch in A', B', C' als „Ersatzkräfte" (für die fortgenommenen Stäbe AO, BO, CO) anbringen; diese liegen also auf den drei Parallelen a', b', c' durch A', B', C' zu AO, BO, CO, die sich nicht in einem Punkte O' treffen können, weil man sonst einen Geschwindigkeitsplan von $\mathfrak{F}_k$ selber hätte, der die Instabilität von $\mathfrak{F}_k$ beweisen würde.

Wir haben jetzt also an den $k-1$ Knotenpunkten von Φ'_{k-1} erstens die umgekehrten Angriffskräfte der entsprechenden Knoten von $\mathfrak{F}_k$, zweitens an A', B', C' außerdem noch die drei unbekannten Ersatzkräfte auf a', b', c', und drittens die Stabkräfte. Nun herrscht einerseits an jedem Knoten Gleichgewicht, also steht auch das ganze System dieser drei Arten von Kräften im Gleichgewicht; andererseits heben die Stabkräfte einander paarweise auf. Daraus folgt: Die Ersatzkräfte und die umgekehrten Angriffskräfte an Φ'_{k-1} befinden sich im Gleichgewicht, d. h.:

Satz 7. Die drei Ersatzkräfte sind die Komponenten der Resultante der Angriffskräfte an Φ'_{k-1} auf den Geraden a', b', c'.

Hiernach können sie, wie in Figur 153, S. 208, konstruiert werden.

§ 44. Andere Lösungsmethoden.

1. Die kinematischen Methoden, mit denen wir die vollständige Lösung des Spannungsproblems an stabilen, einfachen Fachwerken erzielt haben, beruhen auf den Geschwindigkeitsplänen, die der nach Wegnahme eines Stabes möglichen Bewegung des Fachwerks entsprechen. Die Geschwindigkeitspläne sind zu dem so modifizierten Fachwerk isoklin, ohne ihm ähnlich zu sein, und kommen nur wegen dieser Eigenschaft in Betracht. Umgekehrt ist jedes zu einem Fachwerk isokline Fachwerk ein Geschwindigkeitsplan einer möglichen Bewegung. Es kommt also bei den Methoden des § 43 alles darauf an, zu dem gegebenen Fachwerk nach Wegnahme eines Stabes isokline Fachwerke zu finden. Das gelingt häufig ohne Mühe, besonders, wenn man einen Stab festhält, an dessen Knotenpunkten zahlreiche andere Stäbe befestigt sind. Wir wollen das noch an einigen Beispielen erläutern.

Vom Fachwerk Figur 215 wird man am besten wohl einen durch 2 gehenden Stab festhalten, weil dieser Knoten vier Stäbe hat. Wir fixieren 12, beseitigen 56 und nehmen den Geschwindigkeitspol 3' von 3 auf 32 willkürlich an. Dadurch ist dann alles

weitere eindeutig bestimmt. Der Geschwindigkeitsplan ist $1 2 3' 4' 5' 6' 7'$. Die Stabkraft von 56 kann also nach dem Verfahren von Schur konstruiert werden. Darauf ist einfach das Krafteckverfahren anwendbar.

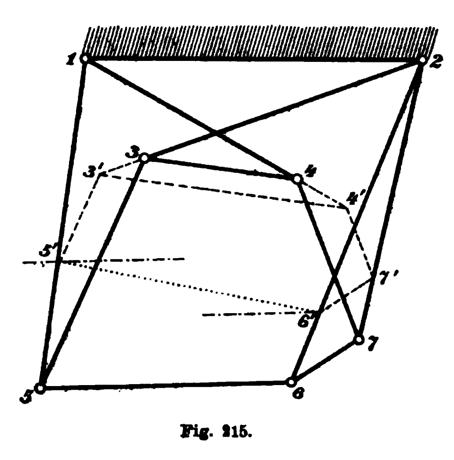


Fig. 215.

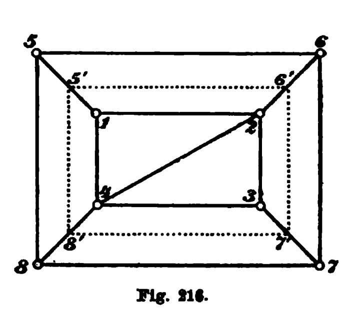


Fig. 216.

2. Das Fachwerk 12345678 in Figur 216 erweist sich durch den eingezeichneten Geschwindigkeitsplan $1 2 3 4 5' 6' 7' 8'$ als instabil, weil dieser zu dem Fachwerk isoklin, aber nicht ähnlich ist.

Vom Fachwerk Figur 217 halten wir nur den Knotenpunkt A fest und beseitigen den Stab BO_5. Da die durch A gehenden Stäbe, wenn sie sich überhaupt bewegen, nur eine Drehung um A ausführen können, so müssen die Geschwindigkeitspole ihrer Endpunkte auf den Stäben liegen. Wir nehmen also U_1' auf AU_1 und U_2' auf AU_2 willkürlich als Geschwindigkeitspole von U_1, U_2 an und ziehen durch

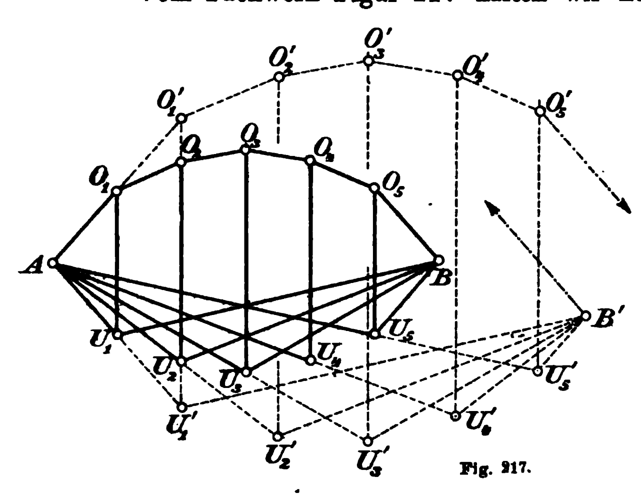


Fig. 217.

dieselben zu BU_1 und BU_2 die Parallelen, die sich in B' treffen mögen. Dann bestimmen die Parallelen durch A und B' zu AU_3 und BU_3 den Punkt U_3', zu AU_4 und BU_4 den Punkt U_4', zu AU_5 und BU_5 den Punkt U_5'. Darauf zieht man durch die Punkte $U_1', \ldots, U_5'$ die Parallelen zu den Vertikalstäben und bestimmt auf diesen von A ausgehend die Punkte $O_1', \ldots, O_5'$. Man könnte

offenbar U_1' mit U_1 zusammenfallen lassen, was einer Fixierung des Stabes $A U_1$ entsprechen würde. Dann würde aber der Geschwindigkeitsplan zu sehr in die Figur des Fachwerks hineingeraten.

Hat man die Stabkräfte von BO_5 nach dem Verfahren von Schur konstruiert, so findet man zu den Knotenpunkten die Kraftecke in der Reihenfolge O_5, U_5, O_4, U_4, O_3, U_3, O_2, U_2, O_1, U_1, A, B.

3. Nicht immer gelingt der Geschwindigkeitsplan so leicht. Deshalb ist es gut, sich auch mit anderen Methoden vertraut zu machen. **Die Methode des falschen Ansatzes von Saviotti** hat das Angenehme, daß alle auf die Lösung zu verwendende Vorarbeit dazu dient, die ungefähre Form des Kräfteplans festzustellen. Das Verfahren möge an dem Fachwerk Figur 218 erklärt werden, zu dem übrigens leicht ein Geschwindigkeitsplan zu finden wäre.

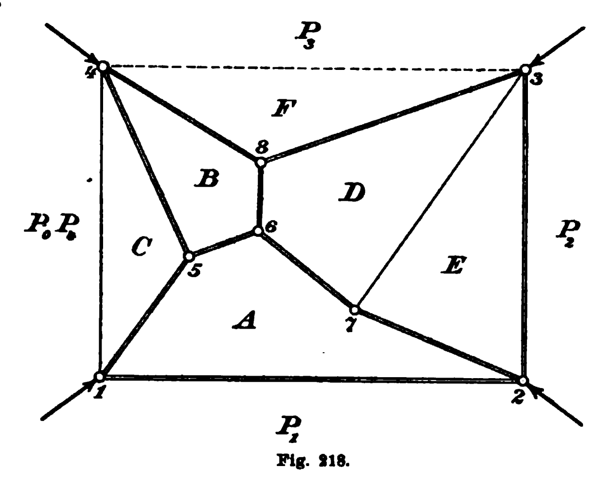


Fig. 218.

Das Angriffssystem besteht aus den vier an 1, 2, 3, 4 wirkenden Kräften P_1P_0, P_2P_1, P_3P_2, P_0P_3, die zur Anlage eines Kräfteplanes mit umgekehrter Richtung aneinander gesetzt werden: $P_0P_1P_2P_3$ (Fig. 219). Von dem zum Knoten 2 gehörigen Krafteck AP_1P_2E weiß man zunächst nur, daß seine Ecke A auf der Parallele a durch P_1 zu AP_1 liegt. Die Methode des falschen Ansatzes besteht nun darin, daß man vorläufig einmal A auf a in irgendeiner Lage A' annimmt und zusieht, wie weit man bei der Konstruktion des Kräfteplans mit dieser Annahme widerspruchslos durchkommt. Die Ecken dieses voraussichtlich falschen Kräfteplans unterscheiden wir von den gesuchten richtigen durch einen Akzent. Wir konstruieren also zum Knoten 2 das Krafteck $A'P_1P_2E'$, zum Knoten 7 ebenso $A'E'D'$, zu 6 ebenso $A'D'B'$, zu 5 ebenso $A'B'C'$. Dem Knoten 1 müßte jetzt ein Krafteck $A'C'P_0P_1$ entsprechen, d. h. der Punkt C' des Kräfteplans müßte auf der durch P_0 zu CP_0 gezogenen Parallelen c liegen, was in unserer Figur nicht zutrifft. Hier ist also der erste Widerspruch aus der falschen Annahme von A auf a.

4. Jetzt macht man einen zweiten Versuch, indem man A auf a die Lage A'' einnehmen läßt und, wie beim ersten Versuch, die Kraft-

ecke $A''P_1P_2E''$, $A''E''D''$, $A''D''B''$, $A''B''C''$ zu 2, 7, 6, 5 konstruiert. Auch C'' hat nicht die richtige Lage C auf c. Wenn man nun die Strecken $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$, $D'D''$, $E'E''$ durch die Punkte A''', B''', C''', D''', E''' (nicht in der Figur) in demselben übrigens beliebigen Verhältnisse teilte, so erhielte man offenbar durch Ver-

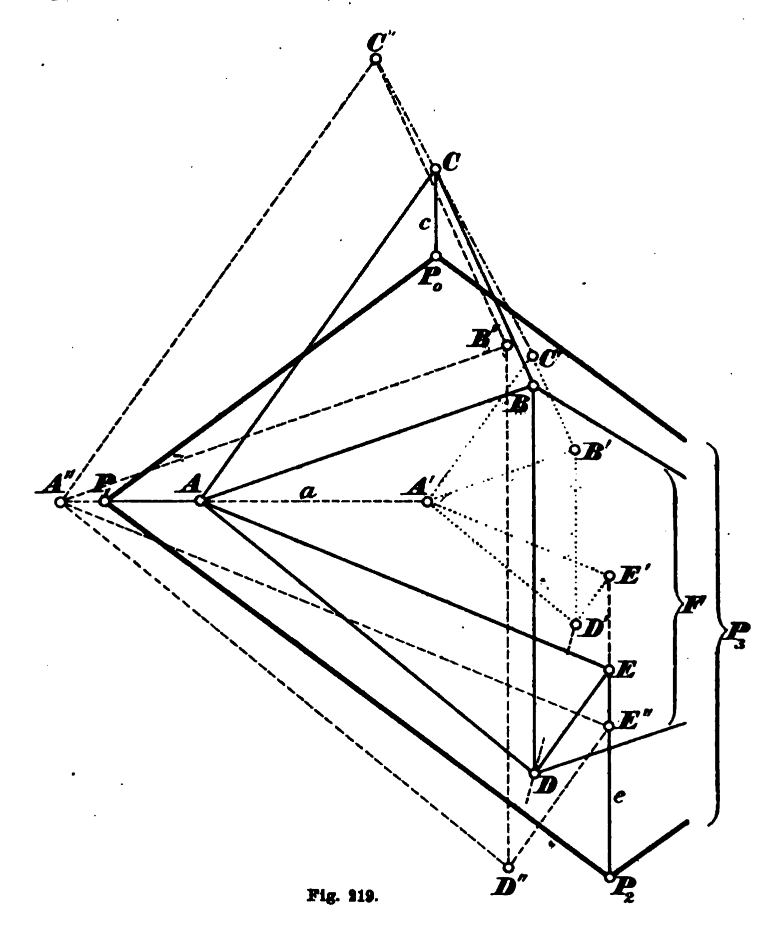


Fig. 219.

bindung dieser Teilpunkte einen der Annahme von A in der Lage A''' (auf a) entsprechenden (falschen) Kräfteplan, denn es wäre z. B. die Strecke $B'''D'''$ in dem Trapez $B'D'D''B''$ zu $B'D'$ parallel usw. Daraus folgt, daß, wenn A''' die Gerade a durchläuft, die Punkte B''', C''', D''', E''' auf $B'B''$, $C'C''$, $D'D''$, $E'E''$ wandern. Nimmt man also C''' im Schnittpunkte C von $C'C''$ mit c an, so trifft die Parallele durch C zu $C'A'$ die Gerade a im richtigen Punkte A. Darauf findet man B, D, E entweder durch abermalige Konstruktion des Kräfte-

plans, oder indem man die Parallele durch A zu $A'B'$ mit $B'B''$ in B, die Parallele durch B zu $B'D'$ mit $D'D''$ in D und die Parallele durch D zu $D'E'$ mit $E'E''$ in E zum Schnitt bringt.

5. Nachdem so zu den Knoten 2, 7, 6, 5, 1 die richtigen Punkte des Kräfteplans gefunden sind, liefert das Krafteck BDF zum Knoten 8 noch den letzten fehlenden Punkt F des Kräfteplans. In unserer Figur ist F zufällig mit P_8 identisch, so daß sich der Stab 34, dem in 3 und 4 die Kräfte P_8F und FP_8 zukommen, als kraftlos erweist. In Figur 218 sind die auf Druck beanspruchten Stäbe doppelt ausgezogen.

Das Wesen der Saviottischen Methode besteht nach diesem Beispiele darin, daß man nach versuchsweiser Annahme einer Stabkraft die Konstruktion der den einzelnen Knoten entsprechenden Kraftecke — die übrigens nicht notwendig zu einem Kräfteplan vereinigt werden müssen — so lange fortsetzt, bis man auf den ersten Widerspruch stößt; darauf ändert man die falsche Annahme ab und wiederholt den Versuch genau wie vorhin, bis man auf denselben Widerspruch stößt. Dieser mag das erste Mal darin bestanden haben, daß ein Punkt X' nicht auf einer Geraden x lag; im allgemeinen wird auch beim zweiten Versuch der entsprechende Punkt X'' nicht auf x liegen. Dann ist der Schnittpunkt X von $X'X''$ mit x der richtige Punkt des Kräfteplans, von dem ausgehend man die übrigen Punkte konstruieren kann. Kurz, die beiden falschen (unvollendeten) Kräftepläne Ω', Ω'' bestimmen eine Schar (Ω', Ω'') im Sinne des § 42, 2., der auch der richtige Kräfteplan Ω angehört.

Ein gutes Übungsbeispiel ist auch das Sechseck Figur 213.

6. Unter Vermeidung von Geschwindigkeitsplänen geht die **Methode der Stabvertauschung von Henneberg** darauf aus, das gegebene stabile und statisch bestimmte Fachwerk F durch Wegnahme von Stäben $x, y, z, \ldots$ und Einführung ebensovieler „Ersatzstäbe“ $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ in ein stabiles, einfaches Fachwerk Φ zu verwandeln, an dem das Spannungsproblem leicht lösbar ist. Es fragt sich dann nur, wie daraus die Spannungen von F selber bestimmt werden können. Wir setzen vorläufig voraus, daß das so „abgeleitete“ Fachwerk Φ dieselben Knoten hat wie F. Es ist dann kein Knoten von F durch Wegnahme der Stäbe völlig beseitigt worden; man hat also an jedem Knoten von F noch mindestens zwei Stäbe gelassen. Ferner verbinden die Ersatzstäbe von Φ nur schon an F vorhandene Knoten.

Da nun F und Φ die Knoten gemeinsam haben, so ist ein Angriffssystem (P) von F auch an Φ im Gleichgewicht. Es sei nun



das Spannungsproblem zu (P) am Fachwerk Φ gelöst und habe für den Stab u an seinem (beliebig definierten) „Anfangspunkte" die Kraft τ_u ergeben; in den Strecken $x, y, z, \ldots$ von Φ, die ja keine Stäbe von Φ mehr sind, fehlen natürlich auch die Stabkräfte.

Wir bringen nun an Φ in den beiden Knotenpunkten des herausgenommenen Stabes x auf der Geraden x ein Paar entgegengesetzt gleicher Kräfte $(+k_x, -k_x)$ an und lösen das Spannungsproblem zu diesem aus $(+k_x, -k_x)$ bestehenden Angriffssysteme. Die Stabkraft des Stabes u in seinem Anfangspunkte sei τ_u'.

Ebenso lassen wir darauf an Φ an den Endpunkten des herausgenommenen Stabes y ein Kräftepaar $(+k_y, -k_y)$ wirken und lösen das diesem einfachen Angriffssystem entsprechende Spannungsproblem; es möge für den Stab u in seinem Anfangspunkte die Kraft τ_u'' ergeben. Ähnlich sei τ_u''' die Kraft des Stabes u in seinem Anfangspunkte, die bei der Belastung des Fachwerks Φ mit einem Kräftepaar $(+k_z, -k_z)$ an den Endpunkten der Strecke z auf der Geraden z eintritt, usw.

7. Nach dem Superpositionsgesetz entspricht dann dem Angriffssystem

$$(1) \qquad (\Pi) = (P) + \alpha(+k_x, -k_x) + \beta(+k_y, -k_y) + \gamma(+k_z, -k_z) + \cdots$$

des Fachwerks Φ im Stabe u an seinem Anfangspunkte die Stabkraft:

$$(2) \qquad t_u = \tau_u + \alpha\tau_u' + \beta\tau_u'' + \gamma\tau_u''' + \cdots,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ beliebige reelle Zahlen bedeuten. Diese suchen wir nun so zu bestimmen, daß die Ersatzstäbe $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ von Φ kraftlos werden. Das gibt für $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Bedingungsgleichungen:

$$(3) \qquad \begin{aligned} 0 &= \tau_\xi + \alpha\tau_\xi' + \beta\tau_\xi'' + \gamma\tau_\xi''' + \cdots, \\ 0 &= \tau_\eta + \alpha\tau_\eta' + \beta\tau_\eta'' + \gamma\tau_\eta''' + \cdots, \\ 0 &= \tau_\zeta + \alpha\tau_\zeta' + \beta\tau_\zeta'' + \gamma\tau_\zeta''' + \cdots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

deren Anzahl mit der der Unbekannten übereinstimmt. Hat man $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ aus diesen Gleichungen berechnet und in den Formeln (1), (2) eingesetzt, so hat man ein Angriffssystem (1) an Φ, daß die Ersatzstäbe spannungslos läßt. Wir denken uns nun die Kräfte (1) und die ihnen entsprechenden Stabkräfte an die entsprechenden Knoten von F verlegt und betrachten die Paare $\alpha(-k_x, +k_x)$, $\beta(-k_y, +k_y)$, $\gamma(-k_z, +k_z), \ldots$, die auf die Stäbe $x, y, z, \ldots$ fallen, als Stabkräfte dieser Stäbe, wo zu beachten ist, daß wir die Vorzeichen umgekehrt

haben. Jetzt herrscht in jedem Knotenpunkte von F Gleichgewicht zwischen den Stabkräften und den umgekehrten Angriffskräften, d. h. wir haben am Fachwerk F das Spannungsproblem zu dem Angriffssystem (P) gelöst. Im Stabe u von F wirkt demnach am Anfangspunkte die Kraft t_u, die sich aus (2) mittels der aus (3) fließenden Werte von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ berechnet; das gilt für alle Stäbe von F, die bei der Herleitung von Φ nicht herausgenommen werden. In diesen dagegen, also in $x, y, z, \ldots$, hat man die Kräftepaare $\alpha(-k_x, +k_x), \beta(-k_y, +k_y), \gamma(-k_z, +k_z), \ldots$.

8. Um zunächst den Schematismus der Lösung durch ein Beispiel zu belegen, nehmen wir das von Müller-Breslau[1]) und von

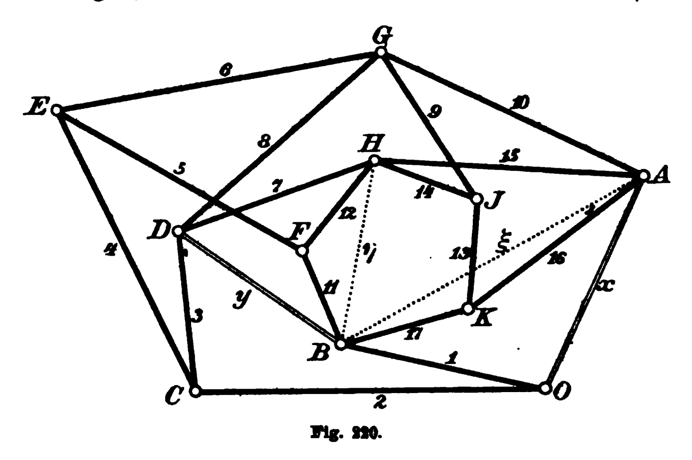


Fig. 220.

Henneberg[2]) behandelte stabile und einfache Fachwerk Figur 220 mit 11 Knotenpunkten. Wie man sieht, ist kein zweistabiger Knotenpunkt vorhanden, und die Lösung des Spannungsproblems ist ohne Vorbereitung nicht möglich; die Schnittmethode versagt. Ließe sich aber beweisen, daß das Fachwerk durch Wegnahme der Stäbe $x = OA$ und $y = BD$ und ersatzweise Einführung der Stäbe $\xi = AB$ und $\eta = BH$ die Stabilität und Einfachheit nicht einbüßt, so wäre an dem so modifizierten Fachwerk Φ die Lösung leicht. Denn nun ist O ein zweistabiger Knoten, zu dem das Krafteck sofort hingezeichnet werden kann; damit sind die Stäbe 1 und 2 erledigt. Jetzt sind am Knoten C nur zwei unbekannte Kräfte, nämlich die der Stäbe 3 und 4; diese können also ebenfalls konstruiert werden. Damit ist der Knoten E

1) Müller-Breslau, Graphische Statik der Baukonstruktionen, 1887, S. 212.

2) Henneberg, Über die Bildungsgesetze der Fachwerke und deren Verwendung bei der Bestimmung der Spannungen, Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, Jahrg. 1903, Heft 6.

aufgeschlossen, womit die Stäbe 5 und 6 erledigt sind. Dann kommt D mit den Stäben 7 und 8 an die Reihe, G mit 9 und 10, F mit 11 und 12, J mit 13 und 14, H mit 15 (und η), A mit 16 (und ξ), K mit 17. Da also das Spannungsproblem an Φ für jedes Angriffssystem eindeutig lösbar ist, so ist Φ statisch bestimmt, also stabil und einfach. Ist nun an F ein Angriffssystem (P) gegeben, so hat man nach Henneberg zuerst dieses System an Φ anzubringen und die Spannungen für Φ zu bestimmen, was beim vorliegenden Fachwerk leicht mit der Kräfteplanmethode geschehen kann. In dem beliebigen Stabe u sei so in seinem (willkürlich definierte) „Anfangspunkte" die Stabkraft τ_u gefunden. Darauf bringen wir an Φ in den Endpunkten des herausgenommenen Stabes $x = AO$ ein auf x liegendes Kräftepaar $(+k_x, -k_x)$ an, $+k_x$ etwa an A, $-k_x$ an O, und lösen das Spannungsproblem zu $(+k_x, -k_x)$ als Angriffssystem. Die Stabkraft auf u sei im Anfangspunkte gleich τ_u'. Ebenso bringen wir an den Endpunkten des herausgenommenen Stabes $y = BD$ auf y ein Gegenpaar $(+k_y, -k_y)$ an, $+k_y$ an B, $-k_y$ an D, und lösen abermals das Spannungsproblem, das für u im Anfangspunkte die Kraft τ_u'' ergeben möge. Dann setzt man

$$t_u = \tau_u + \alpha\tau_u' + \beta\tau_u''$$

und sucht die Parameter α, β so zu bestimmen, daß die Ersatzstäbe ξ, η kraftlos bleiben. Das gibt:

$$0 = \tau_\xi + \alpha\tau_\xi' + \beta\tau_\xi'',$$
$$0 = \tau_\eta + \alpha\tau_\eta' + \beta\tau_\eta'',$$

wodurch α, β bestimmt sind. Die mit diesen Werten gebildete Formel $t_u = \tau_u + \alpha\tau_u' + \beta\tau_u''$ gibt dann die Lösung des Spannungsproblems zu (P) am Fachwerk F für alle Stäbe, die F mit Φ gemein hat; in x dagegen hat man in O und A die Kräfte $+\alpha k_x$ und $-\alpha k_x$, in y an D und B die Kräfte $+\beta k_y$ und $-\beta k_y$. Damit ist das Problem für F vollständig gelöst.

9. Es bleibt nur noch zu erklären, wie man in der zweckmäßigsten Weise die Ersatzstäbe eintauscht; es leuchtet zwar hinterher ein, daß unsere Wahl gut war, aber man sieht nicht, wie man darauf kommt. In manchen Fällen gelingt es, durch einen glücklichen Griff das Richtige zu treffen, wie das besonders Müller-Breslau durch freiere Verwendung des Grundgedankens der Hennebergschen Methode gezeigt hat. Henneberg selber legt mehr Wert auf methodisches Vorgehen und stützt sich auf die Tatsache, daß ein statisch bestimmtes Fachwerk stets zweistabige oder dreistabige Knotenpunkte hat.

Wenn, wie in unserem Beispiele, zweistabige Knoten fehlen, so nimmt man an einem Knoten O, von dem drei Stäbe OA, OB, OC ausgehen, einen Stab, etwa OA, hinweg und stellt durch Einfügung eines geeigneten Ersatzstabes die Stabilität und Einfachheit wieder her. Das ist nach dem Schurschen Satze § 42, 7. stets möglich.

Nach Henneberg kann dieser Ersatzstab unter den Strecken AB, BC, CA gewählt werden, die nicht sämtlich bereits Stäbe des Fachwerks sind. Nach Wegnahme von OA wird nämlich unser Fachwerk F instabil, gestattet also isokline und nicht ähnliche Geschwindigkeitspläne Φ'; in diesen kann sich das Dreieck ABC nicht durchweg als geometrisch starre Figur verhalten, weil sonst auch O durch OB und OC mit ABC starr verbunden wäre — abgesehen von den in Satz 3 § 42 genannten Ausnahmefällen — und an dieser Tatsache würde durch Einziehen von OA nichts geändert. Dann hätte man isokline, aber nicht ähnliche Geschwindigkeitspläne von F selber, wodurch die Instabilität von F bewiesen würde, im Widerspruch zu der Voraussetzung. Daher ist die Angabe Hennebergs mit den erwähnten Ausnahmen richtig.

10. Welche von den Strecken AB, BC, CA sich zur Einfügung eines Ersatzstabes ξ eignet, läßt sich im allgemeinen nur auf Grund eines Geschwindigkeitsplanes beurteilen. Will man auf dieses Hilfsmittel verzichten, so muß man die Wahl auf gut Glück treffen; sollte der so gewählte Stab zufällig die Stabilität nicht herbeiführen, so würde sich das, wie wir im nächsten Artikel sehen werden, hinterher herausstellen. Wir entscheiden uns in unserem Beispiel für den Ersatzstab AB. Durch die Entfernung von OA ist O ein Zweistabknoten geworden, den wir unbeschadet der Stabilität mit den Stäben OB und OC beseitigen könnten. Das wollen wir vorübergehend wirklich tun. Darauf können aus demselben Grunde CD und CE weggenommen werden, darauf EF, EG und FB, FH, so daß schließlich das Fachwerk Figur 221[1]) übrig bleibt, das sicher einfach und stabil ist, wenn durch die Vertauschung von x mit ξ die Stabilität nicht aufgehoben worden ist.

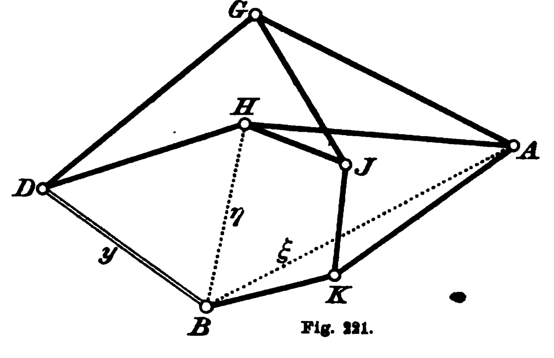


Fig. 221.

1) Vgl. Figur 215.

11. Das Fachwerk Figur 221 hat nun wiederum keinen Zweistabknoten, wird aber durch Wegnahme von $y = BD$ und ersatzweise Einfügung von $\eta = BH$ aufgeschlossen. Das so entstehende Fachwerk ist aber statisch bestimmt, denn man kann bei beliebigem Angriffssysteme zuerst die Stabkräfte in DG, DH eindeutig bestimmen, dann in GJ, GA, in JH, JK, in KA, KB und endlich in AH, AB, BH. Damit ist bewiesen, daß die vorgenommenen Stabvertauschungen die Stabilität und Einfachheit nicht aufgehoben haben; wäre das zuletzt erhaltene Fachwerk instabil, so wären die Vertauschungen nicht sämtlich erlaubt gewesen. Nun ist auch das Fachwerk Φ statisch bestimmt, das aus dem ursprünglichen Fachwerk F durch Vertauschung der Stäbe x, y mit ξ, η hervorgeht; denn von Φ gelangt man zu dem letzten Fachwerk Figur 221 durch folgeweise Wegnahme der Stäbe von Zweistabknoten, was die statische Bestimmtheit nicht beeinträchtigt (§ 43, Satz 1); Φ ist aber das Fachwerk, mittels dessen man nach Artikel 9 das Spannungsproblem von F selber lösen kann.

12. Der Kunstgriff, die Zweistabknoten samt ihren Stäben nach und nach wegzunehmen, erleichtert die Übersicht ganz erheblich. Ist ein stabiles, einfaches Fachwerk F gegeben, so gelangt man nunmehr zu dem entsprechenden Fachwerk Φ, das die Methode von Henneberg verlangt, auf folgendem Wege: Man beseitigt alle Zweistabknoten mit ihren Stäben, auch die, welche auf diese Weise zu Zweistabknoten werden, bis schließlich ein Fachwerk ohne Zweistabknoten übrig bleibt. Unser Beispiel betraf ein Fachwerk, bei dem diese Vorbereitung nicht nötig war, indem zweistabige Knoten von vornherein fehlten. Jetzt ist sicher ein Knoten O mit nur drei Stäben OA, OB, OC vorhanden. Einer davon, etwa $x = OA$, wird beseitigt und durch einen neuen Stab ξ ersetzt, der unter der Strecken AB, BC, CA gewählt werden darf. Dadurch wird O ein Zweistabknoten; dieser wird wiederum mit seinen Stäben beseitigt, und dann der Reihe nach jeder Knoten nebst Stäben, der durch diesen Vorgang zum Zweistabknoten wird. Bleibt schließlich ein Fachwerk ohne Zweistabknoten übrig, so hat es sicher wieder (mindestens sechs) Dreistabknoten. An einem von ihnen verfährt man wie bei O, indem man einen seiner Stäbe y wegnimmt und durch einen Verbindungsstab η zweier der drei Punkte ersetzt, nach denen von jenem Knoten aus Stäbe hinführen; so fährt man fort, bis man auf ein Fachwerk stößt, an dem das Spannungsproblem lösbar ist. Nimmt man nun die im Laufe dieses Reduktionsverfahrens vorgekommenen Stabvertauschungen an dem Fachwerk F selbst vor — wobei also die Wegnahme der Zweistabknoten unterbleibt —, so erhält man ein zur Anwen-

dung der Hennebergschen Methode (Art. 8, 9) geeignetes Fachwerk Φ.

13. Mit einer Stabvertauschung reicht man bei dem in Art. 2 besprochenen Fachwerk Figur 217 aus, wenn man etwa $O_3 U_3$ durch AB ersetzt. Man berechnet dann die Kräfte auf $O_3 U_3$ nach dem Hennebergschen Verfahren und bestimmt die übrigen Stabkräfte in der Reihenfolge $O_3 O_2$, $O_3 O_4$; $O_4 O_5$, $O_4 U_4$; $O_5 B$, $O_5 U_5$; $O_2 O_1$, $O_2 U_2$; $O_1 A$, $O_1 U_1$; $U_1 A$, $U_1 B$; $U_2 A$, $U_2 B$; $U_3 A$, $U_3 B$; $U_4 A$, $U_4 B$; $U_5 A$, $U_5 B$.[1])

§ 45. Das elastische Fachwerk.

1. Bis jetzt haben wir angenommen, daß jeder Stab $\mathfrak{S}_\sigma$ eines Fachwerks das unter Einwirkung eines Angriffssystems (U) ihm zukommende Kräftepaar $(t_\sigma^{(U)}, -t_\sigma^{(U)})$ vollkommen zerstört. In Wirklichkeit erfährt aber der Stab durch dieses Kräftepaar eine Verlängerung oder Verkürzung, je nachdem es sich um Zug oder Druck handelt. Indem wir im folgenden den Druck als negativen Zug, eine Stabverkürzung als negative Verlängerung auffassen, und den Zug immer positiv messen, können wir sagen, daß das Kräftepaar, das einen Zug von der Größe $t_\sigma^{(U)}$ bewirkt, den Stab $\mathfrak{S}_\sigma$ verlängert. Nach dem Hookeschen Grundgesetze der Elastizitätslehre ist diese Verlängerung dem Zuge proportional, d. h., wenn wir noch einen anderen Zug von der Größe $t_\sigma^{(V)}$ in Betracht ziehen, so verhalten sich die den Zügen $t_\sigma^{(U)}$, $t_\sigma^{(V)}$ entsprechenden Verlängerungen $\Delta^{(U)} l_\sigma$, $\Delta^{(V)} l_\sigma$ der Länge l_σ des Stabes $\mathfrak{S}_\sigma$ wie die spannenden Kräfte:

$$\Delta^{(U)} l_\sigma : \Delta^{(V)} l_\sigma = t_\sigma^{(U)} : t_\sigma^{(V)} \tag{1}$$

oder:

$$t_\sigma^{(U)} \Delta^{(V)} l_\sigma = t_\sigma^{(V)} \Delta^{(U)} l_\sigma . \tag{2}$$

2. Die bei dem Zuge $(t_\sigma^{(U)}, -t_\sigma^{(U)})$ eintretende Verlängerung des Stabes $\mathfrak{S}_\sigma$ berechnet sich nach dem Elastizitätsgesetz mittels der Formel

$$\Delta^{(U)} l_\sigma = \frac{1}{E} \frac{l_\sigma}{f_\sigma} t_\sigma^{(U)}, \tag{3}$$

wo E eine Materialkonstante, den „Elastizitätsmodul" des Eisens, und f_σ den Querschnitt des prismatischen Stabes bezeichnet. Da der Zug $t_\sigma^{(U)}$ in der Technik durch eine (positive) Anzahl von Kilogramm

1) Dieses Fachwerk stammt nebst der angegebenen Lösung von H. Kayser, Rig. Ind.-Ztg, 1898, Nr. 6 und 7. Wir entnehmen es der oben (S. 327) zitierten Abhandlung von Henneberg.



gemessen wird, hat E die Dimensionen des Quotienten aus 1 kg durch das Quadrat der Längeneinheit. Für Schweiß- und Flußeisen ist etwa

$$(4) \qquad E = 2\,000\,000 \text{ kg/cm}^2 = 2000\ t/\text{cm}^2,$$

wenn t die Tonne (= 1000 kg) bezeichnet. Infolge unserer Übereinkunft, Zug positiv zu messen und Druck als negativen Zug aufzufassen, ergibt sich die Stabverlängerung aus (3) auch hinsichtlich des Vorzeichens richtig.

3. Die Lehre von der elastischen Formänderung des Fachwerks unter der Einwirkung irgend eines Angriffssystems läßt sich so einfach begründen, daß außer den vorangehenden Hilfsformeln aus der Elastizitätstheorie nur noch der Momentensatz der Statik erforderlich ist. Wir gehen aus von einem stabilen (aber nicht notwendig einfachen) Fachwerk $\mathfrak{F}$ von k Knoten und

$$(5) \qquad s = 2k - 3 + p$$

Stäben, das dem Angriffssystem (U), bestehend aus den Kräften

$$(6) \qquad U_1,\ U_2, \ldots, U_k \text{ an den Knoten } 1, 2, \ldots, k$$

ausgesetzt ist. Die absolute Größe der Kraft $U_\varkappa$ sei $U_\varkappa$. In jedem Knoten besteht Gleichgewicht zwischen den dem System (U) entsprechenden Stabkräften $t_\sigma^{(U)}$, $(\sigma = 1, 2, \ldots, s)$, und den umgekehrten Angriffskräften.

Wir drehen nun sämtliche Stabkräfte und die umgekehrten Angriffskräfte um ihre Angriffspunkte in positivem Sinne um 90 Grad. Dann stehen auch die gedrehten Kräfte an jedem Knoten für sich im Gleichgewicht, und die Summe ihrer statischen Momente für irgend einen Drehpunkt ist daher gleich Null. Von dieser einfachen Überlegung verwerten wir nur die Folgerung, daß auch die Momentensumme aller gedrehten Kräfte verschwindet.

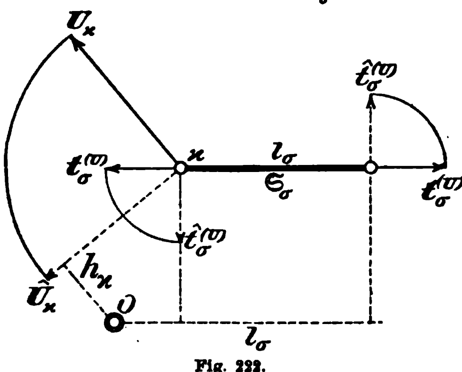


Fig. 222.

Die gedrehte Kraft $U_\varkappa$ mit $\hat{U}_\varkappa$, den orientierten Hebelarm von $\hat{U}_\varkappa$ an O mit $h_\varkappa$ bezeichnend (Fig. 222), haben wir demnach die Gleichung:

$$(7) \qquad \sum_{\varkappa} U_\varkappa h_\varkappa = \sum_{\sigma} l_\sigma t_\sigma^{(U)},$$
$$(\varkappa = 1, 2, \ldots, k;\ \sigma = 1, 2, \ldots, s),$$

da die Zugkräfte an beiden Enden des Stabes $\mathfrak{S}_\sigma$ durch die Drehung in ein Kräftepaar vom Momente $l_\sigma t_\sigma^{(U)}$ übergehen; die Summe der Momente eines solchen Paares ist von der Wahl des Drehpunktes unabhängig und eben gleich dem „Momente" des Kräftepaares (§ 24.).

4. Jetzt nehmen wir für die Knotenpunkte von $\mathfrak{F}$ neue Lagen $1', 2', \ldots, k'$ an und verbinden diese neuen Knotenpunkte ebenso zu einem Fachwerk $\mathfrak{F}'$, wie die ursprünglichen Knotenpunkte zu dem Fachwerk $\mathfrak{F}$ verbunden waren, unbekümmert darum, ob $\mathfrak{F}'$ stabil ist oder nicht. Dann ist $\mathfrak{F}'$ mit $\mathfrak{F}$ gleichgegliedert, aber nicht notwendig isoklin. Es wird also der zu $\mathfrak{S}_\sigma$ homologe Stab $\mathfrak{S}_\sigma'$ von $\mathfrak{F}'$, dessen Länge wir mit l_σ' bezeichnen, gegen $\mathfrak{S}_\sigma$ eine von Null verschiedene Neigung μ_σ haben können, die irgendwie eindeutig definiert sei (Fig. 223).

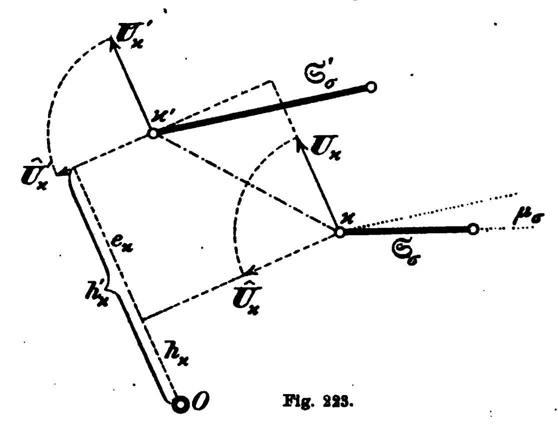


Fig. 223.

Die gedrehten Kräfte des Fachwerks $\mathfrak{F}$ werden (parallel zu sich) an die entsprechenden Knoten von $\mathfrak{F}'$ verschoben. Dann ist natürlich auch an jedem Knoten von $\mathfrak{F}'$ Gleichgewicht, und es gilt also eine zu (7) analoge Momentengleichung. Die Angriffslinien des gedrehten Kräftepaares von $\mathfrak{S}_\sigma'$ haben die gegenseitige Entfernung $l_\sigma' \cos\mu_\sigma$, also ist sein Moment gleich $l_\sigma' t_\sigma^{(U)} \cos\mu_\sigma$. Ist $h_\varkappa'$ der orientierte Hebelarm der nach $\varkappa'$ verschobenen Kraft $\hat{U}_\varkappa$ am Drehpunkt O, so ist demnach

$$(8) \qquad \sum_{\varkappa} U_\varkappa h_\varkappa' = \sum_{\sigma} l_\sigma' t_\sigma^{(U)} \cos\mu_\sigma .$$

Hierin setzen wir $\cos\mu_\sigma = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}\mu_\sigma$ und subtrahieren die Gleichung (7) von (8). Das gibt:

$$(9) \qquad \sum_{\varkappa} U_\varkappa (h_\varkappa' - h_\varkappa) = \sum_{\sigma} (l_\sigma' - l_\sigma) t_\sigma^{(U)} - 2 \sum_{\sigma} l_\sigma' t_\sigma^{(U)} \sin^2 \tfrac{1}{2}\mu_\sigma .$$

5. Diese Formel gilt ohne Einschränkung hinsichtlich der Abstände $\varkappa\varkappa'$. Nun setzen wir voraus, daß das Fachwerk $\mathfrak{F}'$ aus $\mathfrak{F}$

hervorgeht, wenn $\mathfrak{F}$ der deformierenden Wirkung irgend eines Angriffssystems (V) unterworfen wird. Dann ist

$$(10) \qquad l_\sigma' - l_\sigma = \Delta^{(V)} l_\sigma$$

die Verlängerung, die der Stab $\mathfrak{S}_\sigma$ unter dem Einflusse von (V) erleidet. Durch diese Änderungen der Stablängen gehen die Knotenpunkte von $\mathfrak{F}$ aus den Lagen $1, 2, \ldots, k$ in die Lagen $1', 2', \ldots, k'$ über, der Angriffspunkt $\varkappa$ von $U_\varkappa$ erleidet also eine Verschiebung $\varkappa\varkappa'$, und $h_\varkappa' - h_\varkappa = e_\varkappa$ ist die senkrechte Projektion dieser Verschiebung auf die Angriffslinie von $U_\varkappa$, gemessen mit positivem oder negativem Vorzeichen, je nachdem die Projektion von $\varkappa'$ in der Richtung von $U_\varkappa$ gegen $\varkappa$ vorgeschoben ist oder nicht.

> Daher ist $U_\varkappa(h_\varkappa' - h_\varkappa) = U_\varkappa e_\varkappa$ die Arbeit, die von der an den Angriffspunkt $\varkappa$ geknüpften Kraft $U_\varkappa$ geleistet wird, während das System (V) den Punkt $\varkappa$ nach $\varkappa'$ verschiebt.

Da hierbei die Kraft $U_\varkappa$ tatsächlich nicht am Fachwerk wirkt, das ganze System (U) vielmehr nur zeichnerisch an dem Fachwerk $\mathfrak{F}$ angebracht ist und die Arbeit $U_\varkappa e_\varkappa$ nur formal rechnerisch, nicht in Wirklichkeit geleistet wird, so nennt man sie eine „virtuelle" Arbeit. Wäre das System (U) neben (V) am Fachwerk wirksam, so würden ja ganz andere Verschiebungen der Knoten eintreten. Auf der linken Seite von (9) steht demnach die vom System (U) geleistete virtuelle Arbeit, wenn (V) das Fachwerk deformiert. Wir bezeichnen diese Arbeit mit

$$(11) \qquad \sum U_\varkappa e_\varkappa = \text{Arbeit}^{(V)}(U).$$

Wegen (10) ist also

$$(12) \quad \text{Arbeit}^{(V)}(U) = \sum_\sigma t_\sigma^{(U)} \Delta^{(V)} l_\sigma - 2 \sum_\sigma (l_\sigma + \Delta^{(V)} l_\sigma) t_\sigma^{(U)} \sin^2 \tfrac{1}{2}\mu_\sigma.$$

6. Läßt man die Systeme (U) und (V) an $\mathfrak{F}$ ihre Rolle vertauschen, indem (U) deformiert und (V) rein zeichnerisch die Bewegung mitmacht, so gilt analog zu (12) die Gleichung

$$(13) \quad \text{Arbeit}^{(U)}(V) = \sum_\sigma t_\sigma^{(V)} \Delta^{(U)} l_\sigma - 2 \sum_\sigma (l_\sigma + \Delta^{(U)} l_\sigma) t_\sigma^{(V)} \sin^2 \tfrac{1}{2}\nu_\sigma,$$

wo ν_σ die durch (U) bewirkte Drehung des Stabes $\mathfrak{S}_\sigma$ mißt. Unsere Absicht ist, die Arbeiten (12) und (13) miteinander zu vergleichen. Zu diesem Zwecke bilden wir ihre Differenz. Mit Rücksicht auf (2) ist:

$$\begin{aligned}&\text{Arbeit}^{(V)}(U) - \text{Arbeit}^{(U)}(V) = \\ &- 2\sum_\sigma l_\sigma (t_\sigma^{(U)} \sin^2 \tfrac{1}{2}\mu_\sigma - t_\sigma^{(V)} \sin^2 \tfrac{1}{2}\nu_\sigma) \\ &- 2\sum_\sigma (t_\sigma^{(U)} \varDelta_\sigma^{(V)} \sin^2 \tfrac{1}{2}\mu_\sigma - t_\sigma^{(V)} \varDelta_\sigma^{(U)} \sin^2 \tfrac{1}{2}\nu_\sigma),\end{aligned}$$

und indem man auf die zweite Summe noch einmal (2) anwendet:

$$\begin{aligned}&\text{Arbeit}^{(V)}(U) - \text{Arbeit}^{(U)}(V) = \\ &- 2\sum_\sigma l_\sigma (t_\sigma^{(U)} \sin^2 \tfrac{1}{2}\mu_\sigma - t_\sigma^{(V)} \sin^2 \tfrac{1}{2}\nu_\sigma) \\ &- 2\sum_\sigma t_\sigma^{(U)} \varDelta_\sigma^{(V)} l_\sigma (\sin^2 \tfrac{1}{2}\mu_\sigma - \sin^2 \tfrac{1}{2}\nu_\sigma).\end{aligned} \tag{14}$$

Diese Gleichung ist nun weiter auszuarbeiten unter Berücksichtigung der Größenordnung ihrer Glieder. Links stehen Produkte aus Angriffskräften und den Verschiebungen der Knotenpunkte in der Richtung dieser Kräfte. Diese Verschiebungen sind im Vergleich zu den Stablängen klein von der ersten Ordnung. In der ersten Summe rechts stehen die Stabkräfte, die von der gleichen Größenordnung sind wie die Angriffskräfte, wie wir aus den zahlreichen Kräfteplänen der vorangegangenen Paragraphen ersehen können; die Sinus der Winkel μ_σ, ν_σ sind noch kleiner als die Verschiebungen der Knotenpunkte und die Stabverlängerungen im Verhältnis zu den Stablängen, ihre Quadrate sind mindestens von der zweiten Ordnung klein. Die zweite Summe rechts ist noch erheblich kleiner als die erste. Die rechte Seite von (14) ist daher um eine Größenordnung kleiner wie die linke und in der Annäherung, mit der sich die Elastizitätslehre begnügt, gleich Null. Also

$$\text{Arbeit}^{(V)}(U) = \text{Arbeit}^{(U)}(V). \tag{15}$$

Aus denselben Gründen darf man auf der rechten Seite von (12) die zweite Summe unterdrücken und findet:

$$\text{Arbeit}^{(V)}(U) = \sum_\sigma t_\sigma^{(U)} \varDelta^{(V)} l_\sigma. \tag{16}$$

7. Die Gleichungen (15) und (16) enthalten die Fundamentalsätze der Lehre vom elastischen Fachwerk; Gleichung (15) ist der analytische Ausdruck für den

Satz von Maxwell[1]): Während der Deformation durch das

1) In § 38 haben wir die „Addition" der Angriffssysteme sowie ihre „Multiplikation" mit reellen Zahlen definiert. Eine neue Art multiplikativer Verknüpfung, und zwar von zwei Angriffssystemen (U) und (V), erhält man durch die Definition

$$(U) \times (V) = \text{Arbeit}^{(V)}(U).$$

Angriffssystem (U) leistet das Angriffssystem (V) dieselbe virtuelle Arbeit wie das Angriffssystem (U) während der Deformation durch (V).

Aus Gleichung (16) folgt der

Satz über die virtuelle Arbeit der Stabkräfte: Die virtuelle Arbeit, die das Angriffssystem (U) leistet, während (V) das Fachwerk deformiert, ist gleich der virtuellen Arbeit, welche die von (U) hervorgerufenen Stabkräfte leisten, während die Stäbe unter dem Einfluß von (V) ihre Länge ändern.

Diese Stabkräfte sind während dieses Vorganges nicht etwa in den Stäben wirksam, sondern ihre Arbeit ist eine reine Rechengröße. Wenn man dennoch dem Satze diese dynamische Einkleidung gibt, so hat das nur den Zweck, der Formel (16) eine anschauliche Deutung zu geben, die sich leicht dem Gedächtnis einprägt.

Auf diesen Sätzen beruht die Berechnung der Spannkräfte in den stabilen Fachwerken mit überzähligen Stäben, worauf wir aber nicht weiter eingehen können. Für weitergehende Interessen verweisen wir auf die großen Lehrbücher von Henneberg, Müller-Breslau, Ostenfeld und Mohr.

Dann sagt der Satz von Maxwell:

$$(V) \times (U) = (U) \times (V),$$

d. h. es gilt das kommutative Gesetz der Multiplikation. Auch gilt das distributive Getetz

$$(U) \times [(V) + (W)] = (U) \times (V) + (U) \times (W).$$

ZWEITES BUCH

WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

Sechster Abschnitt.

Prinzipien der Wahrscheinlichkeit.

§ 46. Kausalität.

1. Eine Anwendung des Zahlbegriffs auf das Geschehen in der Außenwelt von ganz eigener Art ist die sogenannte Wahrscheinlichkeitsrechnung. Sie hat nicht den Zweck, Eigenschaften oder Beziehungen der Objekte der Außenwelt durch Zahlen darzustellen, sondern sie drückt durch die Zahlen einen gewissen Zustand unserer eigenen Meinung und Erwartung über die Ereignisse aus.

Es ist viel und treffliches über den Wert und die Bedeutung der Aussagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung gedacht und geschrieben worden, aber trotzdem ist nicht zu leugnen, daß über den Grundvoraussetzungen dieser Lehre, die sich unserem Verstande mit axiomatischer Gewißheit aufdrängen, noch ein Dunkel schwebt. Vielleicht gelingt es, dieses Dunkel teilweise aufzuhellen, wenn wir auch hier an den Mengenbegriff und den Begriff der Abbildung anknüpfen, die, wie wir schon beim Zahlbegriff gesehen haben, und wie sich auch in der Geometrie zeigt, die Grundlage alles mathematischen Schaffens sind.[1])

---

1) Es ist wohl selbstverständlich, daß sich bei den zu allen Zeiten üblichen Glücksspielen eine gewisse natürliche Wahrscheinlichkeitsrechnung herausgebildet hat. Von wissenschaftlichen Bearbeitern des Gegenstandes sind zunächst Blaise Pascal und Fermat (um 1654) zu nennen. Es ist ferner zu erwähnen Huygens: de ratiociniis in ludo aleae (1657) und die „Ars conjectandi" (Wahrscheinlichkeitsrechnung) von Jacob Bernoulli (1713, acht Jahre nach des Verfassers Tode von seinem Neffen Nikolaus I Bernoulli herausgegeben), in deutscher Übersetzung von Haußner in Ostwalds Klassikern, Leipzig 1899. Wir nennen sodann die klassischen Werke von Laplace, „Théorie analytique des probabilités" (1809, 3. Aufl. 1820), Essai philosophique sur les probabilités (1814, 6. Aufl. 1840, deutsch von Schwaiger, Leipzig 1886) und Poisson, Recherches sur la probabilité des jugements.

Neuere Lehrbücher sind: Poincaré, „Calcul des Probabilités", 1896. Czuber, (Leipzig, Teubner 1908/10) und Bruns (Leipzig, Teubner 1906).

Über die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung handelt Todhunter,

2. Die Bildung von Wahrscheinlichkeitsurteilen beruht in erster Linie auf den Begriffen der Ursache, der Gesetzmäßigkeit und des Zufalls, und diese müssen wir daher zunächst erörtern, wenn wir eine sichere Grundlage gewinnen wollen.

Die Voraussetzung einer notwendigen, gesetzmäßigen Aufeinanderfolge des Geschehens liegt jeder naturwissenschaftlich-mechanischen Weltanschauung zu Grunde. Danach ist die Aufeinanderfolge der Ereignisse eine vollkommen und eindeutig bestimmte, und es läßt sich, ohne eine andere Welt anzunehmen, nicht ein einziges Glied aus der Kette der Ereignisse hinweg oder hinzu denken. Es ist also unzulässig, den Begriff des ursächlichen Zusammenhanges des Geschehens so zu erklären, daß man sagt, ein A ist die Ursache von B oder B die Wirkung von A, wenn B nicht sein würde, falls A nicht wäre.

Welcher greifbare Sinn bleibt aber für den Begriff der Ursache übrig, wenn der tatsächliche Verlauf der Welt in nichts unterschieden ist von einem notwendigen und gesetzmäßigen?

3. Die hier angedeutete Schwierigkeit überwinden wir durch Anwendung des Mengen- oder Klassenbegriffs. Unter einem Ereignis verstehen wir eine Zustandsänderung in der Zeit. Jedes Ereignis fordert eine Ursache. Um aber einen deutlichen Begriff von dieser Forderung zu gewinnen, fassen wir die Ereignisse zu Klassen zusammen, wir betrachten also Mengen, deren Elemente Ereignisse sind.

Wir können solche Klassen zunächst gänzlich nach unserer Willkür bilden. Es ist aber daran festzuhalten, daß die Definition der Klasse so scharf sein muß, daß von jedem Einzelereignis völlig bestimmt ist, ob es der Klasse angehört oder nicht. Wir können uns vorstellen, daß eine Klasse unendlich viele — vergangene und zukünftige — Ereignisse enthält, auch wenn uns die Erfahrung nur eine begrenzte Anzahl oder vielleicht sogar nur eines von ihnen gegeben hat.

4. Wenn zwei Ereignisklassen U und W in der Beziehung zueinander stehen, daß jedem Ereignis u der Klasse U ein Ereignis w

---

„A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace" (1865) und M. Cantor in seiner Geschichte der Mathematik. Viele Untersuchungen über die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind veröffentlicht worden. Wir erwähnen J. v. Kries, „Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung", Freiburg i. B. 1886, und die Königsberger Rektoratsrede von H. Weber, „Über Kausalität in den Naturwissenschaften", Leipzig, Engelmann 1881. Vgl. auch die Anmerkungen in der deutschen Ausgabe von Poincaré, „Wert der Wissenschaft", Leipzig, Teubner 1906.

der Klasse W **unmittelbar** folgt und umgekehrt jedem Ereignis w aus W ein Ereignis u aus U unmittelbar vorausgeht, so heißt U die **Ursachsklasse** von W und W die **Wirkungsklasse** von U.

Besteht zwischen den Klassen U und W diese Beziehung, so heißt das Einzelereignis u die Ursache von w und w die Wirkung von u.

Das uns eingepflanzte Kausalitätsgesetz besteht in nichts anderem als in der Überzeugung, daß sich zu jeder beliebig abgegrenzten Ereignisklasse W eine Klasse U abgrenzen läßt, die nach der gegebenen Definition als deren Ursachsklasse zu betrachten ist.

Woher uns diese Überzeugung kommt, das ist eine Frage, auf die ich keine Antwort habe.

Die Bestimmung, daß die Ursache U der Wirkung W **unmittelbar** vorangehe, wird durch folgende Betrachtung modifiziert. Die Klasse U wird ihrerseits wieder eine Ursache U_1 haben, diese eine Ursache U_2 u. s. f., und man kann dann auch U_1 oder U_2 u. s. f. als Ursache von W betrachten und in diesem Sinne kann auch zwischen der Ursache und der Wirkung ein Zeitraum liegen. Zeigt sich in der Länge dieses Zeitraumes eine Regelmäßigkeit, so ist dies als ein Kennzeichen des ursächlichen Zusammenhanges zu betrachten. Immer aber muß die gesamte Kette von Ursachen hinzugedacht werden, und welches Glied der Kette wir herausgreifen und als Ursache bezeichnen, hängt außer von unserer Kenntnis besonders auch von dem speziellen Interesse ab, das wir im einzelnen Falle an der Erscheinung haben.

5. Zur vollständigen Abgrenzung einer Ereignisklasse wird meist eine größere Zahl von Bestimmungen und Angaben erforderlich sein, falls nicht die Sprache schon einfache Benennungen dafür bietet. Oft aber wird es für den gerade vorliegenden Zweck nicht erforderlich sein, diese Angaben alle genau aufzuführen. Sie werden zum Teil als selbstverständlich oder als für den gerade vorliegenden Zweck ohne Bedeutung übergangen werden können. Daraus erklärt es sich, daß der Sprachgebrauch in Beziehung auf die Zuordnung von Ursache und Wirkung häufig unbestimmt und ungenau ist.

Man wird vielleicht im physikalischen Unterrichte sagen, die Ursache einer Schallempfindung seien gewisse Wellenbewegungen der Luft, während man in anderem Zusammenhange etwa den Bau unseres Gehörorgans oder einen Kanonenschuß als die Ursache dieser Erscheinung bezeichnen wird, und gegen keine dieser Ausdrucksweisen ist etwas einzuwenden. Selbst wenn z. B. ein historisches Ereignis, was doch nur ein einziges ist, z. B. der Untergang des römischen



Reiches, aus der Vorgeschichte und den begleitenden Umständen erklärt werden soll, wird man diese Anschauungsweise bestätigt finden, indem hier durch Abstraktion von allem Einzelnen, Individuellen, das Ereignis in eine Klasse möglicher — vielleicht später einmal eintretender — verwandter Ereignisse eingereiht wird.

§ 47. Gesetzmäßigkeit und Zufall.

1. Die Ereignisklassen können wir ganz nach unserer Willkür abgrenzen, aber es zeigt sich hier, wie bei der Mengenbildung überhaupt, daß es zweckmäßig ist, die Klassen nach einer gewissen Verwandtschaft oder Ähnlichkeit der darin aufzunehmenden Ereignisse abzugrenzen, also Dinge, die in unserer Gedanken- und Empfindungswelt nahe beieinander liegen, zu vereinigen.

Wir nennen eine Ereignisklasse *einfach*, wenn ihre Elemente eine solche Verwandtschaft zeigen. Je einfacher eine Ereignisklasse ist, um so kürzer wird man sich bei der Beschreibung fassen können, und für die allereinfachsten hat die Sprache gewisse Wortbildungen, die von jedermann verstanden werden, die Zeitwörter, nötigenfalls mit Adverbien oder Objekten.

2. *Hat eine einfache Ereignisklasse auch eine einfache Ursachsklasse, so heißt der Zusammenhang zwischen beiden gesetzmäßig.*

Hat aber die einfache Ereignisklasse eine nicht einfache Ursachsklasse, so heißt der Zusammenhang zufällig.

Es lassen sich nach dieser Definition die Ereignisse nicht schlechtweg in gesetzmäßige und zufällige einteilen, sondern es findet ein stetiger Übergang zwischen beiden statt, wie etwa zwischen warm und kalt, hart und weich. Dies steht ja auch in vollkommenem Einklange mit dem Sprachgebrauch. Es wird aber nötig sein, das Gesagte durch einige Beispiele zu erläutern, wobei die Schwierigkeit nur in der Wahl aus einer allzugroßen Zahl von Fällen liegt.

3. Wir nennen es Zufall, wenn aus einem Kartenspiel ein As gezogen wird. Die Ereignisklasse, das Ziehen eines As, ist hier sehr einfach. Dagegen ist es ganz unmöglich, die Ursachsklasse zu beschreiben, die die Hand des Ziehenden gerade an die Stelle führt, wo das As liegt, oder das As beim Mischen der Karten gerade an diese Stelle gebracht hat.

Anders wäre es aber, wenn das Kartenspiel aus lauter Assen oder vorwiegend aus Assen bestände, dann würde die Ursachsklasse



schon viel einfacher ausfallen und das Ereignis ein mehr oder weniger gesetzmäßiges werden.

Man wird leicht diesen Charakter des Kausalzusammenhanges überall da erkennen, wo wir das Wort Zufall gebrauchen. Es ist zufällig, wenn ich ohne Verabredung auf einer Reise mit einem Freunde zusammentreffe. Dagegen wird das Ereignis gesetzmäßig, wenn eine Verabredung vorhergeht.

Wenn Wallenstein sagt: „Es gibt keinen Zufall“, so supponiert er damit für alle uns zufällig erscheinenden Ereignisklassen eine einfache Ursachsklasse, nämlich den Willen einer höheren Macht, die das menschliche Schicksal planmäßig lenkt.

4. Eine einfache Ereignisklasse, die zugleich eine einfache Ursachsklasse hat, heißt eine natürliche Klasse, und wenn die Klasse zugleich von großem Umfange ist, so bezeichnen wir einen solchen Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung als ein Naturgesetz.

§ 48. Wahrscheinlichkeit.

1. All unserem Wissen und Urteilen haftet die Unvollkommenheit an, daß es uns nicht absolute Gewißheit, sondern nur eine Wahrscheinlichkeit bietet. Darin, daß man von einer größeren oder kleineren Wahrscheinlichkeit sprechen kann, liegt aber schon ein Merkmal für die Möglichkeit, die Wahrscheinlichkeit auf das Zahlenreich abzubilden und aus den Zahlenoperationen Schlüsse über Wahrscheinlichkeiten zu ziehen. Ehe wir aber zu einer genaueren Bestimmung dieser Abbildung übergehen, müssen wir die folgende allgemeine Bemerkung vorausschicken.

Wahrscheinlichkeit ist nicht eine Eigenschaft der Dinge, sondern nur ein Zustand unserer Meinung oder unseres Wissens über die Dinge. Wenn wir auf irgend eine Frage keine bestimmte Antwort haben, so werden wir nur dann die Antwort im einen oder im anderen Sinn für wahrscheinlicher halten, wenn wir dafür bestimmte Gründe haben. Diese Gründe können rein subjektiver Art sein, in unserer Stimmung, in unserem Temperament oder in unseren Wünschen liegen; dann aber werden wir ihnen bei vernünftiger Überlegung kein entscheidendes Gewicht beilegen. Sie können aber auch durch unsere augenblickliche Kenntnis der begleitenden Umstände bestimmt sein. Es ist kein Hindernis, daß wir jeder solchen Wahrscheinlichkeit nach unserem jeweiligen Ermessen einen bestimmten Zahlenwert beilegen, und ein gewisses Bild unserer augenblicklichen Meinung kann dadurch immerhin gegeben werden. Daß dieses Bild aber auch etwas richtiges und wertvolles über die äußeren Dinge lehre, werden wir



nur dann erwarten dürfen, wenn der Einfluß der unbekannten Umstände gegenüber dem der bekannten gering anzuschlagen ist. Ich betone dies, um auch hier wieder darauf hinzuweisen, daß der Zahlbegriff und seine Anwendung auf die Dinge eine willkürliche Schöpfung unseres Denkens ist.

2. Wir sprechen nicht bloß bei zukünftigen, sondern auch bei vergangenen aber noch unbekannten Ereignissen, ja auch bei dauernden Zuständen von Wahrscheinlichkeit. Um das zusammenzufassen, wollen wir hier von Erscheinungen und Erscheinungsklassen reden, in demselben Sinne, wie wir früher den Ausdruck Ereignisklassen gebraucht haben.

Eine fruchtbare Anwendung des Zahlbegriffs auf Wahrscheinlichkeiten ist nur dann möglich, wenn es sich um einfache Erscheinungsklassen (in dem Sinne, der in § 47, 1. festgelegt ist) handelt.

3. Wir denken uns nun eine solche Erscheinungsklasse E in irgend eine Zahl, etwa n, Teilklassen

$$E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n \tag{1}$$

zerlegt und zwar von der Art, daß wir von einer zu beurteilenden unbekannten Erscheinung e der Klasse E nach dem augenblicklichen Stande unseres Wissens keinen Grund haben zu vermuten, daß sie eher zu der einen als zu einer anderen dieser Teilklassen gehört.

Wir wollen solche Teilklassen gleichwertig nennen. Eine solche Einteilung bietet sich bisweilen ganz von selbst, besonders in solchen Fällen, wo, wie bei Glücksspielen, ein näheres Wissen über die Einzelereignisse absichtlich ausgeschlossen wird. In anderen Fällen wird aber bei der Bildung gleichwertiger Klassen viel dem subjektiven Ermessen überlassen bleiben müssen, und ein erfahrener und scharfsinniger Beobachter wird die Aufgabe richtiger und besser lösen, als der minder begabte.

Ist die Einteilung von E in n gleichwertige Klassen getroffen, so schreiben wir der Zugehörigkeit der Erscheinung e zu einer bestimmten der Klassen (1), etwa zu E_1, die Wahrscheinlichkeit $1/n$ zu. Dies ist reine Definition, durch die eben nichts weiter ausgedrückt ist, als die Gleichwertigkeit der n Klassen.

4. Ist k ein Teiler von n und $n = kn'$, so lassen sich die Klassen (1) zu je k in größere Klassen zusammenfassen, die wir mit

$$E_1', E_2', \ldots, E_{n'}'. \tag{2}$$

bezeichnen, worin etwa E_1' aus den Klassen $E_1, E_2, \ldots, E_k$ besteht. Auch diese Klassen E_i' werden wir nach unserer Kenntnis für gleichwertig halten müssen, und demnach ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis e zu E_1' gehört, gleich $1/n' = k/n$ zu setzen. So groß ist also die Wahrscheinlichkeit, daß e zu irgendeiner der Klassen $E_1, E_2, \ldots, E_k$ gehört.

Wenn $k = n$ ist, so wird dieser Zahlenwert gleich 1. Die Klasse E_1' fällt mit E zusammen, und da e nach Voraussetzung zu E gehört, so ist die Wahrscheinlichkeit 1 gleich der Gewißheit zu setzen.

5. Aber auch wenn k kein Teiler von n ist, können wir nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daß die Einzelerscheinung e zu irgendeiner der Klassen $E_1, E_2, \ldots, E_k$ gehört. Es ist nun zwar einleuchtend, daß diese Wahrscheinlichkeit um so größer sein wird, je größer k ist, weil ja e sicher zu dem Komplex $E_1, E_2, \ldots, E_k$ gehört, wenn es zu einem der Komplexe $E_1, E_2, \ldots, E_{k-1}$ gehört, aber nicht umgekehrt. Ein Zahlenwert für diese Wahrscheinlichkeit läßt sich aber aus der Definition 4. noch nicht ableiten. Wenn aber die Klassen $E_1, E_2, \ldots$ gleichwertig sind, so wird diese Wahrscheinlichkeit nur von der Zahl k, nicht von der besonderen Auswahl der $E_1, E_2, \ldots, E_k$ abhängen. Allen diesen Forderungen genügen wir, wenn wir diese Wahrscheinlichkeit gleich dem echten Bruche k/n setzen, was wiederum eine Definition ist, die aber die Definition 3. als speziellen Fall in sich enthält.

Nehmen wir irgend zwei Komplexe E', E'', von denen der eine h, der andere k der Teilklassen E_i enthält, so haben die Wahrscheinlichkeiten, daß e zu E' oder E'' gehört, das Verhältnis $h : k$. Hierbei ist es gleichgültig, ob die Klassen E' und E'' gemeinschaftliche Elemente enthalten oder nicht.

Wenn aber E' und E'' irgend zwei Teilklassen von E sind, so wird man nur dann das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten durch einen rationalen Bruch ausdrücken können, wenn man die Klasse E so in gleichwertige Teilklassen E_i einteilen kann, daß E' und E'' je durch eine bestimmte Anzahl h und k dieser Teilklassen erschöpft sind.

In den meisten Fällen bietet sich eine Einteilung in Teilklassen E', E'', von denen wir zwar sofort sehen, daß sie nicht gleichwertig sind, obwohl wir kein Mittel haben, sie in eine bestimmte Anzahl gleichwertiger Teilklassen zu teilen. Dann fehlen die Grundlagen für eine zahlenmäßige Bestimmung der Wahrscheinlichkeit. Trotzdem ist häufig die Ungleichwertigkeit so groß und augenfällig, daß wir keinen Augenblick im Zweifel sind, in welche der Teilklassen wir eine Einzelerscheinung e zu verweisen haben. In solchen Fällen wäre auch ein Zahlenausdruck für die Wahrscheinlichkeit ganz zwecklos.



6. Wir wollen das Gesagte an zwei einfachen Beispielen erläutern. Ein Würfel, wie er zum Würfelspiel gebraucht wird, zeigt, auf den Tisch geworfen, eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6. Hierin bestehe die Erscheinungsklasse E. Wenn der Würfel keine mir bekannte Unregelmäßigkeit hat, und wenn nach den Vorschriften des Spieles geworfen wird, so sind die sechs Erscheinungsklassen E_1, $E_2, \ldots, E_6$, bei denen der Würfel 1 oder 2 ... oder 6 zeigt, gleichwertig. Die Regeln des Spieles verlangen geradezu, daß sie gleichwertig seien. Wir haben also hier für jede dieser Nummern die Wahrscheinlichkeit 1/6.

Die Wahrscheinlichkeit für eine gerade Zahl wäre 1/2 und die Wahrscheinlichkeit, daß eine der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 fällt, ist 5/6.

Ein anderes etwas komplizierteres Beispiel ist das folgende: Die Sterblichkeitstabellen zeigen, daß im Durchschnitt von den sechzigjährigen Männern der sechsundzwanzigste im Laufe eines Jahres stirbt (abgerundet). Es wird nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, daß ein bestimmter einzelner Mensch N, der heute 60 Jahre alt ist, im Laufe des nächsten Jahres stirbt. Ist nun von dem N nichts weiter bekannt, so besteht der Inhalt meines Wissens über die Frage lediglich in der erwähnten Angabe der Statistik. Die Erscheinungsklasse E ist hier die Gesamtheit der sechzigjährigen Männer. Die Einzelerscheinung e ist der besagte N. Teilen wir die Klasse E in die beiden Teilklassen der im nächsten Jahre Sterbenden und der Überlebenden, so sind diese beiden Klassen nicht gleichwertig. Um gleichwertige Klassen zu erhalten, muß ich nach Angabe der Statistik die Klasse der Überlebenden noch in 25 gleichwertige Klassen teilen. Ich brauche aber diese Teilung nicht wirklich auszuführen, da es für die gestellte Frage in keiner Weise auf ihre Unterscheidung ankommt. Das Ergebnis ist dann also die Wahrscheinlichkeit von 1/26 für den Tod des N im nächsten Jahre.

Dieses Resultat ist von der größten Bedeutung für die Lebensversicherungsgesellschaften, weil da die Gleichwertigkeit der angegebenen Klassen feststeht. Es ist aber von sehr geringem Wert, angewandt auf einen bestimmten uns bekannten N. Da ist die Gleichwertigkeit der Klassen nur sehr unsicher geschätzt und würde sofort zerstört werden, sowie etwa der Gesundheitszustand oder die sonstigen Lebensumstände des N in Betracht gezogen werden.

§ 49. Wahrscheinlichkeit und Wirklichkeit.

1. Wir haben in dem letzten Beispiele einen Punkt berührt, der noch einer genaueren Erörterung bedarf. Wir haben oben scharf betont, daß die Zahlen, durch die wir Wahrscheinlichkeiten aus-



drücken, nicht eine Eigenschaft der Dinge der Außenwelt darstellen, sondern nur zur Charakterisierung unserer Meinung oder Erwartung über zukünftige oder unbekannte Ereignisse dienen.

Damit scheint auf den ersten Blick im Widerspruch zu stehen, daß sich die aus der Wahrscheinlichkeitsberechnung gezogenen Folgerungen in der Erfahrung bewährt haben, daß z. B. die Solidität der Lebensversicherungen sich auf die Überzeugung gründet, daß die Angaben der Statistik sich bewahrheiten werden, wenn man nur eine genügend große Zahl von Einzelfällen betrachtet, oder, um ein anderes Beispiel zu wählen, daß ein Würfel, der sehr häufig, sagen wir 1000mal geworfen wird, nahezu in einem Sechstel der Fälle die Zahl 6 zeigen wird.

Darauf ist aber zu erwidern, daß dieses Ergebnis keineswegs sicher, sondern nur wieder mit großer Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist. Ganz ausgeschlossen ist es nicht, daß bei den 1000 Würfen immer die Zahl 6 fällt, auch dann, wenn das Ereignis ein wirklich zufälliges ist. Schon Jacob Bernoulli und später Laplace haben dargetan, daß diese Regelmäßigkeit sich mit einer unbegrenzt wachsenden Wahrscheinlichkeit einstellt, wenn die Zahl der Fälle ins Unbegrenzte wächst.

2. Ein einfaches Beispiel wird dies erläutern. Nehmen wir an, es werde mit einer Münze „Kopf oder Schrift" gespielt. Die Klassen, daß Kopf oder Schrift fällt, seien vollständig gleichwertig. Wenn nun dies Spiel n mal wiederholt wird, so kann 1 mal, 2 mal, 3 mal, . . ., n mal „Kopf" fallen. Diese n Klassen sind aber keineswegs gleichwertig. Um ihre Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, müssen wir die gesamten Klassen aller Kombinationen von n Würfen in gleichwertige Teilklassen teilen, und da bildet jede mögliche Aufeinanderfolge mit oder ohne Wechsel von Kopf und Schrift, deren Zahl 2^n beträgt, eine gleichwertige Klasse. Es fragt sich, wie viele dieser Klassen eine bestimmte Anzahl von Malen, etwa k mal, „Kopf" enthalten.

Das ist aber offenbar so oft der Fall, als man n Elemente zu je k ohne Widerholung kombinieren kann; denn jedes Element einer solchen Kombination aus den n Würfen kann man mit „Kopf" und die übrigbleibenden mit „Schrift" belegen; und diese Zahl ist also nichts anderes, als der Binominalkoeffizient $B_k^{(n)}$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß k mal „Kopf" fällt, ist also nach § 48, 5. gleich $B_k^{(n)} : 2^n$.

Da die Koeffizienten eines entwickelten Binoms nach der Mitte zu am größten sind, so zeigt es sich, daß die mittleren Werte von k die größte Wahrscheinlichkeit haben, und je größer n ist, um

so mehr wird sich **vermutlich** das Verhältnis der Zahl der Würfe der einen Art zu der Gesamtzahl der Würfe dem Werte 1/2 nähern.

Nehmen wir etwa $n = 10$, so haben wir die Binomialkoeffizienten

$$1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1;$$

unter 1024 Fällen von 10 Würfen ist es also nur 1 mal zu erwarten, daß 10 mal „Kopf" fällt, und 252 mal, daß 5 mal „Kopf" fällt.

Die Wahrscheinlichkeit, daß das Verhältnis der Zahl der „Kopf"-Würfe zu der Gesamtzahl der Würfe einen der Werte 4/10, 5/10, 6/10 hat, ist gleich $672/1024 = 21/32$, während die Wahrscheinlichkeit für einen der übrigen acht Werte nur 11/32 ist.

3. Ähnlich verhält es sich mit den sogenannten **Massenerscheinungen der Statistik**, die, obwohl sie zum Teil von einem unberechenbaren Faktor, dem menschlichen Willen abhängen, doch eine große Regelmäßigkeit und scheinbare Gesetzmäßigkeit zeigen, z. B. der Häufigkeit der Eheschließungen, der Verbrechen, der unbestellbaren Briefe.

Nehmen wir z. B. die Bevölkerung einer großen Stadt und zählen etwa die Zahl der Selbstmorde in einem Jahre und in einem zweiten Jahre, so stehen diese beiden Zahlen in dem Verhältnisse zweier ganzer Zahlen, die zwischen Null und der Bevölkerungszahl schwanken können.

Irgendein Wert dieses Verhältnisses wird durch eine gewisse Anzahl von möglichen Fällen hervorgebracht, und wenn wir diese Fälle als **gleichwertig betrachten**, so können wir die Wahrscheinlichkeit irgendeines Wertes dieses Verhältnisses ebenso wie beim Würfelspiel berechnen. Es ergibt sich eine überwiegend große Wahrscheinlichkeit für die Werte, die der 1 nahe kommen, also eine Wahrscheinlichkeit für das ungefähre Gleichbleiben der Zahl der Selbstmorde in den beiden Jahren.

Hier ist nun freilich die Gleichwertigkeit der Fälle nur eine rohe Annahme, und bei genauerem Zusehen werden sich sehr bedeutende Unterschiede ergeben.

Wir dürfen daher auch nur bei **großen Bevölkerungszahlen** auf eine Übereinstimmung der Wirklichkeit mit dieser Schätzung der Wahrscheinlichkeit rechnen. Wie groß diese Zahl sein muß, das wird davon abhängen, welchen Einfluß die angedeuteten Verschiedenheiten haben. Dieser Einfluß wird größer sein in den komplizierten Verhältnissen eines Kulturvolkes, in dem die Individualität des Einzelnen mehr entwickelt ist, als in den einfachen Verhältnissen eines Naturvolkes. Daß aber trotzdem eine Übereinstimmung überall eintritt, ist ein Beweis von einem gewissen Artcharakter auch in der Menschennatur.



§ 50. Wahrscheinlichkeit von Ursachen.

1. Wenn die Aufstellung einer Wahrscheinlichkeit in Widerspruch steht mit der nachfolgenden Erfahrung, so deutet dies darauf, daß unser Wissen, nachdem wir die Wahrscheinlichkeit geschätzt haben, nicht hinreichend war, daß die unbekannten Umstände von entscheidendem Einfluß gewesen sein müssen, und wir werden darauf hingewiesen, nach solchen unbekannten Einflüssen zu suchen und dadurch unser Wissen zu erweitern. Wir werden vor die Frage gestellt:

Ist das Eintreten eines unwahrscheinlichen Ereignisses zufällig oder gesetzmäßig?

Welchen Sinn die Unterscheidung hat, ergibt sich aus § 47, 2. Die Beantwortung dieser Frage ist also wiederum nur die Entscheidung, welche von zwei Wahrscheinlichkeiten die größere ist. Die Antwort wird davon abhängen, welchen Grad von Wahrscheinlichkeit die Gesetzmäßigkeit des Ereignisses an sich, vor Eintritt des Ereignisses, für uns hat. Oft läßt sich diese Wahrscheinlichkeit nicht in Zahlen abschätzen; aber sie gehört zu den oben erwähnten Fällen, wo wir auch ohne eine solche nicht im Zweifel sind, auf welche Seite wir neigen sollen.

2. Ein paar Beispiele werden den hier zugrunde liegenden Gedanken klar machen.

Wenn 100 mal mit einem Würfel geworfen wird, so bestehen für die Aufeinanderfolge der gefallenen Zahlen 6^{100} verschiedene Möglichkeiten. Alle diese sind gleichwertig, wenn über die Art des Würfelns und über die Beschaffenheit des Würfels nichts besonderes bekannt ist. Jeder dieser Kombinationen kommt also eine verschwindend kleine Wahrscheinlichkeit zu und doch muß eine von ihnen zum Vorschein kommen. Hat diese irgendeine bestimmte Regelmäßigkeit, besteht sie z. B. aus lauter Sechsen oder auch nur aus einer Überzahl von Sechsen, so schließen wir mit einer an Gewißheit grenzenden Wahrscheinlichkeit auf irgendeinen unbekannten Umstand, etwa in der Beschaffenheit des Würfels (z B. der Lage seines Schwerpunktes), der diesen Erfolg herbeigeführt hat. Bei irgendeiner beliebigen unregelmäßigen Folge, die doch von vornherein dieselbe Unwahrscheinlichkeit hat, machen wir diesen Schluß nicht. Dies erklärt sich dadurch, daß eine Unregelmäßigkeit, die ein bestimmtes Fallen des Würfels, z. B. auf Sechs begünstigt, sei es in betrügerischer Absicht oder zufällig, an sich nichts unwahrscheinliches hat, während das zufällige Entstehen der besonderen Kombination in hohem Maße unwahrscheinlich ist.



Wenn nun auch die unregelmäßige Reihenfolge die gleiche Unwahrscheinlichkeit für einzufälliges Entstehen bietet, so hat doch die entgegengesetzte Annahme eines gesetzmäßigen Entstehens dieser Kombination durch eine unbekannte Einrichtung des Würfels oder der Art des Würfelns genau dieselbe, wenn nicht eine noch größere Unwahrscheinlichkeit, und es liegt also jetzt kein Grund für uns vor, eine Gesetzmäßigkeit anzunehmen. Wenn wir auf einer Buchdruckertafel die Buchstaben KONSTANTINOPEL sehen, so nehmen wir mit voller Überzeugung an, daß nicht der Zufall diese vierzehn Buchstaben zusammengestellt hat, sondern die bewußte Absicht eines Menschen. An sich ist jede zufällige Kombination von vierzehn Buchstaben gleich wahrscheinlich, und wenn wir irgendeine uns unverständliche Zusammenstellung von Buchstaben vorfinden, so können wir durchaus im Zweifel sein, ob der Zufall oder eine uns unbekannte Absicht, z. B. eine Geheimschrift, diese Buchstaben zusammengeführt hat. Wenn es sich aber um ein gebräuchliches Wort handelt, so ist die Wahrscheinlichkeit einer Absicht unvergleichlich größer. Eine Ilias kann nicht durch Zufall entstanden sein.

3. Auf diesen Schlüssen beruht in den Naturwissenschaften die Auffindung gesetzmäßiger Zusammenhänge in der Natur, d. h. solcher Erscheinungsklassen, die wir früher natürlich genannt haben (§ 47, 4.).

Wenn wir in einer Erscheinungsklasse eine gewisse Regelmäßigkeit wahrnehmen, die nicht schon zu der Definition dieser Klasse gehört, so haben wir zunächst wieder die Alternative, diese Regelmäßigkeit für zufällig oder für gesetzmäßig zu halten, und je einfacher diese Regelmäßigkeit ist, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit eines Zufalls und um so mehr neigen wir daher zur Annahme einer Gesetzmäßigkeit, die uns leicht zur vollen Überzeugung wird. Die Auffindung dieser Gesetzmäßigkeit, d. h. der einfachen Ursachsklasse, ist dann die Aufgabe der Forschung.

Wenn wir z. B. sehen, wie stark sich die Atomgewichte des größten Teils unserer chemischen Elemente ganzen Zahlen nähern, so kann es wohl kaum einem Zweifel unterliegen, ob dies ein zufälliges Zusammentreffen ist, oder ob ein noch unbekanntes Gesetz hier im Spiele ist, dessen Auffindung ein großer Triumph der Chemie wäre.

Die Entscheidung zwischen Gesetzmäßigkeit und Zufälligkeit ist übrigens nur ein extremer Fall. Dieselben Grundsätze werden angewandt, wenn eine Erscheinung, unserer Kenntnis nach, mit der gleichen Wahrscheinlichkeit aus verschiedenen Ursachen hervorgegangen sein kann. Wir werden uns dann für die Ursachen entscheiden, deren Vorhandensein, abgesehen von dem eingetretenen

Erfolge, die größte Wahrscheinlichkeit hat. Auch hier werden wir nur in gewissen einfachen, willkürlich ersonnenen Fällen (Spielfällen) in der Lage sein, dieser Wahrscheinlichkeit einen Ausdruck durch Zahlen zu geben.

Später werden wir hierfür noch einige Beispiele geben.

4. Die Beurteilung der Wahrheit eines Berichtes, einer Erzählung stützt sich auf die gleiche Erwägung. Ein Bericht hat zunächst, abgesehen von seinem Inhalt, die Präsumption der Wahrheit für sich, aber auch die Möglichkeit einer Lüge, eines Irrtums, kurz der Unwahrheit des Berichtes liegt vor. Die berichtete Tatsache kann gleichfalls, abgesehen von der Glaubwürdigkeit des Berichtes, größere oder geringere Wahrscheinlichkeit haben. Je unwahrscheinlicher an sich die berichtete Tatsache ist, einer um so stärkeren Beglaubigung wird der Bericht bedürfen, wenn wir die Tatsache für wahr halten sollen. Das Entscheidende dabei ist, daß die Wahrscheinlichkeit eines falschen Berichtes kleiner sei als die Wahrscheinlichkeit der berichteten Tatsache. Gewisse Tatsachen wird uns keinerlei Bericht glaubhaft erscheinen lassen.

Dies sind die logischen Grundsätze, nach denen Wahrscheinlichkeiten zu beurteilen sind. Es sind dieselben, durch die der gesund und besonnen denkende Mensch in der Wissenschaft und im Leben sein Urteil, seine Erwartungen und schließlich auch sein Handeln bestimmen läßt.

Auf sie stützt sich auch eine richtige Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die, wie Laplace sich treffend ausdrückt, nichts anderes ist, als der in Rechnung gesetzte gesunde Menschenverstand.

Siebenter Abschnitt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§ 51. Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten.

1. Mit den Zahlen, die wir den Wahrscheinlichkeiten zugeordnet haben, können Rechenoperationen ausgeführt werden; diese werden aber nur dann einen praktischen Wert haben, wenn sie bestimmten Verbindungen der Wahrscheinlichkeiten entsprechen, und wenn den Resultaten der Rechnung wieder die Bedeutung einer Wahrscheinlichkeit beigelegt werden kann. Hier kommen aber fast nur die Addition und die Multiplikation in Betracht. Daß selbst die Addition nur in beschränktem Umfange gebraucht werden kann, ergibt sich schon daraus, daß alle Wahrscheinlichkeiten echte Brüche sein müssen.

2. Bei der Bestimmung des Zahlenwertes einer Wahrscheinlichkeit kommt es, wie in § 48, 3. ausgeführt ist, vor allem darauf an, eine Erscheinungsklasse E in eine gewisse Anzahl, n, von gleichwertigen Teilklassen zu teilen.

Wir setzen eine solche Einteilung als getroffen voraus und nennen diese Teilklassen $E_1, E_2, \ldots, E_n$ jetzt die Elementarklassen.

Fassen wir irgendeine Anzahl r der n Elementarklassen zu einem Komplexe E' zusammen, so ist

$$w' = \frac{r}{n}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß eine noch unbekannte Erscheinung e der Klasse E dem Komplex E' angehört. Da $r \overline{\gtrless} n$ ist, so ist $w' \overline{\gtrless} 1$.

Bezeichnen wir mit E'' einen zweiten Komplex, der aus s Elementarklassen besteht, und nehmen an, daß E' und E'' keine gemeinsamen Elementarklassen enthalte, so besteht der Komplex E''' von E'' und E' aus $r + s$ Elementarklassen, und wenn w'' die Wahrscheinlichkeit für E'' bedeutet, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß e

zu E''' gehört, gleich $w' + w''$. Hierauf ist die Anwendung der Addition beschränkt.

3. Multiplikation. Es seien, immer unter Voraussetzung gleichwertiger Elementarklassen, E', E'' zwei Teilklassen von E, die hier aber auch gemeinschaftliche Elemente enthalten, ja sogar identisch sein können, denen die Wahrscheinlichkeiten w', w'' zukommen. Nach der Definition sind dann

$$r' = nw', \quad r'' = nw''$$

die Anzahlen der Elementarklassen in E' und E''.

Es wird nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, daß von zwei Erscheinungen e' und e'' aus E die erste zu E', die zweite zu E'' gehört.

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir eine neue Erscheinungsklasse G bilden, deren Elemente g die Paare der Erscheinungen von E sind. Die Elementarklassen $G_{i,k}$ von G bilden wir so, daß wir unter $G_{i,k}$ die Gesamtheit der Fälle verstehen, bei denen das erste Element des Paares g zu E_i, das zweite zu E_k gehört. Da nun i und k von 1 bis n gehen, so ist die Anzahl der Elementarklassen $G_{i,k}$ gleich n^2.

Die Annahme, daß von den beiden Erscheinungen e', e'', die eine Erscheinung g zusammensetzen, die erste zu E', die zweite zu E'' gehört, gibt r' Werte von i und r'' Werte von k, und folglich $r'r''$ Elementarklassen $G_{i,k}$. Es ist also die Wahrscheinlichkeit dieser Annahme $r'r'' : n^2$, also gleich dem Produkt $w'w''$.

4. Die Annahme der Gleichwertigkeit der Klassen $G_{i,k}$ setzt voraus, daß die Erscheinungen e' und e'' voneinander unabhängig seien, d. h. die Wahrscheinlichkeit von E'' darf nicht verändert werden, wenn wir wissen, daß das Ereignis e' zu E' gehöre. Ob diese Voraussetzung zutrifft, muß in jedem Falle durch eine besondere Überlegung festgestellt werden.

Dieselben Betrachtungen gelten, wenn wir nicht bloß zwei, sondern eine beliebige Anzahl von Teilklassen E', E'', E''', ... annehmen.

5. Wir können das Resultat dieser Betrachtungen in dem Satze aussprechen:

> Das Produkt der Wahrscheinlichkeiten mehrerer voneinander unabhängiger Erscheinungen ist die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen aller dieser Erscheinungen.

Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit, daß beim Werfen mit einem Würfel 6 fällt, gleich 1/6. Die Wahrscheinlichkeit, daß der

Würfel n mal hintereinander auf 6 fällt, ist also $(1/6)^n$. Dieselbe Wahrscheinlichkeit hat jede vorgeschriebene Reihenfolge von n Zahlen.

Damit ist die Anwendung arithmetischer Operationen auf die Wahrscheinlichkeiten erschöpft. Das Hauptinteresse in den Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung liegt immer in der Ermittelung gleichwertiger Klassen. In vielen Fällen wird dabei dem subjektiven Ermessen, der Erfahrung und Klugheit ein gewisser Spielraum gegeben sein. In anderen Fällen, zu denen besonders die Zufallsspiele gehören, ist die Aufgabe rein mathematisch durch Abzählung zu lösen. Hierfür betrachten wir in der Folge einige typische Beispiele.

§ 52. Beispiel für abhängige und unabhängige Ereignisse.

1. Wir betrachten zunächst ein Beispiel, das den Unterschied zwischen abhängigen und unabhängen Ereignissen zur Anschauung bringen soll.

Wenn zwei Spielkarten verdeckt auf dem Tische liegen, so gibt es für die Farbe, der diese Spielkarten angehören, vier Möglichkeiten; die erste rot, die zweite rot (r, r), die erste rot, die zweite schwarz (r, s), die erste schwarz, die zweite rot (s, r) und endlich beide schwarz (s, s).

Wenn wir nichts weiter wissen, werden wir jedem dieser Fälle die gleiche Wahrscheinlichkeit $1/4$ zuschreiben.

Die Wahrscheinlichkeit für einen der beiden Fälle (r, s) und (s, r) ist $1/2$. Es ist also wahrscheinlicher, daß von den beiden Karten die eine rot, die andere schwarz ist, als daß beide rot sind.

Dies bleibt noch alles ebenso, wenn wir wissen, daß die zwei Karten aus zwei verschiedenen Spielen gezogen sind.

2. Wenn aber beide Karten aus demselben Spiele gezogen sind, dann ist die Sache anders. Nehmen wir an, das Spiel enthalte $2n$ Karten, n rote und n schwarze. Für die erste Karte ergibt sich die Wahrscheinlichkeit $1/2$ für rot und $1/2$ für schwarz. Ist aber eine rote Karte gezogen, so sind nur noch $n-1$ rote und n schwarze Karten im Spiele. Die Wahrscheinlichkeit für rot ist also jetzt $(n-1)/(2n-1)$, und für schwarz $n/(2n-1)$.

Demnach ist die Wahrscheinlichkeit

$$\text{für } (r, r): \quad \frac{n-1}{2(2n-1)},$$

$$\text{für } (r, s): \quad \frac{n}{2(2n-1)},$$

und ebenso

$$\text{für } (s, r): \quad \frac{n}{2(2n-1)},$$

$$\text{für } (s, s): \quad \frac{n-1}{2(2n-1)},$$

also eine erhöhte Wahrscheinlichkeit für (r, s) gegenüber (r, r). Alle vier Wahrscheinlichkeiten nähern sich um so mehr dem Werte $1/4$, je größer n ist. Ist $n = 1$, also überhaupt nur eine rote und eine schwarze Karte vorhanden, so sind die Fälle (r, r) und (s, s) ganz unmöglich. Für ein Whistspiel z. B. ist $n = 26$, also die Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{25}{102}, \quad \frac{26}{102}, \quad \frac{26}{102}, \quad \frac{25}{102}.$$

§ 53. Der wahrscheinliche Wert.

1. Wir haben in § 49, 2. gesehen und an einem Beispiel erläutert wie die Erwartung, daß die Vorhersagungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung eintreffen, selbst wieder ein Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist. Diese Frage ist von so fundamentaler Bedeutung für eine richtige Auffassung der ganzen Theorie, daß wir hier an der Hand eines verwandten Beispiels auf eine nähere Diskussion eingehen wollen.

2. Wir wollen annehmen, in einer Urne befinden sich weiße und schwarze Kugeln gemischt, in bekannter Anzahl. Es sei n die Gesamtzahl der Kugeln, a die Zahl der weißen, b die Zahl der schwarzen, also

$$n = a + b.$$

Wird aufs geradewohl hineingegriffen und eine Kugel herausgezogen, so ist die Wahrscheinlichkeit für eine weiße Kugel a/n und für eine schwarze b/n.

Wir nehmen nun an, der Zug werde öfter wiederholt und, um die bekannten Umstände gleich zu erhalten, werde nach jedem Zuge die Kugel in die Urne zurückgeworfen und gehörig umgeschüttelt. Es sei ν die Anzahl der Züge, α die Anzahl derer, die eine weiße, β derer, die eine schwarze Kugel ergeben haben, also

$$\nu = \alpha + \beta.$$

Wir wollen die Wahrscheinlichkeit W_α für irgend eine Zahl α berechnen.

3. Bestimmen wir zunächst die Wahrscheinlichkeit, daß α mal eine weiße, β mal eine schwarze Kugel in einer bestimmten vorgeschriebenen Reihenfolge gezogen werde, so haben wir für jede weiße Kugel eine Wahrscheinlichkeit a/n und diese Züge sind voneinander unabhängige Ereignisse im Sinne von § 51, 4. Es ist also die Wahrscheinlichkeit, daß bei α bestimmten Zügen jedesmal eine weiße Kugel gezogen wird, $(a/n)^\alpha$. Ebenso ist die Wahrscheinlichkeit für die β schwarzen Züge $(b/n)^\beta$ und folglich die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen beider Ereignisse

$$(1) \qquad \left(\frac{a}{n}\right)^\alpha \left(\frac{b}{n}\right)^\beta.$$

4. Nun ist aber nur nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, daß α weiße und β schwarze Kugeln zum Vorschein kommen, nicht daß dies in einer bestimmten Reihenfolge geschieht. Wir haben also noch zu zählen, wie viele solcher Reihenfolgen es gibt. Diese Reihenfolgen sind gleichwertige Klassen, und folglich erhalten wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit, wenn wir die Zahl (1) mit der Anzahl der Reihenfolgen multiplizieren.

Es handelt sich also noch darum, zu ermitteln, auf wie viele verschiedene Arten man α Dinge auf die Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots, \nu$$

verteilen kann, oder, was dasselbe ist, auf wie viele Arten man ν Elemente zu je α ohne Wiederholung kombinieren kann. Diese Zahl haben wir mit $B_\alpha^{(\nu)}$ bezeichnet und

$$B_\alpha^{(\nu)} = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-\alpha+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\alpha}$$
$$= \frac{\nu!}{\alpha!\,\beta!}$$

gefunden. Bd. I, § 53 der 1., § 57 der 2. und 3. Auflage.

Es ist also die Wahrscheinlichkeit, daß unter ν Zügen α mal eine weiße Kugel gezogen wird,

$$(2) \qquad W_\alpha = \frac{\nu!}{\alpha!\,\beta!}\left(\frac{a}{n}\right)^\alpha \left(\frac{b}{n}\right)^\beta.$$

5. Die Zahl α kann bei gegebenem ν jeden der Werte 0, 1, 2, ..., ν haben, aber keinen anderen. Die Summe aller dieser Wahrscheinlichkeiten

$$W_0 + W_1 + W_2 + \cdots + W_\nu$$

ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine unbestimmte Kombination von α

und β erfolgt, also gleich 1, und dies ergibt sich auch aus der Bedeutung der Binomialkoeffizienten, wonach

$$\sum B_\alpha^{(\nu)} \left(\frac{a}{n}\right)^\alpha \left(\frac{b}{n}\right)^\beta = \left(\frac{a+b}{n}\right)^\nu = 1$$

ist.

6. Um die verschiedenen W_α miteinander zu vergleichen, bilden wir den Quotienten

$$W_\alpha : W_{\alpha-1} = \frac{(\alpha-1)!\,(\beta+1)!}{\alpha!\,\beta!}\,\frac{a}{b} = \frac{\beta+1}{\alpha}\,\frac{a}{b}.$$

Soll $W_\alpha > W_{\alpha-1}$ sein, so muß

$$\alpha b < (\beta+1)a = (\nu+1-\alpha)a$$

oder

$$n\alpha < (\nu+1)a, \quad \alpha < \frac{(\nu+1)a}{n}$$

sein. Es wird also $W_{\alpha-1}$ mit wachsendem α wachsen, so lange diese Ungleichheit erfüllt ist, und daraus folgt, daß W_α bei gegebenem ν den größten Wert W_{α_0} erhält, wenn $\alpha = \alpha_0$ die größte in $(\nu+1)a/n$ enthaltene ganze Zahl ist. Setzen wir dann

$$\alpha_0 = \frac{(\nu+1)a}{n} - \theta,$$

so ist θ ein positiver echter Bruch.

Es wird

$$\frac{\alpha_0}{\nu} = \frac{a}{n} + \frac{a}{\nu n} - \frac{\theta}{\nu},$$

und dieser „wahrscheinlichste Wert" des Verhältnisses $\alpha : \nu$ kommt also dem Verhältnisse $a : n$ der Zahl der vorhandenen weißen Kugeln zu der Gesamtzahl um so näher, je größer die Zahl ν der Versuche ist.

7. Wenden wir die Formel in 6. auf zwei aufeinander folgende Werte von α an, so ergibt sich

$$\frac{W_\alpha}{W_{\alpha-1}} = \frac{\beta+1}{\alpha}\,\frac{a}{b}, \quad \frac{W_{\alpha+1}}{W_\alpha} = \frac{\beta}{\alpha+1}\,\frac{a}{b},$$

und daraus

$$\frac{W_{\alpha+1}}{W_\alpha} - \frac{W_\alpha}{W_{\alpha-1}} = \frac{a}{b}\,\frac{\alpha\beta - (\alpha+1)(\beta+1)}{\alpha(\alpha+1)} = -\frac{a}{b}\,\frac{\nu+1}{\alpha(\alpha+1)}.$$

Da dieser Ausdruck für jedes α negativ ist, so schließen wir:

Der Wert des Verhältnisses $W_\alpha : W_{\alpha-1}$ nimmt ab, wenn α wächst.

§ 54. Der Satz von Jacob Bernoulli.

1. Das letzte Resultat zeigt uns zwar, welcher Wert des Verhältnisses $\alpha : \nu$ und damit auch welcher Wert von $\alpha : \beta$ der wahrscheinlichste ist. Es ist aber auch damit noch nicht viel gewonnen, solange wir nicht die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten untereinander vergleichen können.

Vor allem ist es aber von Interesse, was aus diesen Wahrscheinlichkeiten wird, wenn die Anzahl ν der Versuche unbegrenzt wächst.

Hierbei dürfen wir aber nicht nach der Wahrscheinlichkeit eines einzelnen bestimmten Wertes dieses Verhältnisses fragen; denn diese Wahrscheinlichkeit würde mit unbegrenzt wachsendem ν unendlich klein, was wir hier allerdings nicht begründen können; sondern wir müssen die Frage so stellen, wie groß die Wahrscheinlichkeit sei, daß das Verhältnis $\alpha : \nu$ nicht über eine gewisse Größe von dem wahrscheinlichsten Werte abweiche. Hierüber gilt der folgende Satz, worin an die Stelle der Kugeln des Beispiels beliebige gleichmäßige Ereignisse, an Stelle der weißen Kugeln die einer bestimmten Absicht günstigen, an die Stelle der schwarzen die ungünstigen Fälle getreten sind.

2. Wenn unter n möglichen Fällen a günstige sind, und der Versuch wird ν mal wiederholt, darunter α mal mit günstigem Erfolge, so nähert sich die Wahrscheinlichkeit, daß das Verhältnis $\alpha : \nu$ von dem Werte $a : n$ um weniger als eine gegebene Größe Δ abweicht, mit wachsendem ν unbegrenzt der Gewißheit.

3. Um den Beweis dieses Satzes elementar führen zu können, wollen wir, wie es Jacob Bernoulli getan hat, einige vereinfachende Voraussetzungen machen, die indessen das Wesen der Sache nicht berühren.

Zunächst wollen wir bemerken, daß der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Wertes α

$$W_\alpha = B_\alpha^{(\nu)} \left(\frac{a}{n}\right)^\alpha \left(\frac{b}{n}\right)^\beta = \frac{\nu!}{\alpha!\,\beta!} \left(\frac{a}{n}\right)^\alpha \left(\frac{b}{n}\right)^\beta \tag{1}$$

nicht von den absoluten Werten von a, b, n, sondern nur von deren Verhältnissen abhängt. Man erhält also bei gleichbleibendem ν denselben Wert W_α, wenn die Zahl n aller möglichen Fälle beliebig



vergrößert wird, wenn nur das Verhältnis, in dem günstige und ungünstige Fälle gemischt sind, dasselbe bleibt. Man kann also n so groß annehmen, daß

$$\varDelta = \frac{1}{n}$$

beliebig klein wird.

4. Wir nehmen nun ferner an, daß die Anzahl der Versuche, ν, ein Vielfaches von n sei, und setzen, indem wir mit q eine natürliche Zahl bezeichnen,

$$\nu = qn.$$

Diese Voraussetzung ist nur zur Vereinfachung der Rechnung gemacht. Sie wird aber das Resultat nicht wesentlich beeinflussen können, wenn nur die Zahl ν im Vergleich zu n als groß angenommen wird.

Als wahrscheinlichster Wert von α hat sich im vorigen Paragraphen die größte in $(\nu + 1)a/n$ enthaltene ganze Zahl ergeben. Es ist aber unter der jetzt geltenden Voraussetzung

$$\frac{(\nu + 1)a}{n} = qa + \frac{a}{n},$$

und da a/n ein echter Bruch ist, so ist qa die größte ganze Zahl die in diesem Bruch enthalten ist. Also ist qa der wahrscheinlichste Wert von α und qb der zugehörige Wert von β.

5. Wir fragen nun, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß das Verhältnis $\alpha : \nu$ zwischen den Grenzen $a/n - \varDelta$ und $a/n + \varDelta$ liegt (wobei wir die Grenzen mit einschließen können). Setzen wir $\varDelta = 1/n$, so ist dazu erforderlich, daß

$$\frac{a-1}{n} \leqq \frac{\alpha}{\nu} \leqq \frac{a+1}{n},$$

folglich

$$qa - q \leqq \alpha \leqq qa + q$$

ist; also ist unsere Frage gleichbedeutend mit der nach der Wahrscheinlichkeit, daß α einen der Werte

$$aq, \quad aq \pm 1, \quad aq \pm 2, \quad \ldots, \quad aq \pm q$$

habe. Bezeichnen wir diese Wahrscheinlichkeit mit w, so ist, da hier die Voraussetzungen für die Addierbarkeit der Wahrscheinlichkeiten erfüllt sind (§ 51, 2.),

$$\begin{aligned} w = W_{aq} + W_{aq+1} + W_{aq+2} + \cdots + W_{aq+q} \\ + W_{aq-1} + W_{aq-2} + \cdots + W_{aq-q}. \end{aligned}$$

Die Gesamtsumme aller W_α ist gleich 1. Von diesen W_α fehlen in der Summe w die, in denen $\alpha > aq + q$ oder $\alpha < aq - q$ ist. Bezeichnen wir die ersten dieser Zahlen mit r, die zweiten mit s, verstehen also unter r und s alle Zahlen, die den Ungleichungen

$$(2) \qquad \begin{aligned} aq + q < r \leqq nq, \\ 0 \leqq s < aq - q \end{aligned}$$

genügen, so ist

$$1 = w + \sum W_r + \sum W_s,$$

wenn sich die Summenzeichen auf alle zulässigen Werte von r und von s erstrecken. Setzen wir noch

$$R = \sum W_r + \sum W_s,$$

so wird

$$(3) \qquad w = 1 - R.$$

6. Wir machen jetzt von dem Satze Gebrauch, daß das Verhältnis $W_\alpha : W_{\alpha-1}$ mit wachsendem α abnimmt (§ 53, 7.), und daß also, wenn $\alpha < \alpha'$ angenommen wird,

$$\frac{W_{\alpha+1}}{W_\alpha} > \frac{W_{\alpha'+1}}{W_{\alpha'}},$$

und daher auch

$$\frac{W_{\alpha'}}{W_\alpha} > \frac{W_{\alpha'+1}}{W_{\alpha+1}},$$

und daraus, indem wir α', α durch $\alpha' + 1$, $\alpha + 1$, dann durch $\alpha' + 2$, $\alpha + 2$ usf. ersetzen, für ein positives p:

$$(4) \qquad \frac{W_{\alpha'}}{W_\alpha} > \frac{W_{\alpha'+p}}{W_{\alpha+p}}.$$

Setzen wir darin $\alpha = aq$, $\alpha' = aq + q$, so folgt für jedes r, das der Bedingung (2) genügt,

$$\frac{W_{aq+q}}{W_{aq}} > \frac{W_r}{W_{r-q}},$$

und setzt man in (4) $\alpha + p = aq - q$, $\alpha' + p = aq$, so ergibt sich

$$\frac{W_{aq-q}}{W_{aq}} > \frac{W_{aq-q-p}}{W_{aq-p}} = \frac{W_s}{W_{s+q}}.$$

Bedeutet also M eine Zahl, die größer ist als die größte der beiden Zahlen

$$(5) \qquad \frac{W_{aq+q}}{W_{aq}}, \quad \frac{W_{aq-q}}{W_{aq}},$$

so ergibt sich aus den letzten Ungleichungen

$$W_r < M W_{r-q},$$
$$W_s < M W_{s+q},$$

und wenn man die Summen über alle r und alle s nimmt und bedenkt, daß jede Summe aus einem Teile der W_α kleiner als 1 ist, also

$$\sum W_{r-q} + \sum W_{s+q} < 1,$$

so ergibt sich

$$(6) \qquad R < M.$$

7. Wir beweisen nun, daß die beiden Quotienten (5) Null werden, wenn q ins Unendliche wächst. Daraus folgt dann, daß man M, das keiner anderen Bedingung unterliegt, als daß es größer ist als diese beiden Quotienten, so klein annehmen kann als man will, wenn man q, d. h. ν hinlänglich groß annimmt, und daraus folgt weiter, daß die Wahrscheinlichkeit w der Einheit beliebig nahe kommt, wenn ν groß genug genommen wird, wie in dem Satze 2. behauptet ist.

Nach dem Ausdrucke (1) ist

$$\frac{W_{aq+q}}{W_{aq}} = \frac{(aq)!(bq)!}{(aq+q)!(bq-q)!}\left(\frac{a}{n}\right)^q\left(\frac{b}{n}\right)^{-q}$$
$$= \frac{(bq-q+1)(bq-q+2)\cdots bq}{(aq+1)(aq+2)\cdots(aq+q)}\left(\frac{a}{b}\right)^q,$$

$$\frac{W_{aq-q}}{W_{aq}} = \frac{(aq-q+1)(aq-q+2)\cdots aq}{(bq+1)(bq+2)\cdots(bq+q)}\left(\frac{b}{a}\right)^q.$$

Der erste dieser beiden Quotienten besteht aus q Faktoren

$$f_t = \frac{a(bq-q+t)}{b(aq+t)}, \quad t = 1, 2, \ldots, q.$$

Diese Faktoren f_t liegen aber der Größe nach alle zwischen den Werten

$$(7) \qquad \frac{b-1}{b} \quad \text{und} \quad \frac{a}{a+1},$$

denn man erhält die Differenzen

$$f_t - \frac{b-1}{b} = \frac{t(a-b+1)}{b(aq+t)},$$

$$f_t - \frac{a}{a+1} = -\frac{a(q-t)(a-b+1)}{b(a+1)(aq+t)},$$

die ein entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Da nun die beiden Größen (7) positive echte Brüche sind, so sind sämtliche f_t kleiner als ein gewisser positiver echter Bruch und es ergibt sich, wenn wir diesen echten Bruch mit c bezeichnen,

$$\frac{W_{aq+q}}{W_{aq}} < c^q.$$

Ebenso findet man, daß die Faktoren

$$g_t = \frac{b(aq-q+t)}{a(bq+t)}, \quad t = 1, 2, \ldots, q,$$

aus denen der Quotient $W_{aq-q} : W_{aq}$ zusammengesetzt ist, zwischen

$$\frac{a-1}{a} \quad \text{und} \quad \frac{b}{b+1}$$

liegen und daraus daß auch

$$\frac{W_{aq-q}}{W_a} < c^q \tag{8}$$

ist. Die vier echten Brüche

$$\frac{a-1}{a}, \quad \frac{a}{a+1}, \quad \frac{b-1}{b}, \quad \frac{b}{b+1}$$

lassen sich auch so darstellen:

$$1 - \frac{1}{a}, \quad 1 - \frac{1}{a+1}, \quad 1 - \frac{1}{b}, \quad 1 - \frac{1}{b+1},$$

und man kann für c den größten unter ihnen wählen, also je nachdem a oder b größer ist,

$$c = 1 - \frac{1}{a+1} \quad \text{oder} \quad c = 1 - \frac{1}{b+1}$$

setzen.

8. Je kleiner man das Intervall $\varDelta$ angenommen hat, um so größer wird man die Zahlen n, a, b, deren Verhältnisse nur als gegeben betrachtet werden, annehmen müssen, und um so mehr wird sich der Bruch c der Einheit nähern. Desto größer muß also auch q angenommen werden, wenn man die Wahrscheinlichkeit w auf eine bestimmte Höhe bringen will.

Nehmen wir $a \gtreqless b$, so wird $c = a/(a+1)$ gesetzt werden können, und es ergibt sich aus (6) und (8)

$$R < \left(\frac{a}{a+1}\right)^q;$$

damit nun R mit Sicherheit unter eine gewisse Grenze, z. B. $1:1000$, heruntersinke, muß

$$\left(\frac{a}{a+1}\right)^q < \frac{1}{1000}, \quad \left(\frac{a+1}{a}\right)^q > 1000,$$

folglich

$$q(\log(a+1) - \log a) > 3$$

sein. Nehmen wir z. B. $a = b$ an und setzen $n = 200$, $a = b = 100$, so ist $\varDelta = 1:200$, $\lg(a+1) - \lg a = 0{,}0043 \ldots$ Es müßte also

$$q > \frac{3}{0{,}0043}$$

werden, und dies trifft sicher zu, wenn $\nu = nq$ größer als 140000 ist.

Wenn also in der Urne gleichviele weiße und schwarze Kugeln enthalten sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei 140000 Versuchen das Verhältnis der weißen zu den schwarzen Zügen zwischen den Grenzen 0,495 und 0,505 liegt, mehr als tausendmal größer, als daß dies Verhältnis außerhalb dieser Grenzen liegt.

§ 55. Beispiele.

Wir betrachten noch einige einfache Beispiele für die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten, wobei es sich immer um die Ermittlung gleichwertiger Klassen oder bei ungleichwertigen Klassen um die Vergleichung der Werte handelt.

1. Das eine Beispiel ist von historischem Interesse, weil es das erste ist, an dem sich der Scharfsinn Pascals versuchte:

Zwei Spieler A und B spielen miteinander, so daß in jedem einzelnen Spiele die Chancen des Gewinnens für jeden dieselben sind, z. B. „Kopf oder Schrift". Es ist dabei verabredet, daß dem der ganze Einsatz zufallen soll, der zuerst drei Spiele gewonnen hat. Das Spiel wird aber abgebrochen, nachdem A ein Spiel, B zwei Spiele gewonnen hat. Wie ist der Einsatz zwischen A und B nach Billigkeit zu teilen?

Zum Gewinn des Einsatzes fehlen dem A noch zwei, dem B nur noch ein gewonnenes Spiel. Wenn also weiter gespielt worden

wäre, so wäre nach höchstens zwei Spielen der Gewinn entschieden gewesen, denn diese zwei Spiele muß entweder A beide gewinnen oder B gewinnt wenigstens eins davon. Die Möglichkeiten des Gewinnens in diesen beiden Spielen sind aber

$$AA, \; AB, \; BA, \; BB,$$

und jede dieser Möglichkeiten ist gleich wahrscheinlich, davon ist aber nur die erste dem A günstig, in den drei letzen Fällen wäre B Sieger. Die Wahrscheinlichkeit des endlichen Gewinnens wäre also $\frac{1}{4}$ für A und $\frac{3}{4}$ für B und in diesem Verhältnisse ist der Gewinn zu verteilen; A erhält $\frac{1}{4}$, B erhält $\frac{3}{4}$ des Einsatzes.

An dieser Überlegung wird nichts geändert, wenn man berücksichtigt, daß das Spiel beendet ist, sobald einer der Spieler gewonnen hat, daß also nur die drei Fälle

$$AA, \; AB, \; B$$

möglich sind. Denn der letzte Fall, daß B zuerst gewinnt, hat die gleiche Wahrscheinlichkeit wie die, daß einer der beiden Fälle BA oder BB eintritt.

2. Man sieht, daß es hierbei nicht auf die Zahl 3 der zu gewinnenden Spiele, sondern nur auf die Anzahl der jedem der beiden Spieler zum Gewinne noch fehlenden Spiele ankommt. Wenn also, um ein anderes Zahlenbeispiel zu wählen, dem A noch zwei, dem B noch drei Spiele fehlen, so ist nach höchstens vier Spielen der Gewinn entschieden.

Hier sind nun die gleichwertigen Möglichkeiten des Gewinnens folgende:

$$\begin{array}{llll} AAAA, & AAAB, & AABA, & AABB, \\ ABAA, & ABAB, & ABBA, & ABBB, \\ BAAA, & BAAB, & BABA, & BABB, \\ BBAA, & BBAB, & BBBA, & BBBB, \end{array}$$

und hierin sind 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13 dem A, und 8, 12, 14, 15, 16 dem B günstig. Die Chancen für A und B verhalten sich also wie 11 zu 5

Wenn dem A noch a Spiele, dem B noch b Spiele fehlen, so ist der Gewinn nach höchstens $a + b - 1$ Spielen entschieden. Diese Spiele können auf 2^{a+b-1} gleich mögliche Arten verlaufen, und es handelt sich dann darum, abzuzählen, in wie vielen von diesen Fällen A früher seine a Spiele als B seine b Spiele gewonnen hätte.



3. Es werden drei Würfel geworfen. Die Zahl der Augen, die fallen, kann jeden der Werte zwischen 3 und 18 betragen, die beiden Grenzen eingeschlossen. Welche Wahrscheinlichkeit hat jede dieser Zahlen für sich?

Sind a, b, c die Augenzahlen, die sich bei einem Wurf auf den drei Würfeln zeigen, und

$$a + b + c = s,$$

so kommt es also darauf an, auf wie viele Arten für ein gegebenes s die a, b, c aus der Reihe der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, sich bestimmen lassen.

Wenn man die Würfel umdreht, so zeigen sie die Augenzahlen $7 - a$, $7 - b$, $7 - c$ und es geht also s in $21 - s$ über. Die Zahl s hat also dieselbe Wahrscheinlichkeit wie die Zahl $21 - s$ und demnach können wir uns auf die Betrachtung der Werte $s = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ beschränken. Diese haben dann dieselben Wahrscheinlichkeiten wie die Werte 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11.

Kümmert man sich zunächst nicht um die Beschränkung, daß die a, b, c die Zahl 6 nicht übersteigen dürfen, so ergibt sich:

Eine Zahl $s > 1$ läßt sich auf $s - 1$ Arten in zwei positive Summanden zerlegen; denn man kann für den ersten Summanden jede der Zahlen $1, 2, \ldots, s - 1$ nehmen und erhält dadurch jedesmal den anderen bestimmt.

Eine Zahl $s > 2$ läßt sich auf

$$(s-2) + (s-3) + \cdots + 2 + 1 = \frac{(s-1)(s-2)}{2}$$

Arten in drei positive Summanden zerlegen. Denn man kann wieder für den ersten Summanden $1, 2, \ldots, s - 2$ nehmen und erhält für die Differenz $s - 1, s - 2, \ldots, 2$ die Zahlen der Zerlegungen in zwei Summanden $s - 2, s - 3, \ldots, 1$.

So lange nun $s < 9$ ist, kann in der Zerlegung der Summand 7 oder eine noch größere Zahl nicht vorkommen, und wir finden also daß für

$$s = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$$

die Anzahl der möglichen Würfe die Dreieckszahlen

$$1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \quad 21$$

sind Für $s = 9$ aber fallen die drei Zerlegungen weg, in denen einer der Summanden 7, die beiden anderen 1 sind und für $s = 10$ die neun, in denen die Summanden 1, 1, 8 und 1, 2, 7 sind. Demnach bleiben für

$$s = 9,\ 10$$

die Zahlen der Zerlegung:

$$28 - 3 = 25, \quad 36 - 9 = 27.$$

Zur Übersicht stellen wir in der folgenden Tabelle die möglichen Würfe zusammen; dabei ist von je drei oder sechs Würfen, die durch Permutation auseinander entstehen, nur einer geschrieben, während die Anzahl der Permutationen in Klammern beigesetzt ist.

$3 = 1 + 1 + 1$	(1)		$9 = 1 + 2 + 6$	(6)
$4 = 1 + 1 + 2$	(3)		$= 1 + 3 + 5$	(6)
$5 = 1 + 1 + 3$	(3)		$= 1 + 4 + 4$	(3)
$= 1 + 2 + 2$	(3)		$= 2 + 2 + 5$	(3)
$6 = 1 + 1 + 4$	(3)		$= 2 + 3 + 4$	(6)
$= 1 + 2 + 3$	(6)		$= 3 + 3 + 3$	(1)
$= 2 + 2 + 2$	(1)		$10 = 1 + 3 + 6$	(6)
$7 = 1 + 1 + 5$	(3)		$= 1 + 4 + 5$	(6)
$= 1 + 2 + 4$	(6)		$= 2 + 2 + 6$	(3)
$= 1 + 3 + 3$	(3)		$= 2 + 3 + 5$	(6)
$= 2 + 2 + 3$	(3)		$= 2 + 4 + 4$	(3)
$8 = 1 + 1 + 6$	(3)		$= 3 + 3 + 4$	(3)
$= 1 + 2 + 5$	(6)			
$= 1 + 3 + 4$	(6)			
$= 2 + 2 + 4$	(3)			
$= 2 + 3 + 3$	(3)			

Man sieht, daß die Wahrscheinlichkeit, mit drei Würfeln eine bestimmte Augenzahl s zu werfen, gegen die Mitte zu wächst, am Anfang und am Ende aber stärker als gegen die Mitte.

4. Wenn ich eine Anzahl von n richtig abgekürzten Dezimalbrüchen zu addieren habe, so kann der Fehler in einem jeden Summanden zwischen $-0{,}5$ und $+0{,}5$ Einheiten der letzten Dezimalen schwanken. Die Möglichkeit des Fehlers in der Summe schwankt also zwischen $-0{,}5\,n$ und $0{,}5\,n$, könnte also bei großem n sehr beträchtlich werden. Die Frage nach der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers von bestimmter Größe ist nach denselben Grundsätzen zu beurteilen, wie in dem eben



behandelten Problem mit den drei Würfeln, und es ergibt sich daraus das beruhigende Resultat, daß die in der Mitte liegenden, also hier die kleinen Fehler sehr viel wahrscheinlicher sind als die großen.

§ 56. Beispiele für die Wahrscheinlichkeit der Ursachen.

1. Wir haben schon in § 50 die allgemeinen Gesichtspunkte gegeben, nach denen eine Erscheinung α mit größerer Wahrscheinlichkeit der einen oder der anderen von mehreren denkbaren Ursachen $a, b, c, \ldots$ zuzuschreiben ist. Die Wahrscheinlichkeit, daß etwa a die Ursache von α sei, ist der Wahrscheinlichkeit gleichzusetzen, mit der das Eintreten der Ursache a ohne Rücksicht auf den Erfolg zu erwarten war.

Die Frage liegt aber in Wirklichkeit oft nicht so einfach. Ein Beispiel wird dies klar machen. Es soll sich in einem bestimmten Todesfalle, über dessen nähere Umstände wir nicht unterrichtet sind, um die Wahrscheinlichkeit dieser oder jener Krankheit als Todesursache handeln. Dabei wird es nicht sowohl auf die relative Häufigkeit der betreffenden Krankheit an sich, sondern nur auf die Fälle mit tötlichem Ausgange ankommen. Wir werden also erstens die Wahrscheinlichkeit der Krankheit an sich und zweitens die Wahrscheinlichkeit des tötlichen Ausganges in Betracht zu ziehen haben.

2. Suchen wir dies auf eine allgemeine Formel zurückzuführen, so stellt sich die Frage so:

Die Erscheinungen $a, b, c, \ldots$ gehören in gewisse Klassen $A, B, C, \ldots$, deren Elemente nur zum Teil die Erscheinung α verursachen können. Welche Wahrscheinlichkeit hat es, daß die Ursache von α unter A, unter B, unter C usw. zu suchen sei?

3. Die Antwort auf diese Frage wird einfach und anschaulich, wenn wir sie aus einem Spielfalle ableiten.

Nehmen wir an, wir haben schwarze und weiße Kugeln in der Menge N. Es seien im ganzen darunter n schwarze Kugeln, also die Wahrscheinlichkeit, blindlings eine schwarze Kugel zu ziehen,

$$P = \frac{n}{N}.$$

Diese Kugeln mögen nun in eine Reihe von Beuteln (1), (2), (3), ... verteilt sein. Es sei eine schwarze Kugel gezogen und es wird nach der Wahrscheinlichkeit W_1 gefragt, daß diese schwarze Kugel aus dem ersten Beutel stammt.

Es seien

im Beutel (1) N_1 Kugeln, darunter n_1 schwarze,

„ „ (2) N_2 „ „ n_2 „

. . . .

Es sind also

$$p_1 = \frac{n_1}{N_1}, \quad p_2 = \frac{n_2}{N_2}, \quad \cdots$$

die Wahrscheinlichkeiten, daß bei einem Griff in den ersten oder in den zweiten usw. Beutel eine schwarze Kugel ergriffen sei, und

$$P_1 = \frac{N_1}{N}, \quad P_2 = \frac{N_2}{N}, \quad \cdots$$

die Wahrscheinlichkeiten, daß überhaupt eine blindlings gezogene Kugel aus dem ersten, dem zweiten usw. Beutel stammt.

Die Gesamtzahl aller schwarzen Kugeln, also der Möglichkeiten, die dem Erscheinen einer schwarzen Kugel günstig sind, beträgt n, und darunter sind n_1, die aus dem ersten Beutel stammen. Nehmen wir an, daß alle diese Züge gleich möglich sind, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w_1 = \frac{n_1}{n},$$

und diese Wahrscheinlichkeit ist also, wie es auch vorauszusehen war, nur von der Zahl und der Verteilung der schwarzen Kugeln, nicht von den Zahlen der weißen abhängig.

Benutzen wir aber nicht die Zahlen, sondern nur die Wahrscheinlichkeiten p_1, P_1, P, so ergibt sich nach den Formeln für p_1, P_1, P

$$w_1 = \frac{p_1 P_1}{P}.$$

4. Kehren wir wieder zu unserer allgemeinen Darstellung zurück, so können wir sagen:

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Erscheinung α aus der Ursachsklasse A stammt, ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeit von A mit der Wahrscheinlichkeit, daß A der Erscheinung α günstig sei, geteilt durch die Wahrscheinlichkeit von α überhaupt.

5. Um ein ganz einfaches Zahlenbeispiel zu nehmen, seien drei Beutel gegeben, in deren erstem zwei Goldmünzen, im zweiten zwei Silbermünzen, im dritten eine Gold- und eine Silbermünze liegen.

Ich habe blindlings eine Goldmünze ergriffen und frage nach

der Wahrscheinlichkeit w_1, daß die zweite Münze desselben Beutels gleichfalls eine Goldmünze sei.

Dies findet nur dann statt, wenn die zuerst gezogene Münze aus dem ersten Beutel stammt. Es ist hier

$$P = \tfrac{1}{2}, \quad P_1 = P_2 = P_3 = \tfrac{1}{3},$$

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 0, \qquad p_3 = \tfrac{1}{2},$$

und folglich

$$w_1 = \tfrac{2}{3}.$$

Nachdem also eine Goldmünze gezogen ist, ist es wahrscheinlicher, daß in demselben Beutel noch eine zweite Goldmünze zu finden ist.

6. Es ergibt sich hieraus ein Resultat, was auf den ersten Blick befremdet, wiewohl es richtig ist.

Nehmen wir an, im ersten Beutel sei nur eine Kugel und zwar eine schwarze, im zweiten sei eine schwarze Kugel unter einer sehr großen Zahl von anderen. Die Wahrscheinlichkeit, aus dem ersten Beutel eine schwarze Kugel zu ziehen, ist hier der Gewißheit gleich, also ist $p_1 = 1$ zu setzen, während p_2 einen verschwindend kleinen Wert hat. Ist N die Gesamtzahl der Kugeln, so ist

$$P_1 = \frac{1}{N}, \quad P_2 = \frac{N-1}{N},$$

$$p_1 = 1, \quad p_2 = \frac{N}{N-1}, \quad P = \frac{2}{N},$$

und folglich $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$. Es spricht also hier die gleiche Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine gezogene schwarze Kugel aus dem ersten, wie daß sie aus dem zweiten Beutel stammt.

Achter Abschnitt.

Ausgleichung der Beobachtungsfehler.

§ 57. Beobachtungsfehler.

1. Alles menschliche Wissen und Können ist unvollkommen. So auch sind alle Messungen in der Astronomie, der Physik, der Geodäsie, der Technik oder wo sie sonst vorkommen mögen, auch wenn sie von dem geübtesten und sorgfältigsten Beobachter mit den besten Instrumenten ausgeführt sind, nicht absolut genau, sondern mit größeren oder kleineren Fehlern behaftet.

Es ist ein nahe liegendes Mittel, die Resultate dadurch zu verbessern, daß man ein und dieselbe Messung mehrmals wiederholt, vielleicht unter abgeänderten Bedingungen. Da diese verschiedenen Messungen einer und derselben Größe aber niemals genau miteinander übereinstimmen werden, so wird ein gewisser mittlerer Wert mit Wahrscheinlichkeit als der richtige zu betrachten sein. Es fragt sich aber, nach welchen Gesichtspunkten man diesen mittleren Wert auszuwählen oder zu bestimmen hat, und diese Frage zu lösen ist eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

2. Die Beobachtungsfehler sind von zwei verschiedenen Arten. Die erste Art bilden die sogenannten systematischen oder auch konstanten Fehler. Es sind die Fehler, die vorzugsweise in einem bestimmten Sinne wirken, für die daher eine einfache Ursache (§ 47) vorauszusetzen ist. Sie können z. B. in einer fehlerhaften Konstruktion des Meßinstrumentes oder in seiner Aufstellung ihre Ursachen haben. Man wird sie nach Möglichkeit zu ermitteln suchen, indem man die Messung an Objekten ausführt, deren Größe bereits anderswoher bekannt ist, wobei sich dann zeigt, ob eine Tendenz der Abweichung im einen oder anderen Sinne vorhanden ist. Es ist die erste Aufgabe des Beobachters, diese systematischen Fehler, die sich der Wahrscheinlichkeitsrechnung entziehen, zu ermitteln und ihren Einfluß unschädlich zu machen.

3. Die zweite Art von Fehlern sind die zufälligen. Es liegt in dem Begriffe des Zufalls, daß sich diese Fehler nicht auf einfache Ursachen zurückführen lassen; von diesen ist anzunehmen, daß sie nicht vorwiegend in einem Sinne wirken. Sie werden aber, je nach der Geschicklichkeit und Sorgfalt des Beobachters und nach der Güte des Instrumentes, in engeren oder weiteren Grenzen schwanken. Diese zufälligen Fehler sind nun, wie alle Zufallserscheinungen, der Wahrscheinlichkeitsrechnung zugänglich. Es ist Gauß, dem wir die Begründung einer Wahrscheinlichkeitstheorie der Beobachtungsfehler verdanken, die unter dem Namen der Methode der kleinsten Quadrate bekannt ist. Sie gibt dem rechnenden Naturforscher ein sicheres Mittel in die Hand, durch das er Messungen, die nicht vollständig untereinander übereinstimmen, am besten zur Gewinnung eines Mittelwertes miteinander verbindet, unter der Voraussetzung, daß keine systematischen Fehler im Spiele sind. Dem Geiste der Wahrscheinlichkeitsrechnung entsprechend ist der Nutzen dieser Methode der, daß zwar möglicherweise im einzelnen Falle ein anderer Wert als der mit ihr gefundene der Wahrheit noch näher kommen kann, daß aber im großen Ganzen, wenn man regelmäßig nach dieser Methode verfährt, die Abweichungen von der Wahrheit verschwindend klein sind (entsprechend dem Bernoullischen Theorem).

Da bei allen Wahrscheinlichkeitsfragen das subjektive Ermessen, Erfahrung und richtige Beurteilung unbekannter Umstände eine Rolle spielt, so liegt es in der Natur der Sache, daß in diesen Fragen von einem mathematischen Beweise im Sinne der Arithmetik nicht die Rede sein kann. Alle Ableitungen, die zur Begründung der Methode der kleinsten Quadrate gegeben sind, haben keinen anderen Zweck als den, die Gründe namhaft zu machen, die für diese Methode sprechen, und das Gewicht dieser Gründe möglichst zu verstärken.

§ 58. Das arithmetische Mittel.

1. Jede Messung setzt sich aus einer Menge undefinierbarer Akte unserer Muskeln, unserer Sinnesorgane und unseres Verstandes zusammen, deren jeder mit gewissen Fehlern behaftet ist. Dazu kommen noch die zufälligen Fehler, die in dem Meßinstrument, der Beschaffenheit der Luft, kurz in der Umgebung ihren Grund haben. Alle diese Fehler zusammen haben Einfluß auf das Resultat der Messung, und zwar, wenn systematische Fehler ausgeschlossen sind, ebenso leicht im einen wie im anderen Sinne.

Ob wir die möglichen Fehler als stetig annehmen, oder aus einer sehr großen aber endlichen Zahl einzelner Elementarfehler zu-

sammengesetzt denken, das wird auf das Resultat ohne wesentlichen Einfluß sein. Wenn wir aber die letztere Annahme machen, so können wir ein sehr einfaches Bild an die Stelle der Messung setzen, das die wesentlichen Verhältnisse jeder Messung, mag sie sich auf eine Länge, einen Winkel, eine Zeit oder was immer beziehen, getreu widergibt.

2. Wir denken uns eine Urne, die schwarze und weiße Kugeln in unbekanntem Verhältnis enthält. Es soll das Verhältnis der Zahl der weißen zu der der schwarzen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, zu der Gesamtzahl der Kugeln ermittelt werden. Zu dieser Bestimmung soll uns aber nur das Mittel zu Gebote stehen, daß wir beliebig oft eine Kugel aus der Urne nehmen, wieder zurückwerfen und neu durcheinander mischen und dabei die gezogenen weißen Kugeln abzählen.

Ist wie früher a die Anzahl der weißen, n die Gesamtzahl der Kugeln, die in der Urne enthalten sind, so ist

$$x = \frac{a}{n}$$

die gesuchte Zahl, die der zu messenden Größe entspricht. Die einzelnen Züge entsprechen den Elementarakten einer Messung, und, in Gruppen zusammengefaßt, den einzelnen Messungen derselben Größe. Das Verhältnis $\xi = \alpha : \nu$ der Zahl der gezogenen weißen Kugeln zu der Gesamtzahl ν aller Züge ist das Resultat der Messung.

Nach dem Bernoullischen Theorem wächst die Wahrscheinlichkeit, daß ξ in einem beliebig gegebenen Intervall $x - \varDelta$ und $x + \varDelta$ liegt, mit der Zahl ν ins Unbegrenzte, und folglich wird bei hinlänglich großem ν dieses Verhältnis ein Näherungswert für das unbekannte x sein.

3. Wenn nur einmal ν Züge geschehen sind und nichts weiter bekannt ist, so werde ich keinen Grund haben, eher anzunehmen, daß x über ξ, als daß es unter ξ liegt, und ich werde also bis auf weiteres ξ als den wahrscheinlichsten Wert von x zu betrachten haben. Die Wahrscheinlichkeit, daß x um mehr als $\varDelta$ von ξ abweicht, wird um so kleiner, je größer die Zahl ν ist. Ich werde daher dem Resultat der Zählung, das zu ξ geführt hat, ein um so größeres Gewicht beilegen, je größer ν ist.

Das Gewicht einer solchen Messung, verglichen mit anderen, die sich nur durch den Wert von ν unterscheiden, erhält damit eine Maßzahl p, die wir mit ν proportional annehmen.

4. Wir denken uns nun die ganze Ziehung von ν Zügen in nacheinander ausgeführte Teilziehungen von $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ Zügen zerlegt und jedesmal die Zahl $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ der weißen Züge bestimmt. Es ist dann

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \cdots,$$

und die Zahl der weißen Kugeln

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots.$$

Betrachten wir jede der Teilziehungen als das Bild je einer besonderen Messung, deren Resultate

$$\xi_1 = \frac{\alpha_1}{\nu_1}, \quad \xi_2 = \frac{\alpha_2}{\nu_2}, \quad \xi_3 = \frac{\alpha_3}{\nu_3}, \ldots$$

sind, so ist

$$\alpha = \nu_1 \xi_1 + \nu_2 \xi_2 + \nu_3 \xi_3 + \cdots$$

und folglich

$$\xi = \frac{\nu_1 \xi_1 + \nu_2 \xi_2 + \nu_3 \xi_3 + \cdots}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \cdots},$$

oder, wenn wir die Gewichte $p_1, p_2, p_3, \ldots$ einführen,

$$x = \frac{p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3 + \cdots}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots}, \tag{1}$$

und das ist also der wahrscheinlichste Wert, der dem x als Resultat der verschiedenen Messungen zuzuschreiben ist. Haben diese Messungen alle das gleiche Gewicht, sind es also Messungen einer und derselben Größe, die unter unveränderten Umständen und mit derselben Sorgfalt angestellt sind, so haben wir $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \cdots$ zu setzen, und wenn wir also die Anzahl der Messungen mit m bezeichnen, so ist

$$\xi = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_m}{m}, \tag{2}$$

d. h. der wahrscheinlichste Wert, der sich aus mehreren Messungen derselben Größe x ergibt, die unter denselben Umständen angestellt sind, ist das arithmetische Mittel (Durchschnittswert) aus den einzelnen Ergebnissen. Dies ist das Prinzip des arithmetischen Mittels, das sich also aus dem von uns gewählten Bilde ohne weiteres ergibt.

Sind irgend welche Umstände vorhanden, die der einen Beoachtung einen Vorzug vor der anderen geben, so werden wir den Beobachtungen verschiedene Gewichte beilegen und die Formel (1) statt der Formel (2) anwenden. Das Gewicht p der Gasamtheit der Beobachtungen ist die Summe der Gewichte der einzelnen Beobachtungen.



(3) $$p = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots.$$

Für die Schätzung der Gewichte lassen sich aber keine allgemeinen Regeln angeben.

Setzt man das Gewicht einer einzelnen Beobachtung gleich 1, so wird das arithmetische Mittel aus p Beobachtungen das Gewicht p haben, oder: eine Beobachtung vom Gewichte p ist so gut wie p Beobachtungen vom Gewichte 1.

§ 59. Der mittlere Wert einer Beobachtungsreihe.

1. Wenn sich in einer größeren Zahl von Messungen, die sich auf eine und dieselbe Größe x beziehen und die Werte $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ ergeben haben, eine vorfindet, die weit aus dem Bereiche der übrigen hinausfällt, so kann der Verdacht vorliegen, daß bei dieser ein ganz besonderer Umstand einen außergewöhnlich großen Fehler herbeigeführt hat, der den Wert dieser Beobachtung ganz aufhebt; um ein grobes Beispiel in unserem Bilde anzuführen, daß man sich etwa bei der Feststellung der Zahl der weißen Kugeln verzählt habe. Eine solche Beobachtung müßte dann bei der Feststellung des Wertes, den man für x zu nehmen hat, außer Betracht bleiben, da sie über den wahren Wert dieser Größe absolut nichts lehren könnte.

Die Frage aber, welche Grenze der Abweichung von den mittleren Werten einen solchen Verdacht hinlänglich begründet, von wo an man also eine solche irreguläre Beobachtung auszuschalten hat, läßt sich wieder nicht nach allgemeinen Prinzipien beantworten und muß der Erfahrung und dem Taktgefühl des Beobachters überlassen bleiben.

Man wird vielleicht einem Anfänger, um Willkür auszuschließen und ihn vor der Gefahr zu schützen, daß etwa eine vorgefaßte Meinung über das zu erwartende Resultat unbewußt Einfluß gewinne, die Vorschrift geben, alle Beobachtungen nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu berücksichtigen und keine auszuschalten. Dem erfahrenen Forscher muß es aber überlassen bleiben, hier in jedem besonderen Falle nach bestem Wissen zu entscheiden.

2. Einigermaßen wird diesen Zweifeln Rechnung getragen bei einer zweiten Methode, aus einer Reihe von Beobachtungen den wahrscheinlichsten Wert der gemessenen Größe abzuleiten, die von Dirichlet theoretisch untersucht ist.[1])

Wenn man sich nämlich nicht darauf beschränkt, für die Verbindung der Beobachtungen eine von vornherein feststehende, von dem

1) Bemerkungen über die zweckmäßigste Art, Beobachtungen zur Bestimmung unbekannter Elemente zu verbinden. Dirichlets Werke Bd. II, S. 347. Bd. I, S. 379.

Ergebnisse der Beobachtung unabhängige Vorschrift zu geben, sondern, was prinzipiell richtig ist, das Ergebnis der Beobachtungen selbst bei der Art ihrer Verwertung mitsprechen läßt, so gelangt man dazu, den Messungen, die von dem Mittel am meisten abweichen, als minder zuverlässig ein geringeres Gewicht zuzuschreiben. In welchem Maße dies geschehen soll, darüber läßt sich freilich auch keine allgemeine Regel angeben. Eine Art aber, wie dies geschehen kann, ist die folgende:

Angenommen, es sei eine ungerade Anzahl $2m-1$ von Messungen einer unbekannten Größe x angestellt. Wir ordnen die Resultate der Messungen der Größe nach

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{2m-1}$$

und nehmen für x den mittelsten dieser Werte

$$x = \xi_m .$$

Man sieht, daß bei dieser Bestimmung der Wert von x nicht verändert wird, wenn etwa einer der äußersten Werte ξ_1 oder ξ_{2m-1} von den übrigen weiter abweicht, während das arithmetische Mittel dabei in demselben Sine verschoben wird.

Man gelangt zu dieser Regel durch Anwendung des Prinzips vom arithmetischen Mittel, wenn man der mittelsten Beobachtung ein beliebiges Gewicht, das gleich 1 genommen werden kann, zuschreibt und die Gewichte der übrigen mit ihrem Abstand vom Mittel umgekehrt proportional annimmt.

Um dann die Formel § 58 (1) anzuwenden, haben wir die Gewichte so zu bestimmen, daß

$$p_1 = \frac{q}{\xi_m - \xi_1}, \quad p_2 = \frac{q}{\xi_m - \xi_2}, \ldots, \quad p_{m-1} = \frac{q}{\xi_m - \xi_{m-1}},$$
$$p_{m+1} = \frac{q}{\xi_{m+1} - \xi_m}, \; p_{m+2} = \frac{q}{\xi_{m+2} - \xi_m}, \ldots, \; p_{2m-1} = \frac{q}{\xi_{2m-1} - \xi_m},$$
$$p_m = 1$$

wird, wenn q ein beliebiger Faktor ist.

Es ist dann

$$p_r \xi_r = p_r \xi_m - q, \quad \text{wenn } r < m,$$
$$p_r \xi_r = p_r \xi_m + q, \quad \text{wenn } r > m,$$
$$p_m \xi_m = p_m \xi_m .$$

Da nun ebenso viele r über m wie unter m liegen, so ergibt sich durch Addition aller dieser Ausdrücke

$$\frac{p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3 + \cdots}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots} = \xi_m .$$

Das Entsprechende für eine gerade Zahl von Beobachtungen würde sein, daß man das arithmetische Mittel zwischen den zwei mittelsten Werten annimmt.

§ 60. Wahrscheinlicher Fehler.

1. Wenn eine unbekannte Größe x durch Messungen und Beobachtungen irgend welcher Art bestimmt ist und dafür ein genäherter Wert ξ_1 gefunden ist, so werde ich bis auf weiteres diesen Wert ξ_1 für den wahrscheinlichsten Wert von x halten müssen. Wenn aber auf anderen Wegen oder durch neue Messungen für dieselbe Größe x andere Werte ξ_2, ξ_3 ... gefunden sind, so ist es noch ungewiß, welcher Wert für den wahrscheinlichsten zu halten ist.

Ich werde, um die Regel des arithmetischen Mittels anwenden zu können, jedem dieser Werte $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ ein gewisses Gewicht $p_1, p_2, p_3, \ldots$ beilegen müssen, und dann das Mittel

$$\xi = \frac{p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3 + \cdots}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots}$$

für den wahrscheinlichsten Wert halten.

Soll dieser Wert ξ wieder mit anderweitigen Bestimmungen von x verbunden werden, so wird ihm das Gewicht

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots$$

beizulegen sein.

2. Die Schwierigkeit besteht nun immer in der richtigen Abschätzung des Gewichtes, die bei den komplizierten Vorgängen einer messenden Beobachtung nicht auf genaue mathematische Grundsätze zurückgeführt werden kann.

Um aber trotzdem zu einem bestimmten Verfahren zu gelangen, müssen wir eine Hypothese machen.

Bei jeder Beobachtung ξ wird, wenn man sie für sich, ohne Rücksicht auf die übrigen, betrachtet, eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür vorhanden sein, daß ihr Fehler dem absoluten Werte nach einen gegebenen positiven Wert nicht überschreitet. Eine absolute Genauigkeit hat eine verschwindend kleine Wahrscheinlichkeit, während es andererseits sicher ist, also die Wahrscheinlichkeit „Eins" hat, daß der Fehler zwischen Null und Unendlich liegt. Es muß also eine bestimmte Grenze r geben, bei der die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler darunter liegt, $= 1/2$ ist, und es hat dann die gleiche Wahrscheinlichkeit, daß der absolute Wert des Fehlers unter r liegt, wie daß er darüber liegt. Diese Größe r heißt der wahrscheinliche Fehler der Beobachtung ξ.

Man kann die Definition von r auch so ausdrücken: Es ist 1 gegen 1 zu wetten, daß der Fehler unter r liegt.

Je zuverlässiger die Beobachtung ist, desto kleiner wird ihr wahrscheinlicher Fehler sein und dieser kann daher als Maß für die Genauigkeit der Beobachtung dienen.

3. Man wird in einer Beobachtungsreihe einer Beobachtung ein um so größeres Gewicht einräumen, je kleiner der wahrscheinliche Fehler ist, und über diesen Zusammenhang, der sich aus allgemeinen Gründen nicht exakt bestimmen läßt, muß eine Annahme gemacht werden.

Das Nächstliegende wäre wohl, daß man das Gewicht dem wahrscheinlichen Fehler umgekehrt proportional setzt. Diese Annahme ist aber nach dem Urteile erfahrener Forscher wie Gauß, Laplace nicht als die beste anzusehen, sondern das Gewicht einer Beobachtung nimmt in einem stärkeren Verhältnisse ab. Man hat einer Beobachtung, die den doppelten wahrscheinlichen Fehler hat, wie eine andere, weniger als die Hälfte des Gewichtes der ersten beizulegen, und die Annahme, die allgemein gemacht wird, ist die, daß das Gewicht umgekehrt proportional mit dem Quadrate des wahrscheinlichen Fehlers ist.

Man kann sich die Richtigkeit dieses Verfahrens noch in anderer Weise klar machen, wie weiter unten gezeigt werden wird (§ 68, 5.).

Das Gewicht ist eine Verhältniszahl, die nur einen Sinn hat, wenn es sich darum handelt, mehrere Beobachtungen miteinander in Verbindung zu setzen, und es kann nach Belieben einer dieser Beobachtungen das Gewicht 1 beigelegt oder auch eine andere Einheit gewählt werden. Der wahrscheinliche Fehler dagegen ist in denselben Einheiten ausgedrückt, wie die zu messende Größe selbst. Wir können demnach auch, indem wir über die Einheit des Gewichtes verfügen, mit p das Gewicht, mit r den wahrscheinlichen Fehler bezeichnen,

$$p = \frac{1}{r^2}$$

setzen.

4. Wenn eine Reihe von Bestimmungen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ einer und derselben Größe x vorliegt mit den Gewichten $p_1, p_2, p_3, \ldots$ und den wahrscheinlichen Fehlern $r_1, r_2, r_3, \ldots$, so erhält man daraus nach Nr. 1 ein Mittel ξ, dessen Gewicht $= p_1 + p_2 + p_3 + \cdots$ ist. Für den wahrscheinlichen Fehler r dieses Wertes ξ erhält man $1 : \sqrt{p}$ und daraus

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \cdots}.$$

§ 61. Messung von Vielfachen einer Unbekannten.

1. Wir haben früher den Fall betrachtet, daß eine unbekannte Größe x mehrmals direkt gemessen sei, und haben die Bestimmung der Unbekannten durch das arithmetische Mittel als die beste erkannt. Wir betrachten jetzt einen etwas allgemeineren Fall, daß nicht x selbst, sondern verschiedene Vielfache von x

(1) $$a_1 x, \quad a_2 x, \quad a_3 x, \ldots$$

gemessen seien, und daß die Messungen die Werte

(2) $$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \ldots$$

ergeben haben. Hierin sollen die $a_1, a_2, a_3, \ldots$ gegebene positive Zahlen sein. Aus diesen Messungen erhält man die Werte von x

(3) $$\frac{\xi_1}{a_1}, \quad \frac{\xi_2}{a_2}, \quad \frac{\xi_3}{a_3}, \ldots,$$

die, wenn die Messungen absolut genau wären, alle miteinander identisch sein müßten, wegen der Beobachtungsfehler aber voneinander abweichen werden. Es ist die Frage, welchen Wert für x wir für den wahrscheinlichsten zu halten haben.

2. Diese Aufgabe ist durch das arithmetische Mittel gelöst, wenn die Gewichte

(4) $$p_1, p_2, p_3, \cdots$$

der einzelnen Bestimmungen (3) bekannt sind; denn dann ist der wahrscheinlichste Wert von x

(5) $$\xi = \frac{\frac{p_1 \xi_1}{a_1} + \frac{p_2 \xi_2}{a_2} + \frac{p_3 \xi_3}{a_3} + \cdots}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots},$$

und das Gewicht dieser Bestimmung bei etwaiger weiterer Kombination mit anderen Messungen ist

(6) $$p = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots.$$

3. Nehmen wir an, daß die Messungen (2) alle denselben Grad von Zuverlässigkeit haben, so wird ihnen allen der gleiche wahrscheinliche Fehler ϱ zuzuschreiben sein. Der daraus abgeleitete Wert ξ_1/a_1 hat dann aber nur den wahrscheinlichen Fehler ϱ/a_1 und demnach sind die wahrscheinlichen Fehler der Bestim-



mungen (3)

$$\frac{\varrho}{a_1}, \quad \frac{\varrho}{a_2}, \quad \frac{\varrho}{a_3}, \ldots, \tag{7}$$

und nach der in § 60, 3. gemachten Annahme über den Zusammenhang zwischen Gewicht und wahrscheinlichem Fehler haben wir

$$p_1 = \frac{a_1^2}{\varrho^2}, \quad p_2 = \frac{a_2^2}{\varrho^2}, \quad p_3 = \frac{a_3^2}{\varrho^2}, \ldots$$

zu setzen und finden nach (5)

$$\xi = \frac{a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 + \cdots}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots},$$

wofür wir auch abgekürzt

$$\xi = \frac{\Sigma a_1 \xi_1}{\Sigma a_1^2} \tag{8}$$

schreiben können. Das Gewicht dieser Bestimmung ist

$$p = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots}{\varrho^2},$$

und folglich ihr wahrscheinlicher Fehler

$$r = \frac{\varrho}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots}}.$$

§ 62. Kleinste Summe der Fehlerquadrate.

1. Wenn die Unbekannte x genau bekannt wäre, so wären auch die Fehler der Messungen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ bekannt, nämlich

$$D_1 = a_1 x - \xi_1, \quad D_2 = a_2 x - \xi_2, \quad D_3 = a_3 x - \xi_3, \ldots,$$

wenn wir eine zu kleine Größe als mit einem positiven, eine zu große als mit einem negativen Fehler behaftet annehmen.

2. Nun ist aber x nicht genau bekannt, und also sind es auch nicht die Fehler. Der für uns wahrscheinlichste Wert von x ist aber ξ (§ 61, (5)), und folglich sind

$$\Delta_1 = a_1 \xi - \xi_1, \quad \Delta_2 = a_2 \xi - \xi_2, \quad \Delta_3 = a_3 \xi - \xi_3, \ldots$$

bis zu einer genaueren Kenntnis von x die wahrscheinlichsten Werte der Fehler $D_1, D_2, D_3, \ldots$ (Hier ist der wahrscheinlichste Wert eines Fehlers wohl zu unterscheiden von dem wahrscheinlichen Fehler, der in § 60, 2. definiert ist).

3. Zur Beurteilung der Zuverlässigkeit einer Bestimmung ist von Wichtigkeit die Summe der Fehlerquadrate

$$Q = D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + \cdots,$$

auf deren Wert positive und negative Fehler gleichmäßig einwirken Diese Summe hat immer einen positiven Wert, und sie wäre nur dann gleich Null, wenn alle Messungen ganz exakt wären. Q ist unbekannt, so lange der wahre Wert von x unbekannt ist. Den wahrscheinlichsten Wert R von Q erhalten wir aber, wenn wir den wahrscheinlichsten Wert von x einführen, nämlich

$$R = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \cdots.$$

4. Wir beweisen nun den Satz:

Unter allen möglichen Annahmen, die man über den Wert von x machen kann, gibt ξ der Summe der Fehlerquadrate den kleinsten Wert.

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} D_1^2 - \Delta_1^2 &= (D_1 - \Delta_1)(D_1 + \Delta_1) \\ &= a_1(x - \xi)(a_1(x + \xi) - 2\xi_1), \end{aligned}$$

und wenn wir dieselben Ausdrücke für D_2, Δ_2, a_2, $\xi_2, \ldots$ bilden und die Summe nehmen, so folgt

$$Q - R = (x - \xi)[(x + \xi)\sum a_1^2 - 2\sum a_1\xi_1].$$

Es ist aber nach § 61, (8)

$$\sum a_1\xi_1 = \xi\sum a_1^2,$$

und folglich

$$Q - R = (x - \xi)^2\sum a_1^2,$$

also immer positiv (außer wenn $x = \xi$ ist), daher ist $Q > R$ und R ist der kleinste unter allen Werten, die Q annehmen kann. Wegen dieser Eigenschaft der Summe der Fehlerquadrate führt die Methode, die wir hier auseinandergesetzt haben, eine Reihe von Beobachtungen am zweckmäßigsten zur Bestimmung einer Unbekannten zu verbinden, den Namen der Methode der kleinsten Quadrate.[1])

1) Es ist ohne Zweifel Gauß, der diese Methode zuerst ersonnen und angewandt hat (seit 1797). Veröffentlicht hat er aber erst viel später etwas darüber (1809 in der Theoria motus corporum coelestium, 1816 in der Zeitschrift für Astronomie und seit 1821 in mehreren Abhandlungen in den Schriften der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften [Gauß Werke Band 4]). Inzwischen



§ 63. Wahrscheinlicher Fehler und mittlerer Fehler.

1. Der wahrscheinliche Fehler ϱ der Beobachtungsreihe $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ ist in der Regel nicht bekannt, und darum ist es auch der wahrscheinliche Fehler r des Endergebnisses ξ nicht. Aber die Beobachtungen selbst geben dann eine gewisse Vermutung über die Größe des wahrscheinlichen Fehlers, ebenso wie die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln eine Vermutung über das wahre Verhältnis der weißen zu den schwarzen Kugeln in der Urne gibt; und diese Vermutung wird um so besser begründet sein, je größer die Zahl der Beobachtungen ist.

Da wir die wahren Fehler $D_1, D_2, D_3, \ldots$ nicht kennen, setzen wir die wahrscheinlichen $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ an ihre Stelle, und es folgt nun aus dem Begriffe des wahrscheinlichen Fehlers ϱ, daß, wenn nur die Anzahl dieser Fehler groß genug ist, etwa ebenso viele dem absoluten Werte nach über als unter ϱ liegen. Die bekannten Daten sprechen also für folgende wahrscheinlichste Annahme über den wahrscheinlichen Fehler:

> Man ordne die absoluten Werte der Δ ihrer Größe nach. Ist die Anzahl der Δ eine ungerade, so nehme man den mittelsten von ihnen für ϱ. Ist aber die Anzahl eine gerade, so kann mit gleichem Rechte jeder zwischen den beiden mittelsten Δ gelegene Wert für ϱ genommen werden.

Denn jeder solche Wert von ϱ hat die Eigenschaft, daß gleich viele Δ über ihm als unter ihm liegen.

2. Außer dem wahrscheinlichen Fehler kann zur Charakterisierung der Zuverlässigkeit der Beobachtungen irgendeiner Art noch eine andere Größe, der mittlere Fehler m, dienen, den wir so definieren können:

Es seien die Beobachtungen in großer Zahl n ausgeführt und ihre Fehler seien $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$. Dann setze man

$$m^2 = \frac{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + \cdots + D_n^2}{n},$$

also

$$m = \sqrt{\frac{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + \cdots + D_n^2}{n}}.$$

> Der mittlere Fehler ist also die Quadratwurzel aus dem arithmetischen Mittel der Fehlerquadrate.

---

waren andere Forscher unabhängig auf dieselbe Methode gekommen (Legendre 1805, Adrain in Amerika 1808). Von besonderer Bedeutung sind die theoretischen Untersuchungen von Laplace in der Théorie analytique des Probabilités (in drei Auflagen von 1809—1820).

Diese Definition gibt allerdings erst bei einer unendlich großen Zahl von Beobachtungen einen genaueren Sinn. Man wird aber, wenn man nur eine beschränkte Zahl von Beobachtungen hat, auch diesen endlichen Ausdruck als einen Näherungswert von m betrachten dürfen und wird überdies, wenn man die wahren Fehler nicht kennt, an deren Stelle sich mit den wahrscheinlichsten begnügen müssen. Es ist dann

$$\mu = \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \cdots + \Delta_n^2}{n}}$$

der wahrscheinlichste Wert des mittleren Fehlers der vorliegenden Beobachtungsreihe.

3. In der Praxis pflegt man jedoch dem Umstande, daß mit den wahrscheinlichsten Werten der Fehler gerechnet werden muß statt mit den wahren, unter Annahme einer sehr plausiblen Hypothese in folgender Weise Rechnung zu tragen. Ist x der wahre Wert der Unbekannten, ξ ihr wahrscheinlichster Wert und wird $x - \xi = \sigma$ gesetzt, so hat man offenbar

$$\begin{aligned} D_1 &= \Delta_1 + \sigma \\ D_2 &= \Delta_2 + \sigma \\ &\cdots\cdots \\ D_n &= \Delta_n + \sigma \end{aligned}$$

und daher

$$D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2 + 2\sigma(\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n) + n\sigma^2.$$

Da nun bei einer großen Zahl von Beobachtungen der Fehler $+\Delta_i$ ebenso oft vorkommen wird, als der Fehler $-\Delta_i$, so wird

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n = 0$$

gesetzt werden dürfen, und man hat daher sehr nahe:

$$D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2 + n\sigma^2.$$

σ ist unbekannt; es wird aber als plausible Hypothese angesehen werden dürfen, dafür den mittleren Wert zu nehmen, den es haben kann, d. h. den mittleren Fehler von ξ; somit (siehe unten Nr. 4)

$$\sigma = \frac{\sqrt{\dfrac{D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2}{n}}}{\sqrt{n}}$$

oder

$$n\sigma^2 = \frac{D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2}{n} = \mu^2.$$

Also gibt obige Gleichung, durch n dividiert:

$$\mu^2 = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2}{n} + \frac{\mu^2}{n}$$

oder

$$\mu = \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2}{n-1}}.$$

Rechnet man den mittleren Fehler einer Beobachtung nach dieser Formel aus den wahrscheinlichsten Fehlern, so hat man damit dem Umstande einigermaßen Rechnung getragen, daß der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten vom wahren um den Betrag $\frac{\mu}{\sqrt{n}}$ abweichen kann.

Der mittlere Fehler steht in noch direkterem Zusammenhange mit der Methode der kleinsten Quadrate, die man jetzt auch so charakterisieren kann:

> Der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten, der sich aus einer gegebenen Beobachtungsreihe ergibt, ist der, für den sich der kleinstmögliche Wert des mittleren Fehlers ergibt.

Eine Betrachtung, die nicht elementarer Natur ist und sich auf eine plausible Annahme stützt, führt dazu, daß der wahrscheinliche und der mittlere Fehler in einem ganz bestimmten numerischen Verhältnisse stehen:

$$\varrho = 0{,}6744897\, m.$$

Aus dieser Formel wird der wahrscheinlichste Fehler in der Regel berechnet, da das Abzählungsverfahren (Nr. 1) nur zu ungenauen Resultaten führen kann, namentlich wenn die Zahl der Beobachtungen nicht groß ist.

Da die Angabe des mittleren Fehlers denselben Dienst leistet, wie die des wahrscheinlichen Fehlers, ersterer aber immer direkt berechnet werden kann, so kommt man in der Praxis immer mehr vom wahrscheinlichen Fehler ab und beschränkt sich auf den mittleren Fehler.

4. Wir haben oben schon von einem Satz Gebrauch gemacht, der die Berechnung des mittleren Fehlers des Resultates aus einer Beobachtungsreihe lehrt, wenn der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtungen bekannt ist. Wir leiten diesen Satz aus einer allgemeinen Betrachtung ab, indem wir fragen: wir groß ist der mittlere Fehler M der Funktion

$$f = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n,$$

wenn die mittleren Fehler von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bzw. $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sind?

Sei zuerst $f = \alpha_1 x_1$; sind dann $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_i$ die bei der Messung begangenen Fehler, so wird der mittlere Fehler von x_1 gefunden aus

$$\mu_1^2 = \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_i^2}{i};$$

wenn aber in x_1 der Fehler δ begangen wurde, dann wird f mit dem Fehler $\alpha_1 \delta$ behaftet sein und der mittlere Fehler von f wird also gefunden aus:

$$M^2 = \frac{\alpha_1^2 \delta_1^2 + \cdots + \alpha_1^2 \delta_i^2}{i} = \alpha_1^2 \mu_1^2.$$

Sei ferner $f = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ und habe x_1 die Fehler $\delta_1, \ldots, \delta_i$, x_2 die Fehler $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$, dann wird f folgende im Fehler aufweisen:

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
\alpha_1\delta_1 + \alpha_2\varepsilon_1 & \alpha_1\delta_2 + \alpha_2\varepsilon_1 & \ldots & \alpha_1\delta_i + \alpha_2\varepsilon_1 \\
\alpha_1\delta_1 + \alpha_2\varepsilon_2 & \alpha_1\delta_2 + \alpha_2\varepsilon_2 & \ldots & \alpha_1\delta_i + \alpha_2\varepsilon_2 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\alpha_1\delta_1 + \alpha_2\varepsilon_m & \alpha_1\delta_2 + \alpha_2\varepsilon_m & \ldots & \alpha_1\delta_i + \alpha_2\varepsilon_m
\end{array}$$

und der mittlere Fehler von f wird also gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate aller dieser Fehler dividiert durch im oder:

$$M^2 = \alpha_1^2 \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_i^2}{i} + \alpha_2^2 \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_m^2}{m} + \frac{2\alpha_1\alpha_2}{im} \sum_{k=1}^{k=m} \varepsilon_k (\delta_1 + \cdots + \delta_i).$$

Da nun $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_i = 0$ ist, so folgt:

$$M^2 = \alpha_1^2 \mu_1^2 + \alpha_2^2 \mu_2^2.$$

Nun kann man leicht weiter schließen; ist

$$f = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$$

so setze man

$$f = f_1 + \alpha_3 x_3$$

und hat hiervon dann als mittleren Fehler

$$M^2 = M_1^2 + \alpha_3^2 \mu_3^2,$$

oder

$$M^2 = \alpha_1^2 \mu_1^2 + \alpha_2^2 \mu_2^2 + \alpha_3^2 \mu_3^2.$$

Allgemein: ist $f = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ und sind $\mu_1, \ldots, \mu_n$ die mittleren Fehler von $x_1, \ldots, x_n$, so ist der mittlere Fehler von f zu finden aus:

$$M^2 = \alpha_1^2 \mu_1^2 + \alpha_2^2 \mu_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 \mu_n^2.$$

5. Wollen wir jetzt den mittleren Fehler des aus den einzelnen Messungsergebnissen $l_1, l_2, \ldots, l_n$ gebildeten Resultates



$$f = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n}$$

ableiten, so gibt der vorige allgemeine Satz, wenn μ der mittlere Fehler einer Messung, also eines l ist, da hier $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \frac{1}{n}$ und $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = \mu$ ist:

$$M^2 = \frac{1}{n^2} n \mu^2$$

oder:

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{n}}.$$

Daraus ersieht man, daß durch Häufung von Beobachtungen der mittlere Fehler des **Resultates** herabgedrückt werden kann, daß der Fehler aber nicht kleiner wird proportional der Anzahl, sondern proportional der Quadratwurzel aus ihr.

6. Haben die einzelnen Messungen verschiedene Genauigkeit, also verschiedenes Gewicht, so wird aus den Messungen:

$$(1) \qquad \begin{array}{lcc} x = l_1 & \text{Gewicht} & p_1 \\ x = l_2 & \text{"} & p_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ x = l_n & \text{"} & p_n \end{array}$$

der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten nach der Definition des Gewichtes werden:

$$(2) \qquad x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n},$$

und es bleibt jetzt noch der mittlere Fehler dieses Resultates zu bestimmen. Es besteht l_1 aus p_1 Messungen vom Gewichte 1; ist also μ der mittlere Fehler der Gewichtseinheit, so wird nach Nr. 5 der mittlere Fehler μ_1 von l_1

$$\mu_1 = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}}$$

und ebenso

$$\mu_2 = \frac{\mu}{\sqrt{p_2}}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\mu_n = \frac{\mu}{\sqrt{p_n}},$$

woraus

$$p_1 : p_2 : \cdots : p_n = \frac{1}{\mu_1^2} : \frac{1}{\mu_2^2} : \cdots : \frac{1}{\mu_n^2},$$

d. h. die Gewichte verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der mittleren Fehler.

Der mittlere Fehler M von (2) wird nach dem Satz in Nr. 4 gefunden aus:

$$M^2 = \frac{p_1^2\mu_1^2 + \cdots + p_n^2\mu_n^2}{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^2},$$

oder da nach dem eben Bewiesenen:

$$p_1\mu_1^2 = p_2\mu_2^2 = \cdots = p_n\mu_n^2 = \mu^2$$

ist:

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}}.$$

Ist P das Gewicht von (1), so folgt aus

$$P : 1 = \mu^2 : M^2$$

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{P}}$$

und folglich $P = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$, d. h. das Gewicht des Resultates ist gleich der Summe der Gewichte der Einzelbeobachtungen und sein mittlerer Fehler ist gleich dem mittleren Fehler der Gewichtseinheit, dividiert durch die Quadratwurzel aus dem Gewicht.

7. Es erübrigt jetzt noch die Bestimmung des mittleren Fehlers μ der Gewichtseinheit. Ist μ_1 der mittlere Fehler von l_1, so wird $\sqrt{p_1}\mu_1$ der mittlere Fehler von $\sqrt{p_1}l_1$; nun ist aber

$$\sqrt{p_1}\mu_1 = \sqrt{p_2}\mu_2 = \cdots = \sqrt{p_n}\mu_n = \mu,$$

also haben die so gestellten Gleichungen (1)

$$(3) \qquad \begin{array}{c} \sqrt{p_1} \cdot x = \sqrt{p_1}l_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sqrt{p_1} \cdot x = \sqrt{p_n}l_n \end{array}$$

alle als mittleren Fehler den der Gewichtseinheit, d. h. nach Multiplikation der Gleichungen mit den Quadratwurzeln aus ihren Gewichten werden sie alle von der gleichen Genauigkeit und vom Gewichte 1. Weichen die $l_1, \ldots, l_n$ von x um $\delta_1, \ldots, \delta_n$ ab, so weichen die $\sqrt{p_1}l_1, \ldots, \sqrt{p_n}l_n$ um $\sqrt{p_1}\delta_1, \ldots, \sqrt{p_n}\delta_n$ ab, und der mittlere Fehler einer der Gleichungen (3), also μ, wird nach dem Früheren (§ 63, 3)

$$\mu = \sqrt{\frac{p_1\delta_1^2 + p_2\delta_2^2 + \cdots + p_n\delta_n^2}{n-1}}.$$

§ 64. Verallgemeinerung.

1. Die nächste Verallgemeinerung des bisher behandelten Problems besteht darin, daß nicht eine unbekannte Größe durch direkte Messung sondern gleichzeitig mehrere daraus bestimmt werden sollen, daß eine Reihe von Größen, die von diesen Unbekannten in bekannter Weise abhängen, gemessen werden, und da ist nun wieder der einfachste Fall, auf den übrigens alle anderen zurückgeführt werden, daß lineare Verbindungen dieser Unbekannten gemessen sind.

Wir nehmen drei Unbekannte x, y, z an und setzen voraus, daß n lineare Verbindungen

$$a_1x + b_1y + c_1z, \quad a_2x + b_2y + c_2z, \quad \ldots \tag{1}$$

mit bekannten Koeffizienten $a, b, c, \ldots$ gemessen seien und die Werte

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \tag{2}$$

ergeben haben.

Es liegt keine wesentliche Beschränkung in der Annahme, daß diese Ausdrücke (1) homogen seien, denn wenn noch bekannte Glieder $e_1, e_2, \ldots$ zu (1) additiv hinzutreten, so hätte man nur $\lambda_1 - e_1, \lambda_2 - e_2, \ldots$ statt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ als die gemessenen Größen zu betrachten

2. Wenn $n = 3$ ist, so erhalten wir drei Gleichungen

$$a_ix + b_iy + c_iz = \lambda_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

und wir können daraus für x, y, z keine anderen Werte ableiten als die, die sich durch Auflösung dieser drei linearen Gleichungen nach der Algebra ergeben (Bd. I, § 40 der 1., § 44 der 2. und 3. Auflage). Ist aber $n > 3$, so sind im allgemeinen diese Gleichungen nicht miteinander verträglich, was davon herrührt, daß die gemessenen λ_i mit Fehlern behaftet sind. Je drei dieser Gleichungen geben andere Werte für die Unbekannten, und es handelt sich wieder darum, welche Werte ξ, η, ζ für die x, y, z wir nach den vorliegenden Beobachtungen für die wahrscheinlichsten zu halten haben. Wir nehmen dabei an, daß die Messungen, durch die die Werte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ gewonnen sind, alle denselben Grad von Zuverlässigkeit, also denselben wahrscheinlichen Fehler haben.

3. Um zu einem Ansatz zu gelangen, wollen wir einfach das Prinzip, das wir im vorigen Paragraphen für einen besonderen Fall gewonnen haben, verallgemeinern, d. h. wir wollen ξ, η, ζ so annehmen, daß der mittlere Fehler, der sich aus dieser Annahme für die Messungen ergibt, so klein als möglich wird.

Sind x, y, z die wahren Werte der Unbekannten, so sind die wahren Fehler der Messungen

$$\begin{aligned} D_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z - \lambda_1, \\ D_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z - \lambda_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

und für den mittleren Fehler m erhalten wir also

$$m^2 = \frac{D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2}{n},$$

und wenn wir für x, y, z nicht die wahren, sondern irgend welche Werte setzen, so nimmt diese Summe immer andere, aber nur positive Werte an, unter diesen Werten wird einer der kleinste sein, und unsere Hypothese geht dahin, daß die Werte $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$, die diesem kleinsten Werte entsprechen, die wahrscheinlichsten seien.

Die wahrscheinlichsten sind dann

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta - \lambda_1, \\ \Delta_2 &= a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta - \lambda_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \tag{3}$$

und

$$\mu^2 = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2}{n}$$

ist der Minimalwert der Funktion m^2.

4. Um diese Werte ξ, η, ζ zu finden, setzen wir

$$D_i^2 - \Delta_i^2 = (D_i - \Delta_i)^2 + 2(D_i - \Delta_i)\Delta_i.$$

Wenn wir nun ξ, η, ζ so bestimmen, daß

$$\sum (D_i - \Delta_i)\Delta_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

wird für alle x, y, z, so ergibt sich durch Summation der Differenzen $D_i^2 - \Delta_i^2$ für $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$n(m^2 - \mu^2) = \sum (D_i - \Delta_i)^2,$$

also immer positiv, und m ist immer größer als μ.

Unser Ziel wird also erreicht sein, wenn wir die Gleichungen (4) befriedigen können.

5. Die Gleichung (4) lautet, ausführlicher geschrieben, so:

$$\sum (a_i(x-\xi) + b_i(\eta - y) + c_i(z-\zeta))\Delta_i = 0,$$

und da sie für alle Werte von x, y, z erfüllt sein soll, so zerfällt sie in die drei Gleichungen

$$(5) \qquad \sum a_i \Delta_i = 0, \quad \sum b_i \Delta_i = 0, \quad \sum c_i \Delta_i = 0,$$

worin nun für Δ_i die Ausdrücke (3) zu setzen sind.

Wir führen eine abkürzende Bezeichnung ein, indem wir, wenn $c_1, c_2, \ldots, c_n$; $g_1, g_2, \ldots, g_n$ irgend zwei Reihen von n Größen sind,

$$[cg] = c_1 g_1 + c_2 g_2 + \cdots + c_n g_n$$

setzen. Dann nehmen die Gleichungen (5) nach (3) die folgende Form an

$$(6) \qquad \begin{aligned} [aa]\xi + [ab]\eta + [ac]\zeta &= [a\lambda], \\ [ba]\xi + [bb]\eta + [bc]\zeta &= [b\lambda], \\ [ca]\xi + [cb]\eta + [cc]\zeta &= [c\lambda], \end{aligned}$$

und somit haben wir also ein System von drei Gleichungen ersten Grades erhalten, durch deren Auflösung die Werte ξ, η, ζ gefunden werden.

6. Wenn die $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ nicht gleich genau gemessen, sondern von verschiedenem Gewicht $p_1, p_2, \ldots$ sind, dann wird die aufzustellende Bedingung nach der Definition des Gewichtes:

$$p_1 D_1^2 + p_2 D_2^2 + \cdots + p_n D_n^2 = \text{Min.}$$

oder

$$(\sqrt{p_1} D_1)^2 + (\sqrt{p_2} D_2)^2 + \cdots + (\sqrt{p_n} D_n)^2 = \text{Min.}$$

Daraus folgt, daß man die vorgelegten Gleichungen ganz ebenso wie Gleichungen von gleichem Gewicht behandeln kann, wenn man sie vorher mit den Quadratwurzeln aus ihren Gewichten multipliziert hat. Sie werden dann

$$a_i \sqrt{p_i}\, x + b_i \sqrt{p_i}\, y + c_i \sqrt{p_i}\, z = \sqrt{p_i}\, \lambda_i$$

und daher die Gleichungen (6)

$$\begin{aligned} [aap]\xi + [abp]\eta + [acp]\zeta &= [a\lambda p], \\ [bap]\xi + [bbp]\eta + [bcp]\zeta &= [b\lambda p], \\ [cap]\xi + [cbp]\eta + [ccp]\zeta &= [c\lambda p], \end{aligned}$$

wo allgemein

$$[abp] = a_1 b_1 p_1 + a_2 b_2 p_2 + \cdots + a_n b_n p_n.$$

Man kann daher stets den einfacheren Fall von Gleichungen gleichen Gewichts voraussetzen, da er durch eine einfache Operation sofort hergestellt werden kann; und zwar können wir dieses Gewicht als gleich 1 annehmen; denn wenn die ursprüngliche Gleichung mit dem Gewicht p_i nach Einsetzung der wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten den Restfehler $\varDelta_i$ läßt, so läßt die mit $\sqrt{p_i}$ multiplizierte Gleichung den Fehler $\sqrt{p_i}\varDelta_i$ und da sich die Gewichte umgekehrt wie die Quadrate der Fehler verhalten, so kommt der mit $\sqrt{p_i}$ multiplizierten Gleichung das Gewicht 1 zu.

7. Die numerische Auflösung der Gleichungen (6) erfolgt in der Regel durch die Gaußsche Eliminationsmethode, deren nähere Auseinandersetzung in den Spezialwerken eingesehen werden muß.

§ 65. Gemessene abhängige Größen.

Nehmen wir an, es seien drei Größen x, y, z durch Messungen zu bestimmen, zwischen denen eine gewisse Abhängigkeit

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

besteht. Es seien z. B. x, y, z die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem Falle die Gleichung (1) die Form erhält:

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{2}$$

Es seien n Messungen dieser Größen x, y, z von gleichem Gewicht ausgeführt, die die Resultate

$$x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ \ldots;\ x_n, y_n, z_n$$

ergeben haben mögen.

Die Methode der kleinsten Quadrate lehrt, daß der Wert von x zu nehmen ist, für den die Summe der Fehlerquadrate

$$\varDelta = \sum^{i}((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2) \tag{3}$$

so klein als möglich wird, aber so, daß dabei die Bedingung (1) erfüllt ist.

Man kann dieser Aufgabe in folgender Weise eine anschauliche geometrische Deutung geben:

Man betrachte x, y, z als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes P im Raume. Der gesuchte Punkt P muß dann auf der durch die Gleichung (1) dargestellten Fläche liegen und dabei die Größe $\varDelta$ so klein als möglich machen. Im Falle (2) ist diese Fläche ein gerader Kegel mit dem Koordinatenanfangspunkte als Spitze und

der z-Achse als Achse. Die gemessenen Größen x_i, y_i, z_i sind die Koordinaten von n Punkten P_i, die nicht genau auf der Fläche f liegen werden.

Aus (3) erhalten wir

$$\Delta = n(x^2 + y^2 + z^2) - 2x\sum x_i - 2y\sum y_i - 2z\sum z_i + \sum (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2), \tag{4}$$

und wenn wir

$$na = \sum x_i, \quad nb = \sum y_i, \quad nc = \sum z_i$$

setzen, so sind a, b, c die Koordinaten des Schwerpunktes s der mit gleichen Massen belegten Punkte P_i.

Es wird nach (4)

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \frac{\Delta}{n} - \frac{1}{n}\sum (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) + a^2 + b^2 + c^2,$$

und da auf der rechten Seite außer Δ alles gegeben ist, so muß

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 \tag{5}$$

so klein als möglich sein. Ist keine Bedingung (1) vorhanden, so ergibt dies, wie im vorigen Paragraphen,

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c.$$

Ist aber die Bedingung (1) zu berücksichtigen, so ist (5) für ein konstantes r die Gleichung einer Kugel mit s als Mittelpunkt, und r ist so zu bestimmen, daß diese Kugel die Fläche f berührt. Der Berührungspunkt ist der gesuchte Punkt P.

§ 66. Arithmetische Anwendungen.

1. Wir wollen für die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate ein Beispiel betrachten, das zwar keinen praktischen Wert hat, aber doch lehrreich ist, weil sich alle Verhältnisse klar übersehen lassen.

Wenn wir eine beliebige Reihe von Irrationalzahlen haben und wir ersetzen jede dieser Zahlen durch die zunächst gelegene ganze Zahl, so begehen wir einen Fehler, der positiv oder negativ sein kann, dessen absoluter Wert niemals größer als 0,5 ist. Wir haben also hier eine Fehlergrenze, d. h. einen Wert, über den kein Fehler hinausgehen kann. Innerhalb dieser Grenze müssen wir aber jeden Fehler für gleich wahrscheinlich halten, und es wird sich durchschnittlich ebenso oft ereignen, daß ein Fehler über, als daß er unter 0,25 liegt (dem absoluten Werte nach). Der wahrscheinliche Fehler ist also 0,25, und denselben Wert hat in diesem Falle der mittlere Fehler.

2. Dies können wir anwenden, um den wahrscheinlichsten Wert des Fehlers und damit also einen genaueren Näherungswert einer Irrationalzahl x zu berechnen, wenn wir die erwähnten ersten Annäherungen (in ganzen Zahlen) für eine Reihe von Vielfachen von x kennen. Es seien etwa

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$$

die den Irrationalzahlen

$$x, 2x, 3x, \ldots$$

zunächst gelegenen ganzen Zahlen; dann gibt das Verfahren nach der Methode der kleinsten Quadrate (§ 61) den wahrscheinlichsten Wert ξ von x:

$$\xi = \frac{\xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 + \cdots}{1 + 2^2 + 3^2 + \cdots},$$

und darauf läßt sich ein Verfahren gründen, um die Zahl x näherungsweise zu berechnen, also z. B. auch eine Näherungsmethode zur Auflösung numerischer Gleichungen. Man wird freilich eine große Zahl von Gliedern berechnen müssen, um einen einigermaßen genauen Wert zu erhalten, und es wird daher diese Methode wohl kaum in der Praxis Anwendung finden. Zur Erläuterung wollen wir es anwenden auf $x = \sqrt{2}$.

3. Gehen wir z. B. bis zu $22\sqrt{2}$, so erhalten wir für

$$\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots, 22\sqrt{2}$$

die Näherungswerte

$$1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 25, 27, 28, 30, 31,$$

und wir erhalten für die Zähler von ξ

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 22 \cdot 31 = 5371.$$

Der Nenner ist

$$1^2 + 2^2 + \cdots + 22^2 = 3795$$

(Bd. I, § 57, 3. der 1., § 62, 4. der 2. und 3. Auflage), und daraus ergibt sich

$$\xi = 1{,}4155\ldots,$$

während der wahre Wert

$$x = 1{,}414\,213\,562\,373$$

ist. Geht man bis $70\sqrt{2}$, so erhält man

$$\xi = 1{,}414\,15.$$

4. Lassen wir die Anzahl der benutzten Vielfachen von x ins Unendliche wachsen, so erhalten wir eine unbegrenzt wachsende Genauigkeit, also eine genau richtige Darstellung der Zahl x. Wir gelangen so zu einem analytischen Satze, der mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung nichts mehr zu tun hat und den wir auch ohne diese beweisen können. Der Satz lautet so:

Bezeichnen wir allgemein mit $E(x)$ die ganze Zahl, die der positiven irrationalen Zahl x so nahe als möglich kommt, und ist x eine gegebene positive irrationale Zahl, so ist x der Grenzwert des Bruches

$$\frac{E(x) + 2E(2x) + 3E(3x) + \cdots + nE(nx)}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}$$

für ein unendlich wachsendes n.

Setzen wir für $k = 1, 2, 3, \ldots, n$

$$E(kx) = kx + \varepsilon_n,$$

so liegt nach der Definition von $E(kx)$ die Zahl ε_k zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$, und es wird also

$$\frac{\Sigma k E(kx)}{\Sigma k^2} = x + \varrho,$$

worin

$$\varrho = \frac{\Sigma k \varepsilon_k}{\Sigma k^2}.$$

Es ist also

$$-\frac{1}{2}\frac{\Sigma k}{\Sigma k^2} < \varrho < \frac{1}{2}\frac{\Sigma k}{\Sigma k^2},$$

und darin ist

$$\sum k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

also ist (Bd. I, § 56, 57 der 1., § 61, 62 der 2. Auflage)

$$-\frac{3}{2(2n+1)} < \varrho < \frac{3}{2(2n+1)},$$

und man sieht also, daß ϱ unter jede Grenze heruntersinkt, wenn n über alle Grenzen wächst.

Übrigens würde sich dasselbe Resultat ergeben, wenn wir andere Multiplikatoren nehmen als die, die uns die Wahrscheinlichkeitsrechnung geliefert hat. In der Tat ist, wenn p eine beliebige positive ganze Zahl ist, x ebenso gut der Grenzwert von

$$\frac{\Sigma k^{p-1} E(kx)}{\Sigma k^p}.$$

Infolge der verschiedenen Vorzeichen der ε_k wird aber die Größe ϱ noch stärker abnehmen, als die obige Grenzbestimmung angibt, und in dieser Beziehung ist also nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung der Exponent $p = 2$ der günstigste.

Für $p = 1$ z. B. gibt unser Beispiel den Wert 1,4110, was von dem wahren Werte mehr, und zwar nach der entgegengesetzten Seite, abweicht.

5. Das Goldbachsche Gesetz.[1]) Goldbach hat das empirische Gesetz ausgesprochen: Jede gerade Zahl läßt sich in die Summe zweier Primzahlen zerlegen. Eine von Haußner berechnete Tafel[2]) bestätigt dieses Gesetz bis zu 5000.

Fragen wir nach der Wahrscheinlichkeit für die Gültigkeit der Goldbachschen Regel.

Unter n Kugeln befinden sich in einer Urne a weiße und b schwarze Kugeln, $a + b = n$. Die Wahrscheinlichkeit, daß in μ Zügen lauter schwarze Kugeln gezogen werden, ist (§ 51)

$$\left(\frac{b}{n}\right)^\mu.$$

Die weißen Kugeln mögen nun die Primzahlen p, die unter $2n$ liegen, bedeuten, die schwarzen die zusammengesetzten ungeraden Zahlen unter $2n$. Die Wahrscheinlichkeit, daß die a Differenzen $2n - p$ nur zusammengesetzte Zahlen seien, ist also

$$\left(\frac{b}{n}\right)^a.$$

Setzt man z. B. $n = 2000$ $(2n = 4000)$, so ist $a = 550$ (da n unter 4000 nach den Tafeln 550 Primzahlen gibt), $b = 1450$ und $\left(\frac{b}{n}\right)^a$ ist also eine Zahl von der Größenordnung 10^{-77}. Subtrahiert man also von einer geraden Zahl in der Nähe von 4000 die Primzahlen, die unter 4000 liegen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter den Differenzen keine einzige Primzahl sei, 10^{-77}, also verschwindend klein.

Die Erfahrung kann daher über die Gültigkeit der Goldbachschen Regel nichts lehren, und das Interesse, das die Sache der Zahlentheorie noch bietet, besteht in der Frage nach der Anzahl der Zerlegungen einer geraden Zahl in zwei Primzahlen.[3])

---

1) Christian Goldbach, geb. 1690 in Königsberg, gest. 1764 in Moskau

2) Tafeln für das Goldbachsche Gesetz von R. Haußner. Halle 1897.

3) Auch hierauf erstreckt sich die Haußnersche Tafel. Zu erwähnen ist darüber noch die Abhandlung von Stäckel: „Über Goldbachs empirisches Theorem: Jede gerade Zahl kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden." Göttinger Nachrichten 1896.

DRITTES BUCH

AUS DER POLITISCHEN ARITHMETIK.

Die neueren Lehrbücher der politischen Arithmetik beschäftigen sich gewöhnlich mit Zinseszins und Rentenrechnung, der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Lebensversicherungsmathematik. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist im vorangehenden Buche behandelt. Hier folgen die Abschnitte über Zinsrechnung, für welche eine allgemeine Theorie gegeben werden soll, und die Elemente der Lebensversicherungsmathematik, welchen allgemeinere Betrachtungen über Versicherungswesen vorausgeschickt sind. Eigentlich wäre die Disziplin weiter zu fassen, etwa im Sinne der älteren Autoren, wie Bleibtreu (Pol. Arithmetik, Leipzig, 1853) und Oettinger (Anleitung zu finanziellen, politischen und juridischen Rechnungen, Braunschweig 1845). Cantor spricht von einer „Arithmetik des täglichen Lebens" (Leipzig 1898). Wir müssen uns hier beschränken.

Neunter Abschnitt.

Allgemeine Theorie der Zinsrechnung.

§ 67. Die Hauptformen der Zinsrechnung.

Die Form, in welcher Kapital und Zinsen (Renten) zueinander in rechnerische Beziehung[1]) gesetzt werden, kann dreierlei Art sein:

1. Das Kapital und die Zinsen, deren Gesamtheit in ihrem Gegenwartswerte für das Kapital gesetzt werden kann, erscheinen in der Rechnung jeweils als ganz getrennte Größen. Die Zinsbeträge sind vom Zeitpunkte ihrer Fälligkeit an selbständige Kapitalien, die mit dem ursprünglichen Kapitale in keinem weiteren substantiellen Zusammenhang stehen. Hierher gehören alle Probleme, die sich mit „Ewigrenten" usw. beschäftigen. Eine besondere Behandlung hat die im kaufmännischen Verkehr übliche „einfache Zins- und Diskontrechnung" zu erfahren, die nur in beschränktem Umfange anwendbar ist.

1) Hinweise auf den Zusammenhang der wirtschaftlichen Theorien des Kapitalzinses und die mathematische Begründung der Zinsrechnung findet man in meinem Aufsatze: „Gegenwart und Zukunft in der Wirtschaft" in Conrads Jahrbüchern für Nationalökonomie und Statistik, N. F. XX, 4 Jena 1890. Dieser knüpft an an v. Böhm-Bawerk, Kapital und Kapitalzins, 2 Bände, Innsbruck 1884 und 1889. Auf die wirtschaftlichen Theorien kann hier aber nicht eingegangen werden. Ebensowenig auf die rechtliche Seite (vgl. z. B. § 248 des Bürgerlichen Gesetzbuches für das Deutsche Reich).



2. Die aus dem ursprünglichen Kapitale sich ergebenden Zinsen oder Nutzungsbeträge werden mit ersterem zu einem Wertbetrage verschmolzen: Der Zins wird „admassiert“ oder „kapitalisiert“. Das so vermehrte Kapital trägt höheren Zins, wie das ursprüngliche, und zwar um so viel, als der Zins vom ersten Zins betragen würde, wenn dieser als selbständiges, neu geschaffenes Kapital betrachtet wird. Zu einem beliebigen späteren Zeitpunkte muß das durch die Kapitalisierung aller Zinsbeträge entstandene vergrößerte Kapital so groß sein, wie das ursprüngliche, vermehrt um alle aus den Zinsen und Zinseszinsen im Verlaufe der Zeit geschaffenen Mehrwerte.

Hierher gehören die Probleme, welche die Admassierung von Kapitalien betreffen (Sparkassenanlagen usw.), oder die überhaupt Werte zu verschiedenen Zeitpunkten unter Berücksichtigung der durch das Moment der Zeit geschaffenen Mehrwerte vergleichen, wie die Sparversicherung, die Waldwertrechnung usw.

3. Das Kapital wird einschließlich der aus ihm sich bildenden, mit ihm verschmolzenen Mehrwerte allmählich durch eine Reihe von anderen Kapitalbeträgen (bzw. Renten) in beliebiger Höhe ersetzt, sodaß es in seiner ursprünglichen Form schließlich verschwindet. Zu einem beliebigen Zeitpunkte muß die Summe des Gesamtwertes der angesammelten neuen Kapitalien (Renten samt Zinseszinsen) und der noch verbliebene Wert des ursprünglichen, nunmehr verminderten Kapitals dem Betrage gleich kommen, welcher erzielt worden wäre, wenn die Zinsen des ursprünglichen Kapitals diesem bis zu dem betreffenden Zeitpunkte admassiert worden wären.

Hierher gehören vornehmlich die Probleme der Obligationen- und Anleiherechnung, die Zeitrentenrechnung usw.

§ 68. Vertretbarkeit von Kapital und Zinsen.

1. Für die richtige Erkenntnis des inneren Zusammenhanges zwischen Kapital und Zins und ihrer gegenseitigen Vertretbarkeit ist es wichtig, sich von vornherein klar zu machen, daß das Kapital selbst und seine fortgesetzte, zeitlich unbeschränkte Benutzung den gleichen Wert haben müssen, daß also, im Sinne der gewöhnlichen Zinsrechnung gesprochen, das ursprüngliche Kapital einerseits und anderseits der Gesamtwert aller daraus fließenden Zinsen (Ewigrenten) identisch sind.

Da die Zinsen, die in ihrer Gesamtheit den gleichen Wert darstellen wie das zinstragende Kapital, aber nicht auf einmal, sondern in bestimmten Zwischenräumen fällig sind, so wird man bei der Abschätzung des Wertes zu folgern haben, daß ein Kapital den glei-

chen Wert haben muß, wie die Summe der daraus fließenden Zinsen unter Berücksichtigung des Momentes der Zeit; d. h. es muß der Wert der periodisch fälligen Zinsen im einzelnen für den gleichen Zeitpunkt abgeschätzt werden, für den der Wert des Stammkapitals gegeben ist.

2. Nehmen wir an, ein beliebiges in Geldwert ausgedrücktes Kapital K liefere eine nach Umlauf einer beliebigen Zeiteinheit fällige Nutzung, die als die gleichbleibenden Zinsen (Interessen) aus dem Kapitale in Geld und zwar im Betrage Z vergütet wird.

Sei $\varepsilon_1 \cdot Z$ der Gegenwartswert der nach der Zeiteinheit fälligen Zinsen des Kapitals K, $\varepsilon_2 \cdot Z$ der Gegenwartswert der nach zwei Zeiteinheiten fälligen Zinsen, $\varepsilon_n \cdot Z$ der Gegenwartswert der nach n Zeiteinheiten fälligen Zinsen, so muß sein:

$$(1) \qquad K = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n + \cdots \text{ad inf.})Z.$$

Die mathematische Identität von Kapital und Ewigrenten muß aber alsdann zu jedem Zeitpunkte, d. h. zu Beginn jeder Zeiteinheit erfüllt sein und da der gegenwärtige Wert des Kapitals, welches nach n Zeiteinheiten den tatsächlichen Wert K hat, mit $\varepsilon_n \cdot K$ zu bezeichnen ist, so gilt der Reihe nach auch:

$$(1\text{a}) \qquad \varepsilon_1 K = (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \cdots)Z,$$

$$(1\text{b}) \qquad \varepsilon_2 K = (\varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \cdots)Z,$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_{n-1} K = (\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} + \cdots)Z.$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (1) und (1a) erhält man

$$(2) \qquad K(1 - \varepsilon_1) = \varepsilon_1 Z \quad \text{oder} \quad (2\text{a}) \quad K = Z \cdot \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1}$$

und durch Subtraktion von (1a) und (1b)

$$K(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \varepsilon_2 \cdot Z \quad \text{oder} \quad K = Z \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$$

ferner

$$K(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) = \varepsilon_3 Z \quad \text{oder} \quad K = Z \cdot \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}.$$

Es muß also sein

$$\frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} \text{ usf.}$$

und man findet aus

$$\varepsilon_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \varepsilon_2(1 - \varepsilon_1),$$
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1^2;$$

ferner aus

$$\varepsilon_1(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_3) = \varepsilon_3(1 - \varepsilon_1),$$
$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1^3;$$

und schließlich

$$\varepsilon_n = \varepsilon_1^{\,n}. \tag{3}$$

Die Reduktionsfaktoren zur Ermittlung des Gegenwartswertes der periodischen Zinsen müssen also von Zeiteinheit zu Zeiteinheit sich im geometrischen Verhältnisse ändern.

3. Den Wert von ε_1 bestimmen wir aus der Gleichung (2) bzw. (2a), welch letztere uns unter der Voraussetzung, daß ε_1 ein echter Bruch ist, als die Summenformel der unendlichen Reihe in Gleichung (1) bereits wohlbekannt ist, indem wir schreiben:

$$K = \varepsilon_1 (K + Z), \tag{2b}$$

woraus

$$\text{(4)} \quad \varepsilon_1 = \frac{K}{K+Z} \quad \text{und (5)} \quad \varepsilon_n = \left(\frac{K}{K+Z}\right)^n,$$

oder wenn $K = 1$ und $\frac{Z}{K} = z$

$$\text{(4a)} \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{1+z} \quad \text{und (5a)} \quad \varepsilon_n = \varepsilon_1^{\,n} = \left(\frac{1}{1+z}\right)^n.$$

Der Reduktionsfaktor für die Zeiteinheit ist also gleich dem Verhältnisse des ursprünglichen Kapitals zu dem, um seine für die gleiche Zeit entfallenden Zinsen vermehrten Kapitale; der Reduktionsfaktor für n Zeiteinheiten gleich der n^{ten} Potenz dieses Verhältnisses.

Für gewöhnlich pflegt man den Maßstab der Verzinsung so anzugeben, daß man annimmt, das Kapital $K = 100$ liefere im Laufe eines Jahres $p\%$ Zinsen (Zinsfuß). Der Ausdruck $\frac{1}{\varepsilon_1} = \frac{100+p}{100}$ erscheint in der älteren Literatur symbolisch mit $1,0p$ geschrieben und wird als Aufzinsungsfaktor r bezeichnet, während $\varepsilon_1 = \frac{1}{r}$ den Diskontfaktor darstellt und vielfach mit ϱ bezeichnet wurde.

4. In der neueren Bezeichnungsweise (vgl. auch S. 447) ist unter i der Zins (interest) aus dem Kapital 1 verstanden; und mit v (value) der Diskontierungsfaktor bezeichnet, also der Aufzinsungsfaktor mit $\frac{1}{v}$. Es ist das um die Zinsen nach Umlauf der Zeiteinheit vermehrte Kapital

$$K_1 = K(1+i),$$

welches wieder werbend wirkt, so daß

$$K_2 = K(1+i)^2$$

$$\vdots$$

$$\text{(6)} \quad K_n = K(1+i)^n \quad \text{oder (7)} \quad K = \frac{K_n}{(1+i)^n} = K_n v^n$$

bzw. für $K = 1$, $r = 1 + i$ und $v = \frac{1}{1+i}$

(6a) $$r^n = (1+i)^n \quad \text{und (7a)} \quad v^n = \frac{1}{(1+i)^n}.$$

Das sind die bekannten Formeln der Zinseszinsrechnung, in welchen der Diskontfaktor v unserem ε_1 und i dem Verhältnis $z = \frac{Z}{K}$ entspricht.

Im Gegensatze hierzu besagen die Formeln der einfachen Zinsrechnung, daß ein Kapital 1 im Laufe von n Jahren ni Zinsen trägt und demnach auf $1 + ni$ anwächst, woraus sich ein einfacher Diskontfaktor $\frac{1}{1+ni}$ ableiten läßt.

5. Eine direkte Ableitung der Formeln der Zinseszinsrechnung ergibt sich aus folgender Überlegung:

Wenn $f(i, t)$ den gesuchten Zinsfaktor, als Funktion von i und t gedacht, bedeutet, so ist für jede Zeiteinheit der Wertzuwachs im Verhältnisse zu dem jeweiligen diesen hervorbringenden Kapital konstant, nämlich gleich i, d. h.

$$\frac{f(i, t+1) - f(i, t)}{f(i, t)} = i,$$

$$f(i, t+1) = f(i, t)\,\{1 + i\},$$

und da $f(i, 0) = 1$

(6b) $$f(i, t) = (1+i)^t \quad \text{und (7b)} \quad \frac{1}{f(i, t)} = v^t = \frac{1}{(1+i)^t}.$$

Vergleiche hierzu den nächsten Paragraph, in welchem die allgemeinste Form von $f(it)$ entwickelt ist.

6. Wir sind bei unseren Überlegungen aber nicht vom Prinzipe der Zinsesverzinsung, sondern von dem Gedanken der Vertretbarkeit von Kapital und Zinsen ausgegangen. Der Satz von der Änderung der (Reduktions-)Diskontfaktoren im geometrischen Verhältnisse stellt tatsächlich das grundlegende Prinzip einer allgemeinen Theorie der Zinsrechnung dar, welche die in § 67 benannten Formen der Zinsrechnung unter einem Gesichtspunkte betrachten läßt.

Die mathematische Identität von Kapital und Zins (Ewigrente) beruht also auf der Voraussetzung, daß jeder Zins wieder Kapital ist und in gleichem Maße werbend wirkt, wie das ursprüngliche Kapital selbst. Und die oben entwickelte Gleichung $\varepsilon_n = \varepsilon_1^n$ gibt das mathematische Gesetz, nach welchem der Gegenwartswert eines in der Zukunft verfügbar werdenden Betrages abgeschätzt werden muß. Die Grundgröße ε_1 oder $v = \frac{1}{1+i}$ ist dabei der Reduktionsfaktor, der angibt, wie viel ein nach der Zeiteinheit fälliger Betrag 1 augenblicklich

wert ist; es ist die Größe, die im Sinne der Zinseszinsrechnung im engeren Sinne als Diskontfaktor bezeichnet wird.

Hiernach besteht auch der Satz zu Recht, der von Leibniz und seinen Nachfolgern vertreten wird, daß nämlich nur die Rechnung mit Zinseszinsen eine einwandfreie Inbeziehungsetzung zwischen Kapital und Zins gestattet. Die sogenannte Rechnung mit einfachen Zinsen, welche im täglichen Leben eine große Rolle spielt, ist lediglich in solchen Fällen anwendbar, in denen es sich um Zinsberechnungen für verhältnismäßig kleine Zeitperioden handelt. Für jede Überlegung, in welchem Sinne ein Kapital und die Zinsen aus demselben als gleichwertig betrachtet werden können, versagt sie vollständig.

7. Wir müssen alle Rechnungsmethoden, welche die Begriffe „Kapital" und „Zinsen" streng auseinanderhalten, d. h. davon absehen, diese inhaltlich weiter in Beziehung zu setzen, hier ausscheiden. Um welche prinzipielle Frage es sich dabei aber handelt, wird am besten klar, wenn man die verschiedenen Diskontierungsmethoden in ihrer Anwendbarkeit näher untersucht.[1])

Im Sinne der einfachen Zinsrechnung wächst das Kapital K nach t Jahren an zu $K_t = K(1 + it)$. Man bestimmt hieraus nach Hoffmann bzw. Carpzow[2]) den gegenwärtigen Wert eines nach Ablauf der Zeit t

1) Wenn L. von Bortkiewicz in seiner kritischen Arbeit („Wie Leibniz die Diskontierungsformel begründete" in der Festgabe für W. Lexis zu seinem 70. Geburtstage Jena, bei Fischer 1907) das thema probandum, wie es Leibniz in seiner: „Meditatio juridico-mathematica de interusurio simplice" gestellt hat, und die Ansichten seiner Nachfolger widerlegt zu haben glaubt, so konnte er zu diesem Ergebnis m. E. nur durch eine irrtümliche Auffassung der Fragestellung des ganzen Problems gelangen. Fast selbstverständlich ist doch, was v. B. im einzelnen näher begründet, daß auch die Voraussetzungen und Konsequenzen des einfachen Zinses sich sehr wohl rechnungsmäßig erfassen lassen: es muß nur die Möglichkeit gegeben sein, bei jeder zu verrechnenden Summe Kapital und Zinsen auseinander zu halten, insbesondere darf bei einer Fiktion eines Rollenwechsels zwischen Gläubiger und Schuldner der Charakter einer Summe als Zinsen nicht verwischt werden. Nicht der Gebrauch des mathematischen einfachen Zinses aber ist mit mathematischen Gründen zu bekämpfen, mit diesen wird vielmehr nur dargetan, wie ein solcher Gebrauch einzuschränken sei. — Umgekehrt ist ja auch die Anwendung der Zinseszinsrechnung in der Praxis eine beschränkte. Das bekannte Schulbeispiel für die Wirkung des Zinseszinses, wonach ein zu Christi Geburt verzinslich angelegter Pfennig sich seitdem mit Zinseszinsen auf eine Summe vermehrt hätte, deren Wert etwa durch 40 goldene Erdkugeln dargestellt wird, ist selbstverständlich nicht in wörtlichem Sinne zu nehmen. Deswegen muß doch der Grundgedanke aufrecht erhalten bleiben, daß bei Vergleichung wirtschaftlicher Werte und Kapitalien und deren Nutzungen nach dem Prinzip der Zinseszinsrechnung verfahren werden muß, weil diese implizite durch die Vertretbarkeit von Kapital und Zinsen gegeben ist.

2) Vgl. u. a. Oettinger, „Weitere Ausführung der politischen Arithmetik", Greifswald 1863.



im Betrage K_t fälligen Kapitals als

$$K = \frac{K_t}{1 + i \cdot t},$$

während nach unseren Formeln $K = K_t \cdot \frac{1}{(1+i)^t}$ zu setzen war. Wendet man letztere auf die periodisch fälligen Zinsen i aus dem Kapital 1 an (vgl. Gl. (1)), so erhalten wir

$$\frac{i}{1+i} + \frac{i}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{i}{(1+i)^n} + \cdots = 1,$$

worin eben die Identität von Kapital und Zinsen sich ausgedrückt findet. Diskontieren wir dagegen nach der Carpzowschen Formel, so findet man als Summenausdruck der Gegenwartswerte der Kapitalzinsen die harmonische Reihe

$$i\left\{\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1+2i} + \cdots + \frac{1}{1+ni} + \cdots\right\} > 1,$$

gelangt also zu einem Widerspruche.

8. In wie weit der Ausdruck $\frac{1}{1+t\cdot i}$ als ein erster Näherungswert von $\frac{1}{(1+i)^t}$ brauchbar ist, wird im einzelnen Falle zu beurteilen sein, da dieser auf Grund des binomischen Satzes sich ergebende Näherungswert um so ungenauer wird, je größer das Kapital ist. Oder nimmt man den einfachsten Fall der Diskontierung, wie sie bei Wechseln üblich ist und welche bekanntlich darin besteht, daß man die für die Laufzeit zu vergütenden und dieser proportional zu rechnenden Zinsen von dem später fälligen Betrage einfach abzieht:

$$K = K_n\{1 - i \cdot t\},$$

so ergibt sich die Absurdität, daß für $t = \frac{1}{i}$ das Kapital $K = 0$ wird; nach dieserMethode würde beispielsweise bei 4% Zins ein Betrag, der nach 25 Jahren fällig ist, zur Zeit mit Null zu bewerten sein, während die korrekte Formel auf den Reduktionsfaktor $\frac{1}{1{,}04^{25}}$ führt.

Man erkennt aber wohl, daß der Diskontabzug $i \cdot t$ für i als echten Bruch sich rechtfertigen läßt, da unter dieser Voraussetzung $1 - i \cdot t$ ebenfalls einen ersten Näherungswert des korrekt berechneten Diskontfaktors $\frac{1}{(1+i)^t} = (1+i)^{-t}$ darstellt.

Weitere Ausführungen hierüber gehören nicht in den Rahmen der rein theoretischen Begründung der Zinsrechnung im allgemeinen Sinne.

§ 69. Die Zinsfunktion.

1. Wir suchen den allgemeinsten Ausdruck für die Zinsfunktion[1]), worunter wir den Ausdruck für die in Augenblicksintervallen eintretende Zinswirkung in ihrer Abhängigkeit von Zinsfuß und Dauer der Zinswirkung oder auch das jeweilige, um die volle Zinswirkung vermehrte Kapital verstehen wollen. Diese Größe sei wieder mit $f(it)$ bezeichnet. „Zinsfuß" ist das Verhältnis des Wertzuwachses zu dem Kapital, aus welchem sich der Zins jeweilig berechnet (nämlich $\frac{Z}{K}$ bzw. $\frac{p}{100}$ bzw. i). Diese Größe ist die Konstante der Verzinsung; sie beträgt für ein Zeitmoment $i \cdot dt$, wenn unter dt das Differential der Zeit verstanden wird.

Ist $f'(it)$ der Differentialquotient der Zinsfunktion nach der Zeit, also $f'(it) \cdot dt$ der momentane Wertzuwachs, so muß zu jedem Zeitpunkte das Verhältnis des letzteren zu dem jeweiligen Kapitalwerte $f(it)$, aus welchem der Wertzuwachs hervorgeht, konstant sein, also:

$$\frac{f'(it) \cdot dt}{f(it)} = i \cdot dt.$$

Durch Integration erhält man

$$f(it) = Ce^{it}, \tag{8}$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen, gleich 2,71828 ... Die Integrationskonstante C wird, wenn zu Beginn der Zinswirkung vom Kapital 1 ausgegangen wird, gleich 1 zu setzen sein, so daß die Gleichung (7) in der Form

$$(8a) \qquad f(it) = e^{it} \qquad \text{und (8b)} \qquad \frac{1}{f(it)} = e^{-it}$$

angibt, zu welcher Größe das ursprüngliche Kapital 1 bei stetiger Zinswirkung im Laufe der Zeit anwächst, bzw. welches der Gegenwartswert eines erst später im Betrage 1 fälligen Kapitals ist.

2. Man gelangt zu der gleichen Formel, wenn man in den Gleichungen (6) und (7) des § 68 zunächst annimmt, daß die Zinswirkung jeweils für Teile der Zeiteinheit, für welche i als Maßstab der Verzinsung gegeben ist, in Wirkung trete und diese Zeitteile immer kleiner werden.

Rechnet man nämlich für den m^{ten} Teil der Zeiteinheit den Wert-

1) Vgl. Bleicher, Grundriß der Theorie der Zinsrechnung, Berlin, Julius Springer 1888.

zuwachs $\frac{i}{m}$, so gehen die Formeln (6) über in

(8c) $r^t_{\frac{1}{m}} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}$ und (8d) $v^t_{\frac{1}{m}} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mt}$,

für $m = \infty$ wird

$$r^t_{1:\infty} = \left[\lim_{m=\infty}\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m\right]^t = e^{it}$$

und

$$v^t_{1:\infty} = e^{-it}.$$

Die Basis der natürlichen Logarithmen $e = 2{,}71828$ spielt also in der Zinsrechnung eine besondere Rolle, welche durch den besonderen Wert von $t = \frac{1}{i}$ bestimmt wird. Es wächst nämlich das Kapital 1 samt Zins und Zinseszinsen genau in der Zeit, in welcher sich das Kapital durch Zuschlag einfacher Zinsen nach der Gleichung $1 + it = 2$ verdoppeln würde, zu e an, wenn die Zinswirkung eine kontinuierliche (stetige) ist. Die Maximalschwankung des Wertzuwachses beträgt für diesen Zeitraum also ca. 72 %, d. h. durch Berechnung von Zinseszinsen kann das interusurium gegenüber der Berechnung mit einfachen Zinsen auf das $1^3/_4$-fache gesteigert werden.

3. Jede nicht kontinuierliche Verzinsung läßt sich rechnerisch durch eine solche ersetzen, wenn man

$$(1 + i)^n \quad \text{ersetzt durch} \quad e^{i'n},$$

d. h. den Zinsfuß entsprechend reduziert, und zwar ist die sprungweise Zinswirkung i im Endergebnisse gleichwertig mit

(9a) $$i' = \lg \text{nat}\,(1 + i),$$

auch mit j bezeichnet, oder allgemeiner im Sinne der Gleichung (8c)

(9b) $$i'_m = m \lg \text{nat}\left(1 + \frac{i}{m}\right),$$

auch mit j_m bezeichnet.

Wir können unter i' bzw. i'_m die „Zinskraft“ des Zinsfußes i (bzw. 100 i%) verstehen, da die Admassirung der kleinsten Zinsteile eben zu dem Grenzwerte führt, der ein Maximum (für $m = \infty$) darstellt. Als Zahlenbeispiel führen wir an, daß bei einem Jahreszinsfuß von 4% (d. h. wenn $i = 0{,}04$) der Wertzuwachs bei

halbjährlicher Zinsfälligkeit und Admassierung ($m = 2$) 4,04,
vierteljährlicher „ „ „ ($m = 4$) 4,06,

monatlicher	Zinsfälligkeit	und	Admassierung	$(m = 12)$	4,07,
täglicher	"	"	"	$(m = 365)$	4,076,
kontinuierlicher	"	"	"	$(m = \infty)$	4,081

beträgt. Es handelt sich also um Schwankungen der Zinsbeträge bis zu 2 % derselben oder um 0,8 ‰ des verzinslich angelegten Kapitals.

4. Zum Gebrauche in der Praxis hat man sich Tafeln konstruiert, welche für die häufigst vorkommenden Zinsfußsätze die Zinsfaktoren und Diskontfaktoren von 1 bis 100 auf eine größere Reihe von Dezimalen angeben und auf Grundlage derselben auch die Rententafeln (vgl. § 71ff.) berechnet. Das bei uns gebräuchlichste Tabellenwerk ist das von Spitzer.[1])

Die Berechnung der Tafeln für die niedrigeren Zinssätze ist nötig, um dieselben gleich für die in der Praxis vorkommenden Modalitäten der Anwendung der relativen oder konformen Zinssätze (§ 70) geeignet zu machen. Für die Rechnung mit kontinuierlichen Zinsen kann man sich leicht eine Tafel der natürlichen Logarithmen (enthalten im Thesaurus logarithmorum completus von Vega, Leipzig 1794) direkt zur Zinstafel umgestalten.[2])

Für Zinssätze, welche nicht in der Tafel enthalten sind, genügt vielfach eine entsprechende Interpolation.

Angenommen, es sei der Zinsfaktor $\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt} = e^{it}$ gesucht für den Wert von i_1, welcher nicht in der Tafel enthalten ist, und heißt der i_1 zunächst liegende, in der Tafel vertretene Zinsfuß i_2, wo $i_1 > i_2$ sein mag, so erhält man näherungsweise aus der Reihenentwicklung für $e^{i_1 t}$ und $e^{i_2 t}$, wenn man sich auf die quadratischen Glieder beschränkt:

$$e^{i_1 t} = e^{i_2 t} + (i_1 - i_2) \cdot t \cdot \left\{1 + \frac{i_1 + i_2}{2} t\right\}.$$

Es kommt im Einzelfalle auf die Differenz $i_1 - i_2$ an, ob man auch für Werte $t > 1$ gute Näherungswerte erhält.

In verschiedenen Tabellenwerken, vergleiche insbesondere die in Österreich üblichen Tafeln, findet man auch Zins- und Diskontfaktoren für Zinssätze, welche nicht einfache Zahlen darstellen.

Es handelt sich hierbei um die Einführung der sogenannten antizipativen Verzinsung, welche einer gewöhnlich mit kurzen Zahlen benannten dekursiven Verzinsung äquivalent ist oder umgekehrt (vgl. § 70).

---

1) Spitzer, Tabellen der Zinseszins- und Rentenrechnung. Wien, bei Gerold, 5. Aufl. 1911.

2) Zinsfaktoren für die Tage eines Jahres cf. Bleicher, a. a. O.

§ 70. Äquivalente Zinssätze.

1. Für die Äquivalenz zweier Zinssätze i_1 und i_2 besteht unter der Voraussetzung, daß die Verzinsung in m_1 bzw. m_2 Terminen nach dem Gesetze der relativen Verzinsung erfolgt, d. h. wenn für $\frac{1}{m}$ der Zeiteinheit der Zins $\frac{i}{m}$ zur Anrechnung kommt, die Bestimmungsgleichung

$$K_n = K\left(1 + \frac{i_1}{m_1}\right)^{m_1 n} = K\left(1 + \frac{i_2}{m_2}\right)^{m_2 n},$$

woraus

$$i_1 = m_1 \left\{\left(1 + \frac{i_2}{m_2}\right)^{\frac{m_2}{m_1}} - 1\right\} \tag{10a}$$

oder

$$i_2 = m_2 \left\{\left(1 + \frac{i_1}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_2}} - 1\right\}. \tag{10b}$$

Man spricht also von dem relativen Zinsfuß, wenn wie hier vorausgesetzt wird, daß die ratierlich zu berechnenden Zinsen zu den entsprechenden Teilterminen admassiert wurden (beispielsweise wird für $i = 0{,}04$ und $m = 4$ der vierteljährliche Zins mit 1 % berechnet und admassiert, so daß die gesamte Jahresverzinsung mehr wie 4 % ergibt).

Dagegen spricht man von einem konformen Zinsfuß, wenn bei ratierlicher Berechnung und Admassierung der Zinsen das Endergebnis dem effektiven Zinsfuß von $100\,i$ % entsprechen soll.

Es bedeutet also in der Gleichung

$$\frac{i_1}{m} = \left\{\sqrt[m]{1 + i} - 1\right\} \tag{11}$$

$\frac{i_1}{m}$ in Prozenten ausgedrückt für $m = 2$, $m = 4$ usw. den halbjährlichen, vierteljährlichen usw. Zinsfuß, welcher dem jährlichen Zinsfuß von $100\,i$ % entspricht. Ein halbjährlicher konformer Zinsfuß von 1,980 % bzw. der konforme Jahreszinsfuß von 3,960 % mit halbjährlichen Terminen ist z. B. äquivalent dem Jahreszinsfuß von 4 % bei jährlicher Zinsfälligkeit.

Der relative Zinsfuß von halbjährlich 2 % entspricht dagegen 4,04 % Jahresverzinsung.

Gleichung (9b) ist wieder Grenzfall der Gleichungen (10).

2. Mit der am Schlusse des vorigen Paragraphen benannten Äquivalenz antizipativer und dekursiver Zinsen hat es folgende Bewandtnis:

Man kann das ursprüngliche Kapital 1 zerlegen in einen Teil, welcher nach Ablauf der Zeiteinheit mit Zinsen zu dem Kapital 1

anwächst und einen andern Teil, welcher den Gegenwartswert des nur durch die Zeiteinheit zu erzielenden Wertzuwachses (interusurium) darstellt[1]), nämlich

$$1 = \frac{1}{1+i} + \frac{i}{1+i}$$

oder

$$1 = \frac{1}{1+i} + \left(1 - \frac{1}{1+i}\right) = v + (1 - v).$$

Man findet: Aus dem Kapital 1 ergibt sich nach der Zeiteinheit entweder der nachzahlbare Zins i oder der vorauszahlbare Zins $\frac{i}{1+i} = 1 - v$. Bei 4%iger Jahresverzinsung $i = 0{,}04$, $v = 0{,}96154$ ist $1 - v = 0{,}03846$; d. h. die vorausgezahlten Zinsen zu 3,846% und die nachgezahlten zu 4% gerechnet, sind gleichwertig. In der Sprechweise der einfachen kaufmännischen Diskontrechnung kann man 0,03846 als den Diskontabzug bezeichnen; d. h. man zahlt bei 4% üblicher Verzinsung für den nach einem Jahre fälligen Betrag 100 z. Zt. nur 100 — 3,846.

Wie schon erwähnt wird allerdings in theoretisch nicht zu rechtfertigender Weise bei 4% Diskont antizipativ 96 berechnet, was eigentlich einer dekursiven Verzinsung von 4,1667% gleichkommt.

Die Relationen zwischen dem dekursiven ($\varDelta$) und antizipativen (i) Zinsfuß sind

(12a) $$\varDelta = \frac{i}{1+i}$$ und (12b) $$i = \frac{\varDelta}{1-\varDelta}.$$

§ 71. Grundformeln für ewige Renten.

1. Das Interusurium, der Wertzuwachs gleich den angesammelten Zinsen des Kapitals 1 in der Zeit t ist

(13a) $$\Phi_{(it)} = f(it) - 1.$$

Wir können annehmen, daß je nach Ablauf der Periode t die gleiche Summe Φ in Form einer ewigen Rente nutzbar gemacht wird. Sie ist nachschüssig, bzw. nachzahlbar (postnumerando) fällig; an deren Stelle tritt eine vorauszahlbare (pränumerando) oder vorschüssige Ewigrente im Betrage

(13b) $$\varDelta_{it} = \frac{\Phi_{(it)}}{f(it)} = 1 - \frac{1}{f(it)}.$$

Für $t = 1$ erhält man i und $\varDelta = \frac{i}{1+i}$ wie in Formel (12).

1) Für die Form der Zinsfunktion e^{it} sind antizipative und dekursive Verzinsung selbstverständlich identisch.

Der Kapitalwert der ewigen Rente im Betrage 1 von der Periode t ist der reziproke Wert dieser Interusurien aus dem Kapitale 1, folglich ist:

$$N_e^t = \frac{1}{f(it) - 1} \tag{14}$$

der Kapitalwert der nachzahlbaren Ewigrente,

$$V_e^t = \frac{f(it)}{f(it) - 1} \tag{15}$$

der Kapitalwert der vorauszahlbaren Ewigrente von der Periode t.

Tatsächlich verbleibt, wenn man dem Kapital N_e^t nach Ablauf von t Zeiteinheiten periodisch den Wert 1 entnimmt, wiederum N_e^t übrig, da

$$N_e^t f(it) - 1 = N_e^t,$$

und wenn man dem Kapital V_e^t sofort den Betrag 1 entzieht und den Rest aufzinst, erhält man wiederum V_e^t, da

$$(V_e^t - 1) f(it) = V_e^t.$$

2. Die Kapitalwerte der vorschüssigen und nachschüssigen Ewigrente müssen sich um den sofort fälligen Betrag 1 unterscheiden; es ist unabhängig von t

$$V_e^t = N_e^t + 1. \tag{16}$$

Man bemerkt ferner, daß das Verhältnis $V_e^t : N_e^t$ zum Zinsfaktor zurückführt und dieser geradezu als das Verhältnis der Kapitalwerte der vorschüssigen und nachschüssigen Ewigrente mit der Periode 1 definiert werden kann:

$$\frac{V_e^t}{N_e^t} = f(it). \tag{17}$$

Für $t = 1$ erhält man die bekannten Kapitalwerte der ewigen Jahresrenten 1; sind diese nachzahlbar, so ist der Kapitalwert $N_e = \frac{1}{i}$ gleich dem reziproken Wert des Zinsfußes. Bei 4 % ist der Barwert der Ewigrente 1 z. B. gleich 25; der Barwert der vorauszahlbaren Ewigrente $V_e = \frac{1+i}{i} = 26$.

$N_e = \frac{1}{i}$ ist die unter der Bezeichnung „Perpetuität" bekannte Größe.

3. Die Ableitung der Kapitalwerte V_e und N_e wird gewöhnlich durch Summation unendlicher Reihen gegeben, deren Glieder die Gegen-

wartswerte der periodisch fälligen Renten sind:

$$N_e = \frac{1}{f(it)} + \frac{1}{f(it)^2} + \cdots \text{ ad inf.},$$

$$V_e = 1 + \frac{1}{f(it)} + \frac{1}{f(it)^2} + \cdots \text{ ad inf.}$$

Der allgemeinste Ausdruck für den Kapitalwert der in Intervallen von t Zeiteinheiten fälligen Ewigrenten im Betrage 1 ist

$$N_e^t = \frac{e^{-it}}{1 - e^{-it}} = \frac{1}{e^{it} - 1}, \tag{18a}$$

$$V_e^t = \frac{e^{it}}{e^{it} - 1} = \frac{1}{1 - e^{-it}}, \tag{18b}$$

wobei i der Zinsfuß für die Zeiteinheit und an die Gleichung

$$\frac{i}{m} = \log \operatorname{nat}\left(1 + \frac{i'}{m}\right)$$

gebunden sein kann (vgl. § 69, 3; für $m = \infty$ wird $i = i'$).

Soll der Betrag der Ewigrente 1 innerhalb der Periode t in r Raten je vom Betrage 1 fällig sein, so wird

$$N_e^{t:r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{e^{\frac{it}{r}} - 1}, \tag{18c}$$

$$V_e^{t:r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{it}{r}}}. \tag{18d}$$

Für $r = \infty$ wäre der Kapitalwert der vorauszahlbaren und nachzahlbaren Ewigrente gleich.

4. Ist nach dem Kapitalwerte einer ewigen Rente gefragt, welche zu r gleichen Teilraten je innerhalb der Zeit t im Betrage 1 (d. h. r mal $\frac{1}{r}$) fällig wird unter der Annahme, daß der Zinsfuß für die Zeit 1 i beträgt und der Zins innerhalb der Zeiteinheit m mal kapitalisiert werden kann, so ist

$$N_{e,m}^{t:r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt:r} - 1}, \tag{18e}$$

$$V_{e,m}^{t:r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mt:r}}. \tag{18f}$$

Fallen Zins- und Rententermine zusammen, d. h. ist $mt = r$ und ist r, d. h. die auf die Zeit t entfallende Anzahl von Terminen, eine positive ganze Zahl, so reduzieren sich die Formeln (20) auf

$$(18g)\qquad N^t_{e,m} = \frac{1}{mt}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)-1} = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{i} = \frac{N_e}{t},$$

$$(18h)\qquad V^t_{e,m} = \frac{1}{mt}\cdot\frac{1}{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-1}} = \frac{1}{t}\cdot\frac{1+\frac{i}{m}}{i} = \frac{N_e}{t}\left\{1+\frac{i}{m}\right\}.$$

Die Gleichung (21a) besagt: Wenn Zins und Rententermine zusammenfallen, ist der Kapitalwert einer ewigen nachzahlbaren Rente unabhängig von der Zahl der Termine, an welchen die Rente pro rata temporis (d. h. in Teilraten; alle t Zeiteinheiten in summa = 1) gezahlt wird.

§ 72. Grundformeln für aufhörende Renten (Zeitrenten).

1. Aus den Kapitalwerten der Ewigrenten berechnet man ohne weiteres die Kapitalwerte von sogenannten limitierten oder Zeitrenten. Der Kapitalwert (Gegenwartswert) einer solchen ist diejenige Summe, welche mitsamt den anfallenden Zinsen notwendig ist und hinreicht, den Bezug einer solchen t Zeiteinheiten hindurch je im Betrage 1 fälligen Rente zu sichern. Mit Ablauf der Zeitrente ist das ursprüngliche Kapital (V_t oder N_t für vorschüssige bzw. nachschüssige t mal fällige Renten) verbraucht und in die Form der nacheinander fälligen Renten übergeführt. Denkt man sich das Kapital V_t bzw. N_t je nach Umlauf der Zeitperiode t immer von Neuem geschaffen, d. h. eine Ewigrente dieses Betrages mit der Periode t (vgl. § 71), so muß auf diese Weise die fortlaufende von Zeiteinheit zu Zeiteinheit fällige Ewigrente im Betrage 1 gesichert sein, also:

$$(19a)\qquad N_t \times V_e^t = N_e \quad\text{oder}\quad N_t = \frac{N_e}{V_e^t},$$

$$(19b)\qquad V_t \times V_e^t = V_e \quad\text{oder}\quad V_t = \frac{V_e}{V_e^t},$$

Mit Hilfe von (14), (15)

$$(20a)\qquad N_t = N_e(1-v^t) = \frac{1-v^t}{1-v}\cdot v = \frac{1-(1+i)^{-t}}{i},$$

$$(20b)\qquad V_t = V_e(1-v^t) = \frac{1-v^t}{1-v} = \frac{1-(1+i)^{-t}}{i}\{1+i\}.$$

Die Formeln (20) werden gewöhnlich durch Summierung der endlichen Reihen

$$N_t = v + v^2 + v^3 + \cdots + v^t = v\{1 + v + \cdots + v^{t-1}\} = v\frac{1-v^t}{1-v}.$$

und

$$V_t = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{t-1} = \frac{1-v^t}{1-v}$$

abgeleitet.[1])

2. Man kann auch die Überlegung machen, daß der Kapitalwert der Ewigrente zerlegt werden kann in den Kapitalwert der Zeitrente und den Gegenwartswert einer erst nach Ablauf der Periode t beginnenden Ewigrente:

$$N_t + N_e \cdot v^t = N_e \quad \text{und} \quad V_t + V_e \cdot v^t = V_e.$$

Die Kapitalwerte der vorschüssigen und nachschüssigen Zeitrente unterscheiden sich nicht wie die Kapitalwerte der Ewigrenten um den Betrag 1, sondern stehen im Verhältnisse $1 : v$, d. h. im Verhältnisse des Zinsfaktors $(1 + i)$. Ihre Differenz $V_t - N_t = 1 - v^t$ stellt eine vorauszahlbare Ewigrente der Periode t aus dem Kapital 1 dar.

3. Die Relation, wonach jeder Zeitrentenwert als das Verhältnis zweier Ewigrentenwerte aufgefaßt werden kann, bleibt auch dann anwendbar, wenn die Rententermine nicht mit der Zinsperiode 1 zusammenfallen. Nehmen wir an, daß auf die Zeiteinheit gleich der vollen Zinsperiode — Verzinsung $100\, i\,\%$ — m Zinstermine und r Rententermine treffen. Gleichviel ob $r \gtrless 1$, gilt, wenn man unter $N_t^{m,r}$ und $V_t^{m,r}$ die Kapitalwerte einer Rente versteht, welche in tr Teilbeträgen von je $\left(\frac{1}{r}\right)$-tel des auf die Zeiteinheit entfallenden Betrages 1 fällig ist und dabei die Zinsteile in der Zeiteinheit m mal kapitalisiert werden können:

$$N_t^{m,r} \times V_{e,m}^t = N_{e,m}^{1:r}$$

und

$$V_t^{m,r} \times V_{e,m}^t = V_{e,m}^{1:r}$$

und unter Benutzung der Formeln in § 71, 4

$$N_t^{m,r} = \frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mt}}{r\left\{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m:r}-1\right\}} \tag{21a}$$

und

$$V_t^{m,r} = \frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mt}}{r\left\{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-m:r}\right\}}. \tag{21b}$$

---

1) Hinsichtlich der hier gewählten Bezeichnungsweise sei darauf aufmerksam gemacht, daß der unten rechts stehende Index t sich auf die Zeitdauer der Rente bezieht, so daß für $t = e$ die Bezeichnungsweise des § 71 für Ewigrenten damit übereinstimmt (V_e, N_e). Bei letzterem bezeichnete dann der rechts oben stehende Index t die Periodizität der Ewigrente.

4. Für $m = r$, d. h. wenn Zins- und Rententermine zusammenfallen, ergeben sich

(22a) $$N_{t,m} = \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mt}}{i}$$

und

(22b) $$V_{t,m} = \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mt}}{i} \left(1 + \frac{i}{m}\right)$$

als die Kapitalwerte einer nachschüssigen bzw. vorschüssigen Zeitrente auf die Dauer von t Zeiteinheiten, welche innerhalb der Zeiteinheit pro rata temporis in m Terminen im Betrage von $1/m$ fällig wird, unter der Voraussetzung, daß auch die Zinsen pro rata temporis mit i/m kapitalisiert werden können.

5. Wenn man die Gleichungen (21) auf zwei Fälle anwendet, in welchen zwar die Rententermine verschieden, die Zinstermine aber die gleichen sind[1]), so wird das Verhältnis zweier solcher Kapitalwerte unabhängig von t, d. h. es bleibt dasselbe, welches auch die Rentendauer sein mag:

$$N_t^{m,r_1} : N_t^{m,r_2} = \frac{r_2}{r_1} \times \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m:r_2} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m:r_1} - 1},$$

$$V_t^{m,r_1} : V_t^{m,r_2} = \frac{r_2}{r_1} \times \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-m:r_2}}{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-m:r_1}}.$$

Hat man also beispielsweise eine Tafel konstruiert, welche die Kapitalwerte von Zeitrenten enthält, deren Beträge am Schlusse der Zeiteinheit oder deren Raten an den Zinsterminen fällig sind, so erhält man mittelst eines bestimmten Faktors alle Kapitalwerte für Renten, deren Beträge in beliebigen anderen Teilraten gezahlt werden sollen.

6. Das hier vorgetragene Prinzip, Zurückführung der Zeitrenten auf Ewigrenten, läßt sich fruchtbringend anwenden, um allgemeinere Sätze der Zins- und Rentenrechnung abzuleiten, auf welche hier nicht näher eingegangen werden kann. Beispielsweise schreiben wir für eine Zeitrente t, die pro rata an Terminen mit den ungleichen Intervallen μ_1, $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n$ fällig ist unter der Voraussetzung, daß diese die Periode $P = \sum \mu_n$ bilden,

$$N_{t(\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n)} = N_{e(\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n)} : V_e^t,$$

1) Beispiele bei Baerlocher, Handbuch der Zinseszins-, Renten-, Anleihen- und Obligationenrechnung, Zürich 1885.

wobei die Ewigrente

$$N_{e(\mu_1\mu_2\ldots\mu_n)} \quad \text{durch} \quad N_{P(\mu_1\mu_2\ldots\mu_n)} \times V_e^P \quad \text{bestimmt ist}$$

oder

(23a) $$N_{t(\mu_1\mu_2\ldots\mu_n)} = N_{P(\mu_1\mu_2\ldots\mu_n)} \times \left(\frac{V_e^P}{V_e^t}\right)$$

und ähnlich

(23b) $$V_{t(0,\mu_1\mu_2\ldots\mu_{n-1})} = V_{P(0,\mu_1\mu_2\ldots\mu_{n-1})} \times \left(\frac{V_e^P}{V_e^t}\right).$$

§ 73. Schlußwerte aufhörender Renten.

1. Will man nicht den Gegenwartswert einer limitierten Zeitrente, sondern den Schlußwert einer solchen nach Umlauf von t Zeiteinheiten, d. h. fragt man nach dem Betrage, zu welchem eine periodisch, und zwar t mal mit dem jeweiligen Betrage 1 gezahlte Rente mit Zins und Zinseszinsen sich admassiert, so ergibt sich ohne weiteres a) für nachschüssige, b) für vorschüssige Zeitrenten der Schlußwert

(24a) $$c_t = N_t(1+i)^t = \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

und

(24b) $$C_t = V_t \cdot (1+i)^t = \frac{1+i}{i}\{(1+i)^t - 1\}.$$

2. Als Summen endlicher Reihen aufgefaßt, ist, wenn der Aufzinsfußfaktor $1 + i$ der Kürze halber mit r bezeichnet ist,

$$c_t = r^{t-1} + r^{t-2} + \cdots + 1,$$
$$C_t = r^t + r^{t+1} + \cdots + r = r\{r^{t-1} + r^{t-2} + \cdots + 1\}.$$

Es ist selbstverständlich gleich, ob man die einzelnen Rentenbeträge je bis zum Schluß der Rentendauer aufzinst oder den Kapitalwert der sämtlichen Rentenbeträge, den diese zu Beginn des Rentenlaufs darstellen.

3. Die Formeln für ratierliche Zins- und Rententermine sind analog den oben für die Kapitalgegenwartswerte von Zeitrenten berechneten zu bilden.

Während die Anwendung der Formeln für Gegenwartswerte von Zeitrenten hauptsächlich in der Obligationenrechnung erfolgt, werden die der Formeln für Schlußwerte bei den Aufgaben, die mit Sparkassenanlagen, Sparversicherung usw. zusammenhängen, benötigt.

§ 74. Die Anleihenrechnung.

1. In den Formeln für Kapitalwerte von limitierten Renten und den Formeln für die Schlußwerte derselben kommt das Prinzip der Vertretbarkeit von Kapital und Zins, bzw. das der Zinseszinsrechnung, am deutlichsten zum Ausdrucke. Wenn ein Kapital oder Teile eines solchen in Rentenform aufgelöst werden, muß sich der Wert der einzelnen Teile samt Zinseszinsen zu beliebigem Zeitpunkte im Ganzen auf den gleichen Betrag berechnen, wie die ursprünglichen auf den gleichen Zeitpunkt aufgezinsten Kapitalbeträge.

Die Gleichwertigkeit von Zahlungsverpflichtungen irgendwelcher Art muß, solange die Forderung nach streng mathematischer Richtigkeit aufrecht erhalten bleibt, immer so geprüft werden, daß man Gegenwartswerte oder Zukunftswerte, die auf einen beliebigen aber bestimmten Zeitpunkt nach dem Prinzip der Zinseszinsrechnung diskontiert oder aufgezinst sind, in Vergleich bringt.

2. Um dies an einem praktischen Beispiele zu zeigen, erörtern wir hier kurz die Hauptsätze der Obligationen- oder Anleihenrechnung, die gewöhnlich in umständlicher Form entwickelt zu werden pflegen, sich aber ganz einfach aus den begrifflichen Unterlagen ergeben. Die Amortisation eines Darlehens geschieht in der Weise, daß jährlich eine über die Verzinsung der Schuld hinausgehende Zahlung geleistet und dadurch die Schuld allmählich abgetragen wird. Alle einschlägigen Fragen lösen sich dann von dem Gesichtspunkte aus, daß die Kapitalschuld dem Kapitalwert einer Rente gleichkommen muß, deren einzelne Beträge die aufeinanderfolgenden Jahresleistungen (Annuitäten) sind und daß die Kapitalrestschuld zu einem beliebigen Termine gleich dem Kapitalwerte (Gegenwartswerte) der noch folgenden Annuitäten ist. Welche Voraussetzung dabei über die Gesetzmäßigkeit in der Höhe der einzelnen Annuitäten gemacht werden, ist gleichgültig.

Die gebräuchlichste Form ist die der gleichbleibenden Annuitäten. In diesem Falle kann ein stetig wachsender Betrag derselben jeweils zur Schuldentilgung, d. h. zum Kapitalabtrag verwendet werden, da die Verzinsung der stets abnehmenden Kapitalrestschuld einen immer kleiner werdenden Teil der Annuität beansprucht.

3. Sei K die ursprüngliche Kapitalschuld; a die gleichbleibende Jahresleistung, welche nachschüssig oder vorschüssig gedacht sein kann und die Dauer der Amortisation des Darlehens gleich t. Es muß sein

$$K = a \cdot N_t^{mr} \quad \text{oder} \quad K = a \cdot V_t^{mr},$$

wenn die Renten (Annuitäten) in Raten zum Betrage a/r fällig sind

und auf die Zeiteinheit, für welche der Zinsfuß mit $100\,i\,\%$ berechnet wird, m Zinstermine treffen.

Zumeist werden die Annuitäten, entsprechend der Dekursiv-Verzinsung, nachschüssig berechnet; wir brauchen die Formeln für vorschüssige Annuitäten nicht besonders zu behandeln, da man diese mittels der Relation $K' = K \cdot v$ in nachschüssige verwandeln kann.

Wir haben also für nachzahlbare Annuitäten nach § 72

$$(25) \qquad K = a \cdot N_t^{m,r} = a \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mt}}{r\left\{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m:r} - 1\right\}}.$$

Für $m = r$, d. h. wenn die Annuitäten ratenweise zu den gleichen Terminen fällig sind, an welchen der Zins pro rata temporis zu vergüten ist, wird

$$(25\,a) \qquad K = a \times \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mt}}{i},$$

und für $m = r = 1$ d. h. wenn die Annuität im vollen Betrage am Jahresschluß bezahlt wird und die Verzinsung ebenfalls ganzjährig erfolgt

$$(25\,b) \qquad K = a \times \frac{1 - (1 + i)^{-t}}{i},$$

oder bei halbjährlicher Verzinsung und halbjährlicher Tilgung (in der Praxis am häufigsten)

$$(25\,c) \qquad K = a \times \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{-2t}}{i}.$$

4. Zumeist handelt es sich darum, wenn K und a gegeben sind, die Amortisationsdauer t zu berechnen; man hat

$$(26) \qquad t = \frac{\lg a - \lg\left[a - Kr\left\{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m:r} - 1\right\}\right]}{m \lg\left(1 + \frac{i}{m}\right)};$$

für $m = r$

$$(26\,a) \qquad t = \frac{\lg a - \lg(a - Ki)}{m \lg\left(1 + \frac{i}{m}\right)} = \frac{\lg\left(\frac{a}{m}\right) - \lg\left(\frac{a}{m} - K\frac{i}{m}\right)}{m \lg\left(1 + \frac{i}{m}\right)},$$

für $m = r = 1$

$$26\,b) \qquad t = \frac{\lg a - \lg[a - Ki]}{\lg(1 + i)},$$

für $m = r = 2$

$$(26\,\mathrm{c})\qquad t = \frac{\lg a - \lg[a - Ki]}{2\lg\left(1 + \frac{i}{2}\right)} = \frac{\lg\frac{a}{2} - \lg\left[\frac{a}{2} - \frac{Ki}{2}\right]}{2\lg\left(1 + \frac{i}{2}\right)}.$$

Die Gleichung (26 a) läßt sich auf einfache Weise deuten: $a - Ki$ ist der erste Tilgungsbetrag für die Zeiteinheit, da Ki die für die Verzinsung des Kapitales erforderliche Summe darstellt;

$$\frac{a}{m} - K \cdot \frac{i}{m}$$

der Tilgungsbetrag, wenn Verzinsung und Tilgung ratenweise erfolgt. Ist der Zinsfuß $(100\,i)$ und der Tilgungssatz $(100\,\vartheta)$ in % gegeben, so ist die Annuität, auf das Kapital 1 berechnet, $= i + \vartheta$, der Zähler des Ausdruckes in (26 a) kann ersetzt werden durch $\lg(i + \vartheta) - \lg\vartheta$; ferner stellt der Nenner im Sinne des § 69, Formel 9, wenn man mit natürlichen Logarithmen rechnet, die Zinskraft j oder (i') der in Betracht kommenden Verzinsung dar, wobei

$$e^{i'} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m.$$

Man hat also für die Bestimmung der Amortisationsdauer die Gleichung

$$(27)\qquad t = \frac{\lg\,\mathrm{nat}\,(i + \vartheta) - \lg\,\mathrm{nat}\,\vartheta}{i'}.$$

5. Im allgemeinen wird t sich nicht als ganze Zahl bestimmen. In der Praxis wird dann der Amortisationsplan derart abgeändert, daß statt der gleichbleibenden Annuität letztmals ein erhöhter oder geringerer Betrag zur Tilgung und Verzinsung verwendet wird (vgl. S. 418).

Beispiele:

bei $100\,i = 3\tfrac{1}{2}$%iger Verz.	u. $100\,\vartheta =$	½%, Annuit.	4%	ist t zwisch.	60/61 Jhr.
" " " "	" " "	= 1%, "	4½% "	"	43/44 "
" " " "	" " "	= 1½%, "	5% "	"	35/36 "
" " " "	" " "	= 2%, "	5½% "	"	29/30 "
bei " = 4% iger	" " "	= ½%, "	4½% "	"	56/57 "
" " " "	" " "	= 1%, "	5% "	"	41/42 "
" " " "	" " "	= 1½%, "	5½% "	"	33/32 "
" " " "	" " "	= 2%, "	6% "	"	28/29 "

Beispiel eines Amortisationsplans

für eine 4 %ige Schuld von 20 Mill. Mark mit 2 % Tilgung.

Jahr nach Ausgabe	Schuldkapital	6 % Annuität	4 % Zinsen von der jeweiligen Kapital-Restschuld	Tilgung (2 % zuzüglich der ersparten Zinsen)
1	20.000.000,—	1.200.000,—	800.000,—	400.000,—
2	19.600.000,—	1.200.000,—	784.000,—	416.000,—
3	19.184.000,—	1.200.000,—	767.360,—	432.640,—
4	18.751.360,—	1.200.000,—	750.054,40	449.945,60
5	18.301.414,40	1.200.000,—	732.056,58	467.943,42
6	17.833.470,98	1.200.000,—	713.338,84	486.661,16
7	17.346.809,82	1.200.000,—	693.872,39	506.127,61
8	16.840.682,21	1.200.000,—	673.627,29	526.372,71
9	16.314.309,50	1.200.000,—	652.572,38	547.427,62
10	15.766.881,88	1.200.000,—	630.675,28	569.324,72
11	15.197.557,16	1.200.000,—	607.902,29	592.097,71
12	14.605.459,45	1.200.000,—	584.218,38	615.781,62
13	13.989.677,88	1.200.000,—	559.587,11	640.412,89
14	13.349.264,94	1.200.000,—	533.970,60	666.029,40
15	12.683.235,54	1.200.000,—	507.329,42	692.670,58
16	11.990.564,96	1.200.000,—	479.622,60	720.377,40
17	11.270.187,56	1.200.000,—	450.807,50	749.192,50
18	10.520.995,06	1.200.000,—	420.839,80	779.160,20
19	9.741.834,86	1.200.000,—	389.673,39	810.326,61
20	8.931.508,25	1.200.000,—	357.260,33	842.739,67
21	8.088.768,58	1.200.000,—	323.550,74	876.449,26
22	7.212.319,32	1.200.000,—	288.492,77	911.507,23
23	6.300.812,09	1.200.000,—	252.032,48	947.967,52
24	5.352.844,57	1.200.000,—	214.113,78	985.886,22
25	4.366.958,35	1.200.000,—	174.678,33	1.025.321,67
26	3.341.636,68	1.200.000,—	133.665,47	1.066.334,53
27	2.275.302,15	1.200.000,—	91.012,09	1.108.987,91
28	1.166.314,24	1.200.000,—	46.652,57	1.153.347,43
29	12.966,81	13.485,48	518,67	12.966,81
				20.000.000,—

6. Nach dem Vorgetragenen ist die Kapitalrestschuld nach Umlauf der Zeit $\tau < t$, welche wir mit $K_{t-\tau}$ bezeichnen werden, gleich den auf diesen Zeitpunkt diskontierten Gegenwartswerten der noch weiterhin fälligen Annuitäten:

$$(28) \qquad K_{t-\tau} = a \cdot N_{t-\tau}^{m,r} = a \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-m(t-\tau)}}{r\left\{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m:r} - 1\right\}};$$

für $m = r$

$$(28\,\mathrm{a}) \qquad K_{t-\tau} = a \times \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-m(t-\tau)}}{i};$$

für $m = r = 1$

$$(28\,\mathrm{b}) \qquad K_{t-\tau} = a \times \frac{1 - (1 + i)^{-(t-\tau)}}{i}$$

für $m = r = 2$

(28 c)
$$K_{t-\tau} = a \times \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{-2(t-\tau)}}{i}.$$

Man hätte zu beweisen, daß die Kapitalrestschuld $K_{t-\tau}$ jeweils gleich der Differenz des für sich verrechneten, samt Zins und Zinseszins angesammelten Kapitales vermindert um den Schlußwert der inzwischen ebenfalls getrennt verrechneten admassierten Renten (Annuitäten) ist:

Der Ausdruck
$$Kf(i, \tau) - a \cdot N_\tau^{m,r} \cdot f(i, \tau)$$
oder
$$\{a \cdot N_t^{m,r} - a N_\tau^{m,r}\}\,(fi, \tau)$$

läßt sich unter Anwendung der Formel (21 a), und da
$$f(i, \tau) = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m\tau},$$
schreiben:
$$\frac{a}{r} \frac{\left\{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mt}\right\} - \left\{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-m\tau}\right\}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m:r} - 1} \cdot \left\{1 + \frac{i}{m}\right\}^{m\tau}$$
$$= \frac{a}{r} \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-m(t-\tau)}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m:r} - 1} = K_{t-\tau}, \quad q.\ e.\ d.$$

Für $\tau = t$ wird K_0 gleich Null: das Kapital ist getilgt bzw. in die Form der Annuitäten übergeführt.

7. Bleiben wir der leichteren Verständlichkeit wegen bei dem Falle $m = r$ stehen und verfolgen nun den Amortisationsplan für die Tilgung einer Anleiheschuld, indem wir fragen, ob die um die ersparten Zinsen steigenden Tilgungsraten und die Kapitalrestbeträge sich durch eine Rekursionsformel einfach berechnen lassen.

Von der Annuitätsrate a/m wird der Betrag $K_{t-\tau} \times i/m$ für die Verzinsung pro rata temporis der Kapitalrestschuld $K_{t-\tau}$ benötigt; der Rest kann zum Kapitalabtrag verwendet werden:

(29)
$$K_{t-\left(\tau+\frac{1}{m}\right)} = K_{t-\tau} - \left\{\frac{a}{m} - K_{t-\tau} \cdot \frac{i}{m}\right\}$$
$$= K_{t-\tau}\left\{1 + \frac{i}{m}\right\} - \frac{a}{m}.$$

Sind die entsprechenden zwei aufeinander folgenden Tilgungsquoten
$$T_\tau = \frac{a}{m} - K_{t-\tau} \times \frac{i}{m} \quad \text{und}$$

$$T_{\tau+\frac{1}{m}} = \frac{a}{m} - K_{t-\left(\tau+\frac{1}{m}\right)} \times \frac{i}{m},$$

so wird nach (29)

$$T_{\tau+\frac{1}{m}} = \frac{a}{m} - K_{t-\tau} \left\{1 + \frac{i}{m}\right\} \frac{i}{m} + \frac{a}{m} \times \frac{i}{m}$$

$$= \left\{\frac{a}{m} - K_{t-\tau} \times \frac{i}{m}\right\} \left\{1 + \frac{i}{m}\right\}$$

oder

(30) $$T_{\tau+\frac{1}{m}} = T_\tau \times \left(1 + \frac{i}{m}\right),$$

d. h. die Tilgungsquoten wachsen der Reihe nach im geometrischen Verhältnisse des Zinsfaktors.

8. Die erste Tilgungsrate für die Zeiteinheit war zu bezeichnen mit

(31a) $$T_1 = a - Ki = a(1+i)^{-t} = av^t$$

oder, wenn Verzinsung und Tilgung im Laufe des Jahres pro rata temporis zu je $1/m$tel erfolgt:

(31b) $$T_{\frac{1}{m}} = \frac{a}{m} - K\frac{i}{m} = \frac{a}{m} \times \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mt}.$$

Aus (30) und (31b) ergibt sich die Summe der einzelnen $m \times t$ Tilgungsbeträge

$$\sum_{\tau=\frac{1}{m}}^{\tau=mt} T_\tau = \frac{a}{m}\left\{1 + \frac{i}{m}\right\}^{-mt} \times \left\{1 + \left(1+\frac{i}{m}\right) + \left(1+\frac{i}{m}\right)^2 + \cdots + \left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt-1}\right\}$$

$$= \frac{a}{m}\left\{1 + \frac{i}{m}\right\}^{-mt} \times \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt} - 1}{\left(1+\frac{i}{m}\right) - 1}$$

$$= \frac{a}{i}\left\{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mt}\right\}$$

oder gemäß (25a)

$$\sum T = K,$$

d. h. die algebraische Summe der um die ersparten Zinsen wachsenden Tilgungsquoten repräsentiert das ursprüngliche Kapital.

9. Wenn i und a in Prozenten gegeben, ist $T_1 = \vartheta$ der Prozentsatz der Tilgung zuzüglich der jeweils ersparten Zinsen, wie man sich in der Praxis ausdrückt, und $T_{1/m} = \vartheta_{1/m}$ ist die ratirliche Tilgungsquote, wenn m Zins- und Rententermine vorausgesetzt sind; der Amortisationsplan gestaltet sich ebenso, als ob der Zinsfuß für die Zeiteinheit $100\,i/m$% wäre und die Amortisationsdauer mt Zeiteinheiten betragen würde.

Nach Gleichung (31 a) ist $\vartheta = av^t = (\vartheta + i)v^t$. Hieraus bestimmt sich, wenn der Zinsfuß und die Amortisationsdauer t gegeben, der Tilgungssatz ϑ aus der Gleichung

$$(32) \qquad \vartheta = \frac{i}{(1+i)^t - 1}.$$

Man braucht zu Bestimmung von ϑ also eine Tabelle der Zinsfaktoren.

10. Die Amortisation des Kapitals, bzw. den Abtrag der Kapitalschuld kann man sich selbstverständlich auch so denken, daß das ursprüngliche Kapital dauernd in gleicher Höhe verzinst wird bis zu dem Zeitpunkte, wo die gleichbleibende Amortisationsrate ϑ bzw. $\vartheta_{1/m}$, als Rente admassiert, den Schlußwert gleich dem ursprüglichen Kapital K erreicht hat und die Tilgung der Kapitalsschuld durch diese angesammelten Beträge auf einmal ermöglicht ist. Nach Formel (24) bzw. (31) ist

$$(33\text{a}) \qquad T_1 \times N_t(1+i)^t = a \times N_t = K$$

oder allgemeiner, bei ratirlicher Verzinsung,

$$(33\text{b}) \qquad T_{1/m} \times N_{t,m}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt} = \frac{a}{m} \times N_{t,m} = K.$$

Die Gleichung (33 a) gibt ein noch einfacheres Mittel, um den Tilgungssatz bei vorgegebenem Zinsfuße i und bestimmter Amortisationsdauer t sofort zu ermitteln. Hat man eine Tafel der Baarwerte N_t zur Hand, so ist $100 : N_t$ die Annuität. Die Differenz zwischen dieser und dem Zinsfuße, beide in Prozenten ausgedrückt, ergibt den Tilgungssatz im Verhältnisse zum ursprünglichen Schuldkapital. —

Die Kenntnis der hier vorgetragenen Grundregeln der Zinsrechnung genügt auch für die Lösung der Aufgaben, bei welchen es sich um mittlere Zahlungstermine, veränderliche Renten usw. handelt, oder wenn die Tilgung von Amortisationsanleihen in der Weise erfolgt, daß die Annuitäten (Jahreszahlungen) nicht gleichbleibende sind, sondern variieren. Ebenso gehört die Berechnung der Lotterieanleihen[1]) hierher. Es wird auch genügend klargestellt sein, wie die Grundregeln anzuwenden sind, wenn es sich um die Berechnung von Kursparitäten amortisabler Anleihen[2]), um die Konversion von Anleihen und andere Probleme der Praxis handelt.

Ein besonderes Kapitel wäre der Untersuchung zu widmen, wie Zins und Diskontfaktoren, Kapitalwerte und Schlußwerte aufhörender Renten

1) Vgl. Oettinger, Theorie der Lotterieanleihen (Programmschrift), Freiburg 1843.

2) Tabellarische Hilfsmittel hierzu findet man bei Schinkenberger, Handbuch der Berechnungen von Anleihen und Annuitäten, Frankfurt a/M. 1888 und in dem neueren Handbuch von Zollinger, Tabellen zur Kurs- und Rentabilitätsberechnung von Anleihen, Frauenfeld, bei Huber & Co. (ohne Jahrgang).

Wirkung des Zinseszinses.

n = Anzahl der Zins- oder Rentenperioden		3 %	3½ %	4 %	5 %	6 %
Zinsfaktoren $n =$	1	1 03	1.035	1.04	1.05	1.06
	10	1.3439	1.4106	1.4802	1.6289	1.7908
	20	1.8061	1.9898	2.1911	2.6533	3.2071
	50	4.3839	5.5849	7.1067	11.4674	18.4202
	100	19.2186	31.1914	50.5049	131.5013	339.3021
	∞	∞	∞	∞	∞	∞
		3 %	3½ %	4 %	5 %	6 %
Diskont-faktoren $n =$	1	0.9709	0.9662	0.9615	0.9524	0.9434
	10	0.7441	0.7089	0.6756	0.6139	0.5584
	20	0.5537	0.5026	0.4564	0.3769	0.3118
	50	0.2281	0.1791	0.1407	0.0872	0.0543
	100	0.0520	0.0321	0.0198	0.0076	0.0029
	∞	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		3 %	3½ %	4 %	5 %	6 %
Endwert vorausgezahlter Renten $n =$	1	1.03	1.035	1.04	1.05	1.06
	10	11.8078	12.1420	12.4864	13.2068	13.9716
	20	27.6765	29.2695	30.9692	34.7193	38.9927
	50	116.1808	135.5828	158.7738	219.8154	307.7561
	100	625.5064	892.8031	1287.1287	2740.5264	5976.6701
	∞	∞	∞	∞	∞	∞
		3 %	3½ %	4 %	5 %	6 %
Barwert nachgezahlter Renten $n =$	1	0.9709	0.9662	0.9615	0.9524	0.9434
	10	8.5302	8.3166	8.1109	7.7217	7.3601
	20	14.8775	14.2124	13.5903	12.4622	11.4699
	50	25.7298	23.4556	21.4822	18.2559	15.7619
	100	31.5989	27.6554	24.5050	19.8479	16.6175
	∞	33.3333	28.5743	25.0000	20.0000	16.6667
		3 %	3½ %	4 %	5 %	6 %
Nachzahlbare Annuitäten zur Tilgung einer Schuld. Tilgungsquote = Differenz zwischen Annuität und Zinsfuß $n =$	1	1.03	1.035	1.04	1.05	1.06
	10	0.1172	0.1202	0.1233	0.1295	0.1359
	20	0.0672	0.0704	0.0736	0.0802	0.0872
	50	0.0389	0.0426	0.0466	0.0548	0.0634
	100	0.0316	0.0362	0.0408	0.0504	0.0602
	∞	0.03	0.035	0.04	0.05	0.06

sich ändern, wenn der Zinsfuß sich ändert. Diese Untersuchungen fallen außerhalb des Rahmens dieses Aufsatzes. Brauchbare Näherungsformeln lassen sich nicht in einfacher Weise bestimmen; in der Praxis genügen zumeist die oben genannten ausführlichen Tabellenwerke.

Ein Bild von der Abhängigkeit der Zins- und Diskontfaktoren sowie der Rentenwerte von der Höhe des Zinsfußes gibt die obige Zusammenstellung.

— — —

Zehnter Abschnitt.

Elemente der Versicherungsrechnung.

§ 75. Allgemeine Grundlagen des Versicherungswesens.

1. Das Wesen der Versicherung besteht darin, daß die für den Eintritt bestimmter Ereignisse bereitzustellenden Summen auf eine große Zahl von Interessenten verteilt werden. Die Assoziation der letzteren ist das Wesentliche, gleichviel ob die geschäftliche Organisation durch die Gesamtheit der Versicherten (Gegenseitigkeitsgesellschaft) oder einen Dritten (Aktienunternehmen) erfolgt. Die mathematische Theorie geht von der Gleichheit der Leistungen und Gegenleistungen aus (Nettoprinzip); der für den Eintritt des Versicherungsfalles nötige Geldbedarf muß durch die Nettobeiträge aller Interessenten gedeckt sein; in den Bruttobeiträgen (Prämien) finden der Unternehmergewinn und die Schwankungen des Risikos entsprechende Berücksichtigung. Zur Versicherung eignen sich Fälle, bei welchen der Eintritt des Ereignisses selbst oder der Zeitpunkt eines solchen ungewiß ist; die Versicherungsmöglichkeit ist gegeben, wenn auf Grund statistischer Unterlagen sich Wahrscheinlichkeitsrechnungen für den Eintritt eines Ereignisses anstellen lassen. Diese werden allerdings vielfach erst auf Grund der Erfahrungen der Versicherungspraxis selbst gewonnen.[1]) Während für die verschiedenen Zweige der Lebensversicherung genügend Beobachtungen über das Gesetz der menschlichen Sterblichkeit (Absterbeordnung nach dem Alter) vorliegen, ebenso auf verschiedenen Gebieten der sogenannten Sachversicherung, z. B. bei der Feuerversicherung, Hagel- und Viehversicherung, und auch bei der

1) Vgl. zur Orientierung den kurzen Aufsatz von Bleicher, Versicherungswesen und Statistik in der Zeitschrift f. d. ges. Versicherungswissenschaft Band 3, Berlin 1903. — Ferner die Aufsätze von Bleicher und Emminghaus über: „Die Grenzen der Versicherungsmöglichkeit“ im ersten Bande der Berichte des V. internationalen Kongresses für Versicherungswissenschaft, Berlin, E. Mittler u. Sohn 1906; zum Studium: Westergaard, Die Grundzüge der Theorie der Statistik, Jena 1890.



Unfallversicherung die Schadensgefahr sich ziemlich sicher abschätzen läßt, sind bei anderen[1]) Versicherungszweigen (Wasserleitungsschäden, Einbruch- und Diebstahlversicherung usw.), ebenso wie bei der Haftpflichtversicherung Wahrscheinlichkeitsrechnungen schwieriger aufzustellen, weshalb in diesen Fällen die Prämienberechnung weniger auf mathematischer Grundlage beruht. Werden diese Versicherungszweige von Gegenseitigkeitsgesellschaften betrieben, so wird die Erhebung der Beiträge nach dem Umlageverfahren (Deckung des tatsächlich eingetretenen Geldbedarfs nach der Häufigkeit der Schadensfälle) noch vielfach Anwendung finden; die Aktiengesellschaften müssen hier bei der Versicherung gegen feste Prämie hohe Sicherheitszuschläge nehmen. Wir werden im folgenden uns hauptsächlich mit der Lebensversicherung, als dem durchgebildetsten Zweige der Versicherung beschäftigen, welche insbesondere die Eigentümlichkeit hat, daß der Versicherungsvertrag auf lange Zeitdauer abgeschlossen ist. Wir schicken indes einige allgemeine Betrachtungen voraus, welche als theoretische Grundlagen des gesamten Versicherungswesens gelten sollen.

2. Bei der Versicherung wird, wie bei Berechnung des Gegenwartswertes eines später fälligen Kapitals oder einer periodisch fälligen Rente eine Diskontierung von Forderungen auf den Zeitpunkt des Abschlusses der Versicherung vorgenommen, wobei die Fälligkeit dieser Forderungen, zum mindesten der Zeitpunkt ihres Eintretens, von Wahrscheinlichkeitsbestimmungen abhängig ist. Diese Wahrscheinlichkeitsgrößen sind natürlich sehr einfacher Natur; einfach der Quotient aus der Zahl der günstigen und der Zahl aller möglichen Fälle.

Es handelt sich dabei aber immer um Quotienten, die aus der Erfahrung abgeleitet sind (Wahrscheinlichkeit a posteriori). Man nimmt an, daß unter denselben Umständen die den Versicherungsfall charakterisierenden Ereignisse sich späterhin in gleicher Häufigkeit und Intensität wiederholen, wie diese aus vieljährigen und zahlreichen Beobachtungen ermittelt sind.

In der elementaren Sprachweise versteht man unter dem „Risiko“ der Versicherung gewöhnlich den auf den Abschlußtag der Versicherung reduzierten Wert der für den Versicherer bestehenden Verpflichtungen. Das Risiko ist von folgenden Momenten abhängig: 1. Versicherungssumme (bei Sachversicherungen gemeiner Wert); 2. Versicherungsdauer; 3. Häufigkeit des Eintrittes bestimmter Ereignisse nach Zeitabschnitten; 4. letztere kombiniert mit der wahrscheinlichen

1) Vgl. die Handbücher: Brämer, Das Versicherungswesen, Leipzig (Hirschfeld 1894) und Manes, Versicherungswesen, Leipzig (Teubner 1905). Hier auch die Literatur.



Intensität (z. B. bei Sachversicherung Intensität der Zerstörung, in der Personenversicherung Grad der Invalidität usw.).[1])

3. Man kann die Formeln für die Prämienberechnungen, bei welchen es sich immer um Gleichsetzung der Leistungen des Versicherers und der Gegenleistungen der Gesamtheit aller Versicherten handelt, leicht ohne irgendwelche Bezugnahme auf die Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickeln. Da sich aber auch mit den Grundbegriffen derselben in dem eben angedeuteten Sinne operieren läßt, sei hierüber noch kurz folgendes gesagt. Anwendung können finden die beiden Hilfssätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung[2]), welche lauten:

1) Die vollständige Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, welches auf mehrere einander ausschließende Arten eintreten kann, erscheint als die Summe der entsprechenden Teilwahrscheinlichkeiten; d. h. die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, welches gewiß ist, so oft eines von mehreren andern Ereignissen eintrifft und nur wenn eines derselben eintrifft, ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse.

2) Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, welches aus mehreren aufeinanderfolgenden zusammengesetzt ist, ebenso wie die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens mehrerer voneinander unabhängiger Ereignisse ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse. (Vgl. § 51.)

4. Beispiele: Die Wahrscheinlichkeit für eine Person bestimmten Alters innerhalb zweier Jahre zu sterben ist nach dem ersten Hilfssatze gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten entweder im ersten oder im zweiten Jahre zu sterben. Dagegen ist die Wahrscheinlichkeit für die gleiche Person, erst im zweiten Jahre zu sterben, nach dem zweiten Hilfssatze gleich dem Produkt aus der Wahrscheinlichkeit das Ende des ersten Jahres zu erleben und der Wahrscheinlichkeit für die dann um ein Jahr ältere Person im Laufe des darauffolgenden Jahres zu sterben (siehe unter Ziffer **6.**).

Oder: ist bei einem Ehepaar die Wahrscheinlichkeit, daß der Mann am Ende des Jahres noch lebt W_1, für die Frau W_2, so ist

---

1) Gallus, Die Grundlagen des gesamten Versicherungswesens Leipzig, 1874, worin eine vorzügliche knappe Entwicklung des Versicherungsprinzips in populärer Darstellung enthalten ist. Die Bezeichnung „Risiko“ wird auch in anderem Sinne gebraucht.

2) Vgl. Meyer, Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung (Deutsch von Czuber) Leipzig 1879. — Bohlmann, „Lebensversicherungsmathematik“ in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften Band I, 2. Teil, 1 D 4 b; Leipzig 1900—1904, S. 852 ff. — Broggi, Versicherungsmathematik, Deutsche Ausgabe, Leipzig und Berlin 1911.

nach dem zweiten Hilfssatze die Wahrscheinlichkeit, daß beide gleichzeitig am Ende des Jahres noch am Leben sind, $W_1 \times W_2$, — die Wahrscheinlichkeit, daß der Mann allein überlebt $W_1(1-W_2)$, — die Wahrscheinlichkeit, daß die Frau allein überlebt $W_2(1-W_1)$; und die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens eines der beiden Eheteile am Schlusse des Jahres noch lebt, setzt sich nach dem ersten Hilfssatze aus der Summe der Wahrscheinlichkeiten der drei möglichen Fälle $W_1 \times W_2 + W_1(1-W_2) + W_2(1-W_1)$ zusammen, ergibt also $W_1 + W_2 - W_1 W_2$. Oder: die entsprechenden Sterbenswahrscheinlichkeiten (die Wahrscheinlichkeit innerhalb eines Jahres zu sterben) für Mann und Frau sind $1-W_1$ und $1-W_2$; eine Versicherungsgesellschaft, welche die Auszahlung einer Versicherungssumme übernimmt, für den Fall daß mindestens eines der beiden Eheleute im Laufe eines Jahres verstirbt, hat für das Eintreten des Versicherungsfalles der Prämienberechnung die Totalwahrscheinlichkeit $(1-W_1)W_2 + (1-W_2)W_1 + (1-W_1)(1-W_2) = 1 - W_1 W_2$ zugrunde zu legen; wenn sie die Versicherungssumme nur an die überlebende Frau auszahlen soll, wenn der Mann verstorben ist, nur $(1-W_1)\cdot W_2$ usw. Bei der sogenannten abgekürzten oder gemischten Lebensversicherung, der gegenwärtig üblichsten Form derselben, bei welcher ein Kapital zur Auszahlung gelangt im Todesfalle des Versicherten, spätestens aber bei Erreichung eines bestimmten Lebensalters, wenn der Versicherte dann noch lebt, kommt die Summe der verschiedenen Wahrscheinlichkeiten im Laufe der einzelnen Jahre während der Versicherungsdauer zu sterben und der Wahrscheinlichkeit den festgesetzten Termin zu erleben, in Betracht usw. In der Unfallversicherung setzt sich die Gesamtwahrscheinlichkeit des Versicherungsfalles zusammen aus den Teilwahrscheinlichkeiten für eine vorübergehende Erwerbsunfähigkeit, eine dauernde Invalidität und einen tötlichen Ausgang eines Unfalles. Für die ersteren ist der Grad der Erwerbsunfähigkeit bzw. Invalidität (Teil- oder Vollinvalidität), in Betracht zu ziehen dadurch daß die wahrscheinliche Intensität des Schadensfalles als Faktor der Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Versicherungsfalles hinzutritt. Ähnlich bei den Sachversicherungen usw.

Theoretisch stellt sich das Risiko für ein Versicherungsjahr dar als Produkt aus der Versicherungssumme und der Wahrscheinlichkeit des Eintreffens des Ereignisses und der wahrscheinlichen Intensität. Für Summenversicherungen (Lebensversicherung) kommt nur das Produkt aus Versicherungssumme und Wahrscheinlichkeit des Ereignisses in Betracht.

Ist die Wahrscheinlichkeit im Alter von 50 Jahren innerhalb eines Jahres zu sterben 2 %, so ist bei der Intensität 1 die Nettoprämie für die Versicherung auf ein Jahr für 10 000 ℳ Versicherungssumme 200 ℳ.

Die Wahrscheinlichkeit innerhalb eines Jahres zu sterben, wächst

von Jahr zu Jahr mit dem Lebensalter; die Risikoprämie für ein Jahr wird schließlich sehr hoch, weshalb man in der Lebensversicherung Durchschnittsprämien zur Anwendung bringt, die für die ganze Dauer der Versicherung gleich bleiben. Mit der Berechnung dieser Prämien werden wir uns hier eingehender beschäftigen, da die Lebensversicherung, wie erwähnt, noch die weitere Eigentümlichkeit hat, daß die Dauer des Versicherungsvertrages fast immer eine langfristige ist.

Dagegen bleibt in der Sachversicherung (z. B. Feuerversicherung) das Risiko im allgemeinen das gleiche, und es handelt sich stets um kurzfristige Versicherungsverträge. Hat man ein Haus behufs Versicherung gegen Feuersgefahr in eine Gefahrenklasse eingereiht, bei welcher nach der Belegenheit und Bauart desselben die Gefahr des Brandes $3‰$ beträgt und die durchschnittliche Intensität auf Grund der Erfahrung (immer nach dem Gesetz der großen Zahlen) mit $^5/_8$ anzunehmen ist, so wäre bei einem Versicherungswert von 50 000 ℳ das Risiko $\frac{3}{1000} \times \frac{5}{8} \times 50\,000 = 93{,}75$ ℳ als Grundlage für die Bemessung der Nettoprämie. Ist die Versicherungssumme niedriger als der eigentliche Versicherungswert, so kann bei einem Teilschaden die Versicherungssumme nur pro rata (Intensität des Schadensfalles $\times$ Versicherungssumme) beansprucht werden, auch wenn der tatsächliche Schaden, für welchen die ganze Versicherungssumme immer das Maximum darstellt, diesen letzteren erreichen würde. Denn bei Bemessung der Durchschnittsprämien ist implizite die wahrscheinliche Intensität bereits berücksichtigt; zahlt der Versicherungsnehmer nicht die Prämie für den vollen Versicherungswert, so findet stets Reduktion der Schadenvergütung im Verhältnis der Versicherungssumme zum Versicherungswerte statt, worüber das Publikum nicht genügend aufgeklärt ist. Das Prinzip ist nunmehr gesetzlich festgelegt in den Bestimmungen des Reichsgesetzes über den Versicherungsvertrag vom Jahre 1908.

5. In einzelnen Zweigen der Sachversicherung ist es üblich den Versicherungsvertrag auf eine Reihe von Jahren abzuschließen derart, daß der Versicherer die Größe des Risikos nach Ablauf des ersten Versicherungsjahres usw. nur dann übernimmt, wenn ein Schadenfall nicht eingetreten ist. Das Risiko wird für das erste Jahr absolut übernommen, für das zweite und die folgenden Jahre nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit. Lassen wir die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Schadenfalles innerhalb eines jeden einzelnen Versicherungsjahres selbst konstant $= W$ (obiges Beispiel $3‰$), so ist die Wahrscheinlichkeit der Fortsetzung der Versicherung an den einzelnen Prolongationsterminen $(1 - W)$ bzw. $(1 - W)^2$, $(1 - W)^3$, $(1 - W)^4$, während das absolute Risiko $W \cdot J \times S$ (obiges Beispiel in der Feuerversicherung 93,75 ℳ) das gleiche bleibt.



Die Nettoprämie für n Jahre ist also, wenn v den Diskontierungsfaktor $v = \frac{1}{1+i}$ beim Zinsfuß 100 $i\%_0$ darstellt,

$$(1) \qquad P_n = W \cdot J \cdot S\{1 + (1 - W)v + (1 - W)^2 v^2 + (1 - W)^3 v^3 + \cdots + (1 - W)^{n-1} v^{n-1}\}.$$

Die Versicherungsgesellschaften pflegen bei Abschluß der Versicherung auf eine größere Reihe von Jahren (meist 5—10 Jahre), wenn die Prämien vorausgezahlt werden, ein oder mehrere sogenannte Freijahre zu gewähren. Beispielsweise wird Versicherungsschutz auf 5 Jahre bei Erlag einer viereinhalbfachen Jahresprämie oder auf 10 Jahre bei Vorauszahlung der achtfachen Jahresprämie übernommen, was sich rechnerisch durch die Formel P_n begründen läßt. Die Anzahl der Freijahre muß nach dieser abhängig vom Gefahrentarif sein, je größer das Risiko W, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Risiko weiterläuft, desto kleiner die Prämie für eine längere Versicherungsdauer, desto größer die Anzahl der eventuellen Freijahre.

6. In der Lebensversicherung wechselt das Risiko von Jahr zu Jahr; ist im Lebensalter x die Wahrscheinlichkeit im Laufe des nächsten Jahres zu sterben q_x, so ist das Risiko für eine Todesfallversicherung unter der Voraussetzung, daß die Versicherungssumme 1 am Schlusse des Jahres bezahlt wird:

$$q_x \cdot v + (1 - q_x) q_{x+1} \cdot v^2 + (1 - q_x)(1 - q_{x+1}) \cdot q_{x+2} \cdot v^3 + \cdots \text{ usw.}$$

Diese Art der Berechnung des Risikos führt zur Bestimmung der sogenannten einmaligen Prämien, d. h. der Kapitalbeträge, welche als Gegenleistung für die im Laufe der Versicherungsdauer fällig werdenden diskontierten Leistungen des Versicherers durch die Versicherungsnehmer einzulegen sind. Gewöhnlich werden die Versicherungen gegen feste jährliche Prämien abgeschlossen. Allgemein gilt folgende Relation: Heißt die einmalige Prämie E, die periodische und bis zu einem näher zu bezeichnenden Zeitpunkte zu leistende Prämie P, so muß immer

$$(2) \qquad E = P \cdot R$$

sein, wo R den Kapitalwert der Rente 1 darstellt, welche in bestimmter Periode, unter bestimmter Voraussetzung bis zu einem bestimmten Zeitpunkte zu zahlen ist. Z. B. werden in der Lebensversicherung Jahresprämien verabredet, die von dem Versicherten entweder bis zum Todesfall oder bis zur Erreichung eines bestimmten Lebensalters, oder so lange der Versicherte nicht invalide ist, gezahlt werden sollen. Der Kapitalwert R berechnet sich selbst aus diskontierten Wahrscheinlichkeiten; die Jahresprämie ist der Quotient aus E und R.



§ 76. Gewinn und Verlust bei der Versicherung.

1. Die Durchführung des Versicherungsprinzips erfordert unter allen Umständen, daß der eine Versicherte durch die Versicherung gewinnt, der andere verliert. Bei der Summenversicherung (Lebensversicherung) gewinnt derjenige, welcher die durchschnittliche Lebensdauer nicht erreicht (wir wählen nur der Kürze und Auschaulichkeit halber diesen Ausdruck ohne Rücksicht auf die mathematische Korrektheit dieses Satzes), und es verliert derjenige, welcher älter wird und mehr an Prämien zahlt, als für die Admassierung des Versicherungskapitals durch eine gleichbleibende Jahresleistung nötig wäre; in der Rentenversicherung gewinnt der langlebige und verliert der kurzlebige. In der Sachversicherung verliert derjenige, welcher die Versicherung überhaupt nicht in Anspruch zu nehmen braucht, weil er keinen Schaden erlitten hat, die geleisteten Prämien.

Nach dem Prinzipe der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung muß der Gewinn des einen durch den Verlust des andern aufgewogen werden; für die Versicherungsgesellschaft (den Versicherer) müssen Gewinn und Verlust sich ausgleichen, wenn die Prämie richtig berechnet ist, d. h. wenn die den Versicherungsfall bedingenden Ereignisse in der gleichen Verteilung eintreten, wie bei der Prämienberechnung auf Grund von Erfahrungs-Wahrscheinlichkeiten angenommen ist.

2. Wenn p die rechnungsmäßige Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines bestimmten Ereignisses (Eintritt des Versicherungsfalles eventuell unter Berücksichtigung der Intensität des Schadens), $q = 1 - p$ die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß der Versicherungsfall nicht eintritt, und die Gesamtzahl aller möglichen Fälle (beteiligte Interessenten, versicherte Objekte) $= \mu$, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in beliebiger Ordnung in m Fällen die Versicherung fällig wird und in $n = \mu - m$ Fällen nicht, gegeben durch

$$W = \binom{\mu}{m} p^m q^n = \frac{\mu!}{m!\,n!} p^m q^n. \tag{3}$$

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten W für die verschiedenen möglichen Kombinationen $\sum W = (p+q)^\mu$ ergibt die Gewißheit 1, daß eine unbestimmte Kombination von m und n eintreten muß.[1]) Der Maximalwert von W entspricht bei genügend großen Zahlen den Werten $m = \mu p$, $n = \mu q$, d. h. die wahrscheinlichste Schadenkombination ist gleich der erwartungsmäßigen; denn $p = \frac{m}{\mu}$ bzw.

1) Näheres vergleiche bei Weber, im zweiten Buche dieses Werkes § 53, 5 ff.

$q = \frac{n}{\mu}$ besagt nur, daß das Maximum der Wahrscheinlichkeit sich dann ergibt, wenn das Verhältnis der Zahl der Versicherungsfälle zur Gesamtzahl der an der Versicherung beteiligten Fälle gleich wird der für den Eintritt des Versicherungsfalles angenommenen Wahrscheinlichkeit, die im allgemeinen auf Grund der Erfahrung a posteriori gewonnen sein wird.

Tritt diese Schadenkombination $m = \mu p$ ein, so hat der Versicherer weder Schaden noch Nutzen; in allen Fällen $m > \mu p$ hat der Versicherer Verlust, in allen Fällen $m < \mu p$ Gewinn. Die Größe des wahrscheinlichen Gewinnes oder Verlustes berechnet sich aus dem Produkt der bei jeder Schadenkombination gegenüber der erwartungsmäßigen Zahl ersparten oder mehr zu zahlenden Versicherungssummen und der der einzelnen Schadenkombination zukommenden Wahrscheinlichkeit ihres Eintretens; d. h. der wahrscheinliche Gewinn oder Verlust ist im Einzelfalle $(\mu p - m)\frac{\mu!}{m!\,n!}p^m q^n$ bzw. $(m - \mu p)\frac{\mu!}{m!\,n!}p^m q^n$, und man kann beweisen, daß

$$(4) \qquad \sum_{m=0}^{m=\mu p - 1}(\mu p - m)\frac{\mu!}{m!\,n!}p^m q^n = \sum_{m=\mu}^{m=\mu p + 1}(m - \mu p)\frac{\mu!}{m!\,n!}p^m q^n.$$

Der wahrscheinliche Gewinn und der wahrscheinliche Verlust, berechnet aus der Gesamtzahl aller möglichen Schadenkombinationen, sind für den Versicherer also gleich. Der wahrscheinliche Gewinn oder Verlust ist stets kleiner als der erwartungsmäßige Schaden, welcher durch den wahrscheinlichsten Versicherungsfall, d. h. durch $m = \mu p$ charakterisiert ist, und sich berechnet durch

$$\mu p \times \binom{\mu}{\mu p} p^{\mu p} \cdot q^{\mu q}.$$

3. Aus den Betrachtungen, welche sich im weiteren Verlaufe der Wahrscheinlichkeitsberechnung bieten, ist bekannt, daß der erwartungsmäßige Fall, bei welchem der Versicherer weder Gewinn noch Verlust haben würde, zwar der wahrscheinlichste aller Kombinationen ist, daß aber mit zunehmender Anzahl der Möglichkeiten (Objekte) es immer unwahrscheinlicher wird, daß gerade diese Kombination und keine andere eintritt. Aber andererseits nimmt die Wahrscheinlichkeit für die extremen Fälle mit zunehmender Zahl der Objekte außerordentlich rasch ab, während die Wahrscheinlichkeit für die mittlere Gruppe der zusammengefaßten Ereignisse, bei welcher für den Versicherer nur ein geringer Gewinn oder Verlust sich ergibt, mit wachsender Zahl der Objekte rasch zunimmt. Die Grenzen der um den erwartungs-



mäßigen Fall gelagerten mittleren Gruppe erweitern sich zwar mit wachsendem Versicherungsbestande, aber immer weniger, und je größer der Versicherungsbestand, eine desto geringere Rolle spielt der Zufall im Versicherungsgeschäft, da die zu erwartenden Gewinne oder Verluste gewisse Grenzen nicht überschreiten werden. Unter der Voraussetzung, daß die Zahl μ der Objekte (im Bernoullischen Theorem: Zahl der Versuche) eine sehr große ist, drückt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Kombinationszahl m zwischen die Grenzen $\mu p \mp \gamma \sqrt{2 \mu p q}$ falle, durch das bekannte Integral aus, welches das Gaußsche Fehlergesetz charakterisiert und zu welchem man mittels der Stirlingschen Formel gelangt.

4. Neben der Bestimmung des rechnungsmäßigen Risikos handelt es sich in der Praxis der Versicherung um die Abschätzung des sogenannten außerrechnungsmäßigen Risikos, welches durch die wahrscheinlichen Abweichungen von den erwartungsmäßigen Schadenkombinationen bedingt ist und für welches der Versicherer Deckung durch Errichtung besonderer „Sicherheitsfonds" sucht. Für die eigentliche Versicherungspraxis spielt die Anwendung der theoretischen Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung in dieser Beziehung indes keine ausschlaggebende Rolle. Der Grund liegt darin, daß die für Berechnung von Versicherungsprämien in Betracht kommenden statistischen Unterlagen je nach dem Materiale, aus dem sie gewonnen sind, erheblich differieren und eigentlich in den seltensten Fällen eine bestimmte Entscheidung darüber getroffen werden kann, welche statistischen Erfahrungszahlen für einen bestimmten Versicherungsbestand am zweckmäßigsten in Anwendung kommen können. Mit anderen Worten: Da die für Wahrscheinlichkeitsrechnungen gebrauchten Unterlagen an sich nur sehr rohe Näherungswerte darstellen und die Sicherheitsfonds einer Gesellschaft nicht nur Reserven für die regulären Schwankungen, sondern für alle außergewöhnlichen Fälle bilden sollen, so hat es wenig Sinn, die verfeinertsten mathematischen Methoden an Stelle einfacher summarischer Erfahrungskoeffizienten zur Anwendung zu bringen.

Wie eingangs schon erwähnt, ist es für die Versicherungspraxis überhaupt überflüssig, die theoretischen Entwicklungen der Wahrscheinlichkeitslehre zu Rate zu ziehen.

Wir werden im folgenden die Hauptformeln der Lebensversicherungsmathematik, als des technisch am meisten durchgebildeten Zweiges der Versicherung, in einfacher Weise entwickeln.

§ 77. Absterbeordnung. Sterbetafel.

1. Für die Berechnung der Prämien bei Lebens- und Rentenversicherungen, welche lange Vertragsdauer voraussetzen, wird von dem Grundsatze ausgegangen, daß der Gesamtwert aller Prämienleistungen gleich sein muß dem Gesamtwert aller an die Versicherten von Seiten des Versicherers (der Gesellschaft) zu leistenden Zahlungen, beide Gesamtwerte auf den gleichen Zeitpunkt (Abschluß des Versicherungsvertrages) bezogen. Für die Berechnung der Gegenwartswerte, um welche es sich übungsgemäß handelt, wäre es also notwendig zu wissen, wie lange der einzelne Versicherte lebt, um die Zahlungen auf beiden Seiten mit dem richtigen Diskontfaktor reduzieren zu können. Da es aber ungewiß, wann der einzelne stirbt, es auch das Versicherungsprinzip erfordert, daß die dem Geschäfte zu grunde liegenden Berechnungen Durchschnittssätze für eine große Zahl von Versicherten darstellen sollen, so bedient man sich in der Lebensversicherungstechnik der sogenannten Sterbetafeln, welche angeben, in welcher Reihenfolge eine Gruppe gleichalteriger Personen (oder gleichzeitig geborener) ausstirbt. Denn für die Bemessung des „Risikos“ ist in der Lebensversicherung das Alter das ausschlaggebende Moment. Diese Sterbetafeln oder richtiger Lebenstafeln geben der Reihe nach an, wie viel von einer Gruppe von x-jährigen Personen das Alter $x+1$, $x+2$, $x+3$ usw. bis zu den höchsten Lebensaltern hin erreichen. Es ist ohne weiteres klar, und die Bevölkerungsstatistik vermag dies durch Spezialuntersuchungen nachzuweisen, daß sich die Sterblichkeit verschiedener Bevölkerungsgruppen je nach ihren Lebensbedingungen, ihrer sozialen Gliederung und nicht minder je nach den äußeren Einflüssen, unter welchen insbesondere die klimatischen Einflüsse verstanden sind, verschieden gestalten, d. h. für eine beliebig ausgewählte Bevölkerungsgruppe würde der tatsächlichen Sterblichkeit innerhalb derselben je eine andere Sterblichkeitstafel oder Absterbeordnung entsprechen. Außerdem ist vorweg zu betonen, daß die Sterblichkeitsverhältnisse bestimmter Bevölkerungsgruppen in verschiedenen Zeitperioden verschieden sind und daß das Problem der Sterblichkeitsmessung, welches darin gipfelt, in einer korrekt berechneten Sterbetafel den wissenschaftlichen Ausdruck für die Absterbeordnung zu finden, nicht in der Weise gelöst werden kann, daß eine aus bestimmten Beobachtungsmaterialien konstruierte Sterbetafel allgemeine Gültigkeit besäße.

Wenn wir eine Sterbetafel vor uns sehen, ist notwendig zu wissen, aus welchem Material d. h. auf Grund welcher Beobachtungen dieselbe gewonnen ist, und der kritische Bearbeiter hat zu entscheiden, für welche Vorausberechnungen, um welche in der Versicherungstechnik

allein es sich handelt, er eine ihm bekannte Sterbetafel zur Anwendung bringen darf, indem er voraussetzt, daß die zu erwartende Sterblichkeit unter der Gruppe der Personen, um welche es sich handelt, analog jener verlaufen werde, für welche die zur Anwendung zu bringende Sterblichkeitstafel den Ausdruck bildet.

2. Die Sterblichkeit einer gewissen Bevölkerungsgruppe vollständig exakt zum Ausdruck zu bringen, würde zur Voraussetzung haben, daß man eine Generation in allen ihren einzelnen Phasen, bis sie ausgestorben ist, wirklich genau beobachten kann. Aber auch wenn man sich mit näherungsweisen Berechnungen von Absterbeordnungen auf Grund indirekten Verfahrens zufrieden gibt, ist es doch in der Praxis kaum möglich, für alle die verschiedenen Bevölkerungsgruppen, welche durch territoriale oder berufliche Gliederung sich unterscheiden, getrennte und nur für diese charakteristische Absterbeordnungen zu berechnen. Einmal steht der Differenzierung der Absterbeordnungen nach den verschiedenen Gesichtspunkten entgegen, daß sich zur Berechnung von Sterbetafeln selbstverständlich nur Beobachtungsreihen eignen, welche dem sogenannten Gesetze der großen Zahlen genügen d. h. aus einem Material gewonnen sind, welches eine genügend große Zahl von Beobachtungsfällen umfaßt. Zweitens kommt in Betracht, daß erfahrungsgemäß die Sterblichkeitsverhältnisse in zeitlicher Beziehung großen Schwankungen unterworfen sind, daß Perioden verhältnismäßig günstiger Sterblichkeit in allen Altersklassen, Berufen und Gegenden mit Perioden ungünstiger Sterblichkeit abwechseln, wofür genügende Erklärungen noch nicht gegeben sind, die aber wahrscheinlich auf den Wechsel klimatischer Einflüsse einerseits und auf den Wechsel der Wohlstandsverhältnisse andererseits zurückführen würden.

Für die praktische Anwendung kommt deswegen nur eine ganz beschränkte Anzahl von Sterbetafeln in Betracht, von welchen wir hauptsächlich zwei Gruppen unterscheiden müssen. Die eine Gruppe umfaßt die Sterbetafeln, welche auf Grund der Erfahrungen der Versicherungsgesellschaften selbst berechnet sind, und darin ihre Eigentümlichkeit haben, daß es sich dabei um die Beobachtung der Sterblichkeit einer auserlesenen Gruppe von Personen handelt, welche bei strenger Untersuchung der Gesundheitsverhältnisse, wie sie bei Versicherungsgesellschaften üblich ist, Aufnahme in die Versicherung gefunden haben.[1]) Bei der zweiten Gruppe von Sterbetafeln fehlt eine

1) Zur Zeit ist eine besondere Kommission mit der Herstellung neuer Sterblichkeitstafeln auf Grund des Materiales der deutschen Lebensversicherungsgesellschaften betraut. Diese sollen für eine Reihe von Risikogruppen getrennt ermittelt werden. Einzelne große Versicherungsgesellschaften haben ihre Er-

Auswahl der Personen, sie gründen auf Beobachtungen, welche auf Grund von Registrierung der allgemeinen Sterblichkeitsverhältnisse gewonnen sind und deshalb zutreffend mit dem Namen Volkssterbetafeln bezeichnet werden.[1]) Sie kommen in der Volksversicherung zur Anwendung.

Wenn man berücksichtigt, daß in der Praxis die Berechnung von Prämien für Lebens- und Rentenversicherungen nicht nur abhängig ist von der Wahl der Absterbeordnung, sondern auch von der Annahme eines bestimmten Zinsfußes und daß schließlich die auf Grund einer bestimmten Sterbetafel und eines bestimmten Zinsfußes berechneten sogenannten Nettoprämien nur die erste Grundlage bilden für die Bemessung der Brutto- oder Tarifprämien, welche den nötigen Zuschlag für die Verwaltungskosten und für den nötigen Unternehmergewinn enthalten und sich naturgemäß in gewisser Beziehung nach den Konkurrenzverhältnissen gestalten, so ist klar, daß die Auswahl der Sterbetafel zwar von großer Wichtigkeit ist, daß aber kleinere Abweichungen in den Absterbeordnungen schließlich bei Festsetzung der Tarifprämien nicht von ausschlaggebender Bedeutung bleiben. Es ist deswegen vom Standpunkt der Praxis ein durchaus berechtigtes Verfahren, wenn man in der Differenzierung der Sterbetafeln nicht zu weit geht, vielmehr möchte es richtig erscheinen, wenn angestrebt wird, daß die Versicherungsgesellschaften möglichst einheitliche Rechnungsgrundlagen zur Anwendung bringen.

3. Eine vollständige Sterblichkeitstafel geht von einer bestimmten Anzahl von Neugeborenen l_0 (etwa 100000) aus und gibt an, wie viele derselben nach $1, 2, \ldots, \omega$ Jahren noch am Leben sind, wobei ω das höchste beobachtete Alter bedeuten mag. Die Zahl der zu Beginn der aufeinanderfolgenden Altersjahre noch am Leben befindlichen

fahrungen zur Herstellung eigener Sterblichkeitstafeln benützt (z. B. Gotha durch Karup). Man unterscheidet neuerdings Aggregats-Selektions- und abgestufte Sterbetafeln. Vgl. hierzu Höckner und Riem in Band VIII der „Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft" Berlin 1908. — Vgl. ferner die dem V. internationalen Kongresse für Versicherungswissenschaft gewidmete Schrift des Kaiserlichen Aufsichtsamtes für Privatversicherung über die gebräuchlichsten Sterblichkeitstafeln der im Deutschen Reiche arbeitenden Lebensversicherungsunternehmungen (Heft XI der Veröffentlichungen des Deutschen Ver. f. Vers.-W., Berlin 1906).

1) Vgl. die Veröffentlichungen des Kaiserlichen Statistischen Amtes (Berlin, Puttkammer und Mühlbrecht): Deutsche Sterbetafel, gegründet auf die Sterblichkeit der Reichsbevölkerung in den 10 Jahren 1871/72 bis 1880/81 nebst Vergleichungen mit anderen Sterbetafeln. Monatshefte zur Statistik des Deutschen Reichs 1887, Heft XI und XII. Eine gekürzte Darstellung siehe im Statischen Jahrbuch für das Deutsche Reich, Jahrgänge 1887, 1888 und 1891. — Deutsche Sterbetafeln für das Jahrzehnt 1891 bis 1900. Mit 6 Tafeln. Berlin 1910, Bd. 200 der Statistik des Deutschen Reichs; siehe auch Jahrbuch 1909.

Personen ist $l_1 l_2 \ldots l_x \ldots l_\omega$. Die Differenz zweier aufeinanderfolgenden Zahlen der ganzen Reihe gibt die Zahl der im Laufe eines Jahres Verstorbenen

$$d_x = l_x - l_{x+1}, \tag{5}$$

wobei zunächst der Einfachheit halber angenommen wird, daß alle d_x am Ende des Jahres gleichzeitig versterben. Das Aussterben der Generation ist gekennzeichnet durch

$$\sum_{x=x}^{x=\omega} d_x = l_x. \tag{5a}$$

Die auf Grund der Erfahrungen von Versicherungsgesellschaften gewonnenen Tafeln, welche auf Beobachtungen über die Sterblichkeit erwachsener Personen beruhen, beginnen eventuell erst mit einem höheren Alter, etwa l_{20}. Ist $l_{20} = 100\,000$, so ist der Vergleich mit einer anderen, mit $l_0 = 100\,000$ beginnenden Tafel durch entsprechende Reduktion aller Zahlen auf einen gemeinsamen Ausgangspunkt mit gleicher Zahl der Lebenden zu bewirken.

Das Aussterben einer Generation, bzw. einer beliebigen gleichalterigen Gruppe von Personen könnte, wie erwähnt, streng genommen nur durch eine auf die ganze Lebensdauer der Einzelnen erstreckten Beobachtung erkannt werden (direkte Methode). Da dies praktisch undurchführbar ist, bedient man sich der sogenannten indirekten Methoden; man verfolgt nicht eine Generation, sondern ermittelt für eine sich aus allen Lebensaltern zusammensetzende Bevölkerungsgruppe zum gleichen Zeitpunkte die Sterblichkeitsverhältnisse für jede Altersgruppe und berechnet so, wie eine ideelle Generation aussterben würde, wenn diese Sterblichkeitsverhältnisse auf sie Anwendung fänden.

4. Man versteht unter p_x oder der Erlebenswahrscheinlichkeit, die Wahrscheinlichkeit für einen $x$jährigen nach einem Jahre noch zu leben, unter q_x oder der Sterbenswahrscheinlichkeit, die Wahrscheinlichkeit innerhalb des Jahres zu sterben:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \tag{6a}$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = 1 - p_x. \tag{6b}$$

Bezeichnet ferner p_x^n die Wahrscheinlichkeit, daß eine x jährige Person nach n Jahren noch am Leben ist, q_x^n die Wahrscheinlichkeit, daß sie innerhalb der nächsten n Jahre verstirbt, so ist

$$p_x^n = \frac{l_{x+n}}{l_x} \tag{7a}$$

und

$$q_x^n = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - p_x^n. \tag{7b}$$

Die Sterbetafeln sind nun derart gewonnen, daß auf Grund von Beobachtungen festgestellt wird, wie viele Personen aus einer gegebenen Zahl

gleichalteriger Personen innerhalb eines Jahres verstorben sind, d. h. es werden zunächst die Sterbenswahrscheinlichkeiten für jedes Lebensalter festgestellt. Indem man dann für das zu wählende Ausgangsalter die Zahl der Lebenden beliebig annimmt, zumeist ($l_0 = 100000$) wird die Absterbeordnung durch die Rekursionsformel $l_{x+1} = l_x(1 - q_x)$ berechnet. Die empirisch gewonnenen Zahlen der Sterbenswahrscheinlichkeiten werden vorher mittelst graphischer Methoden oder nach den Regeln der Ausgleichungsrechnung „ausgeglichen", um die auffälligen, auf zufälligen Schwankungen beruhenden Ungleichheiten zu eliminieren und eine Stabilität der Reihe, wie sie der Theorie entspricht, herbeizuführen.[1])

Die mathematische Statistik hat sich von jeher damit beschäftigt, für das Gesetz der menschlichen Sterblichkeit, wie es sich durch die Absterbeordnung in Form einer ausgeglichenen Sterbetafel darstellt, einen mathematischen Ausdruck (die biometrische Funktion) zu finden.

Von den biometrischen Funktionen eignen sich am besten insbesondere zur geometrischen Darstellung des Sterblichkeitsverlaufs (Sterblichkeitskurven) die Zahlen der Überlebenden l_x und die Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x. Der erste, welcher eine Hypothese über den Verlauf des Absterbens aufstellte, war De Moivre[2]); er nahm an, daß die Reihe der Zahlen der Überlebenden vom 12. bis zum 86. Jahre (Lebensende) eine arithmetische Progression mit konstanter Differenz bilde. Von den späteren Versuchen sind die Formeln von B. Gompertz und Makeham besonders bekannt geworden. Der Grundgedanke des ersteren ist der, daß die Sterbensintensität im Alter x (Abnahme in der Zahl der Überlebenden bei kleinstem Alterszuwachs im Verhältnis zur Zahl der Überlebenden) mit dem Alter nach geometrischer Progression wachse; Makeham fügt eine vom Alter unabhängige Konstante hinzu. So ist die Gompertz-Makehamsche Formel[3]) entstanden:

$$(8\text{a}) \qquad l_x = k \cdot s^x g^{c^x} \quad \text{und} \quad (8\text{b}) \qquad p_x = s g^{c^x(c-1)}.$$

Wittstein[4]) hat selbständig eine andere konstruiert:

$$(9) \qquad q_x = a^{-(M-x)^n} + \frac{1}{m}(a^{-mx})^n.$$

1) Vgl. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. Leipzig, 1903.

2) Treatise of annuities on Lives, London 1725.

3) Vgl. auch Rosmanith, Die verschiedenen Methoden der Anwendung der Gompertz-Makehamsche Formel (Mitteilungen des österreichisch-ungarischen Verbandes der Privatversicherungsanstalten. Neue Folge 2. Band 1. Heft).

4) Wittstein, Das mathematische Gesetz der menschlichen Sterblichkeit, Hannover 1883.

Die Konstanten haben bestimmte Bedeutung oder ergeben sich aus der Ausgleichsrechnung. Nach der neueren Anschauung ist es wohl ausgeschlossen, eine Formel zu finden, die allen Beobachtungsweisen sich gleich gut anpaßt. Besondere Beachtung unter den mechanischen Ausgleichungsmethoden hat die Formel von Woolhouse gefunden. Wegen der Einzelheiten muß auf die ausführlicheren Lehrbücher (Czuber a. a. O. usw.) und die dort angegebenen Quellenwerke verwiesen werden.[1])

5. Neben der Zahl der Überlebenden und der Sterbenswahrscheinlichkeiten für jedes Alter geben die gebräuchlichen Absterbeordnungen gewöhnlich noch eine andere Zahl, welche für den Verlauf der Sterblichkeit in der betreffenden Bevölkerungsgruppe charakteristisch ist, nämlich für jedes Alter die sogenannte mittlere Lebensdauer, worunter die fernere Lebenserwartung verstanden ist. Verfolgt man die Personen des Alters x, welche derselben Generation entstammen, bis zu dem Zeitpunkte, in welchem sie das Alter $x+n$ erreichen würden, summiert die innerhalb dieses Intervalles von den einzelnen wirklich durchlebten Zeiträume und dividiert diese Summe durch die Zahl der beobachteten Personen, so heißt der Quotient d. h. der auf eine Person entfallende Anteil der von allen durchlebten Zeit, die mittlere Lebensdauer der $x$jährigen bis zum Alter $x+n$. Da von l_x im Anfang des folgenden Jahres nur l_{x+1} übrig sind und die Gestorbenen als im Anfang des zweiten Jahres abgegangen angesehen werden, so haben l_x Personen 1 Jahr durchlebt, ebenso l_{x+1} ein weiteres Jahr usw. Es ist also die mittlere Lebensdauer innerhalb der nächsten n Jahre

$$\lambda_x^{x+n} = \frac{l_x + l_{x+1} + \cdots + l_{x+n-1}}{l_x} = \frac{\sum\limits_{x=x}^{x=x+n-1} l_x}{l_x}. \tag{11}$$

Man kann auch so rechnen: Die im ersten Jahre versterbenden leben ein Jahr, die im zweiten Jahr versterbenden zwei Jahre, die im n^{ten} Jahre versterbenden $n d_{x+n-1}$, und außerdem hat der Rest l_{x+n} die vollen n Jahre durchlebt, es ist also auch:

$$\lambda_x^{x+n} = \frac{d_x + 2d_{x+1} + 3d_{x+2} + \cdots + n d_{x+n-1} + n l_{x+n}}{l_x} \tag{11a}$$

$$\lambda_x^{x+n} = \frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=n} \alpha \cdot d_{x+\alpha-1} + n l_{x+n}}{l_x}. \tag{11b}$$

1) Vgl. auch den Aufsatz von M. Brendel und A. Loewy. „Die in Deutschland angewandten Methoden zur Ausgleichung von Sterbetafeln" in dem II. Bande der Schriften des fünften internationalen Kongresses für Versicherungswissenschaft Berlin, 1906.

Da aber $l_{x+n} = l_{x+n-1} + d_{x+n-1}$ usw., so erweisen sich (11a) und (11b) ohne weiteres als identisch.

Ist ω das höchste in der Sterbetafel vorkommende Lebensalter $(x + n = \omega)$, so ist

$$\begin{aligned} l_\omega &= d_\omega \\ l_{\omega-1} &= d_\omega + d_{\omega-1} \\ l_{\omega-2} &= d_\omega + d_{\omega-1} + d_{\omega-2} \\ l_0 &= d_\omega + d_{\omega-1} + d_{\omega-2} + \cdots + d_0. \end{aligned}$$

Die mittlere Lebensdauer (für $x + n = \omega$) stellt sich dann dar als die Summe aller Zahlen der Überlebenden, dividiert durch die Anfangszahl der Lebenden

(12) $$\lambda_x{}^\omega \text{ oder kurz } \lambda_x = \frac{\sum l_x}{l_x} = \frac{\sum l_x}{\sum d_x},$$

so daß speziell für die Neugeborenen die mittlere Lebensdauer (Lebensdauer einer Generation) als die Summe aller aufeinander folgenden Zahlen der Lebenden der Sterbetafel dividiert durch den ursprünglichen Bestand der Generation ausgedrückt wird. Wir haben bisher angenommen, daß die Todesfälle gleichzeitig gegen Ende des Jahres eintreten; läßt man dieselben zu Beginn des Jahres erfolgen, so wäre $\lambda_x' = \frac{\sum l_{x+1}}{l_x}$; denkt man sie sich über das Jahr gleichmäßig verteilt, oder näherungsweise auf die Mitte des Jahres fallend, so wird

(12a) $$\lambda_x = \frac{\sum l_x}{l_x} - \tfrac{1}{2} \quad \text{oder (12b)} \quad \lambda_x' = \frac{\sum l_{x+1}}{l_x} + \tfrac{1}{2}.$$

Neben der mittleren Lebensdauer wird die künftige wahrscheinliche Lebensdauer ermittelt. Man versteht darunter die Zeit, in der die Hälfte der Personen gleichen Alters gestorben sind. Die wahrscheinliche Lebensdauer ist sehr leicht aus den Tabellen zu finden $(l_{x+n} = \frac{1}{2} l_x)$, aber sie ist wenig brauchbar. Denn sie ist unabhängig von dem Gange der Sterblichkeit zwischen den Altern x und $x + n$, innerhalb deren Grenzen insgesamt die Hälfte der ursprünglich Lebenden verstorben ist, während bei der mittleren Lebensdauer die Sterblichkeit jedes Altersjahres zum Ausdruck kommt. Nur wenn das Absterben gleichförmig erfolgte, würden die mittlere und die wahrscheinliche Lebensdauer gleich sein; nach den Tabellen ist die mittlere in den ersten Jahren des Lebens größer, nachher gewöhnlich kleiner als die wahrscheinliche.

6. Die Sterbetafel bringt gleichzeitig den Altersaufbau einer stationären Bevölkerung zum Ausdrucke: wenn die Sterblichkeit



nach dieser Tafel verläuft und jedes Jahr l_0 Neugeborene hinzutreten, bleibt der Bevölkerungsstand immer der durch die Überlebenden der Absterbeordnung gegebene.

Die tatsächliche Bevölkerung zeigt natürlich nicht diesen streng pyramidenförmigen Aufbau; letzterer ist namentlich durch Zu- und Abwanderungen beeinflußt, ebenso wie der Versicherungsbestand einer Gesellschaft fortgesetzten Änderungen unterworfen ist.[1])

Für die stationäre Bevölkerung gelten gewisse Relationen, auf die wir hier nicht näher eingehen, die aber angedeutet sein mögen: u. a. ist die mittlere Lebendauer gleich dem durchschnittlichen Sterbealter und gleich der Geburtsziffer, welche angibt auf wie viel Lebende eine Geburt kommt und gleich der Sterbeziffer, welche angibt, auf wie viel Lebende ein Todesfall kommt (das Durchschnittsalter sämtlicher zu gleicher Zeit lebenden Personen ist aber von diesen vier Zahlen verschieden). Der reziproke Wert der mittleren Lebensdauer oder der Sterbekoeffizient, $\frac{\sum d_x}{\sum l_x}$, kann in der stationären Bevölkerung als der Ausdruck der Gesamtsterblichkeit genommen werden. Beobachtet man also in einer beliebigen Bevölkerungsgruppe die Sterbenswahrscheinlichkeiten jeder Altersklasse und konstruiert auf Grund der letzteren eine Sterbetafel, so ist die Reziproke der hieraus berechneten mittleren Lebensdauer der Neugeborenen ein Ausdruck für das Gesamtniveau der beobachteten Sterblichkeit. Die hier angedeuteten Probleme, welche in der mathematischen Bevölkerungsstatistik analytisch näher behandelt werden, sind für die Praxis der Versicherungsrechnung meist ebenfalls ohne Belang.

§ 78. Die verschiedenen Kombinationen von Renten- und Lebensversicherungen auf das Leben einer Person.

1. Die Prämienberechnungen für die verschiedenen Arten der Lebens und Rentenversicherungen setzen die Betrachtung der durch die Sterbe- bzw. Lebenstafeln gegebenen Zahlenreihen zwischen beliebigen Altersabschnitten voraus. Der innere Zusammenhang zwischen der

1) Über die einschlägigen Fragen vgl. u. a.: Zillmer, Über die Geburtsziffer, Sterbeziffer, das durchschnittliche Sterbealter und den Zusammenhang dieser Zahlen mit der mittleren Lebensdauer in Masius, Rundschau der Versicherungen 1863.

Knapp, Über die Ermittlung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Bevölkerungsstatistik. Leipzig 1868.

Lexis, Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik, Jena 1893.

v. Bortkiewicz, Die mittlere Lebensdauer, Jena 1893.

Lebens- und Rentenversicherung wird dadurch charakterisiert, daß man bei der Rentenversicherung immer mit der Zahl der Überlebenden, bei der Lebensversicherung, d. h. genauer gesagt, Sterbensversicherung mit der Zahl der in den einzelnen Jahren Verstorbenen zu rechnen hat. Geht man von einem bestimmten Lebensalter aus, so heißt es:

I. a) Bei der einfachen Rentenversicherung: Es wird ein bestimmter Betrag gezahlt an die im Lebensalter $x+1$, $x+2$ usw. noch am Leben befindlichen Versicherten (postnumerando-Rente). Erhalten die l_x Versicherten sofort eine Rente, so spricht man von der pränumerando-Rente.

b) Bei der reinen Todesfallversicherung: Es wird ein bestimmter Betrag gezahlt an die Hinterbliebenen der in nacheinander folgenden Jahren verstorbenen Personen d_x, d_{x+1}, d_{x+2} usw. Dabei ist angenommen, daß die Sterbefallsummen am Ende des betreffenden Lebensjahres gleichzeitig gezahlt werden.[1])

II. Wird die Zahlung eine gewisse Reihe von Jahren hindurch zunächst nichtgeleistet, sondern beginnt sie erst beim Alter $x+n$, so hat man

a) eine aufgeschobene Rentenversicherung, welche geleistet wird an die Überlebenden l_{x+n}, l_{x+n+1} usw. (pränumerando) oder l_{x+n+1}, $l_{x+n+2}+\cdots$ usw. (postnumerando).

b) Eine aufgeschobene Lebensversicherung, welche gezahlt wird an die Hinterbliebenen der Verstorbenen d_{x+n}, d_{x+n+1} usw.

In beiden Fällen spricht man von einer Versicherung mit Karenzzeit in dem Sinne, daß der versicherte Rentenbetrag oder die versicherte Sterbegeldsumme innerhalb dieser Karenzzeit nicht zur Auszahlung gelangt, d. h. bei der aufgeschobenen Rente erhalten die in den ersten n Jahren Verstorbenen überhaupt nichts, und die diese Karenzzeit Überlebenden treten erst nach Ablauf derselben in den Genuß einer Rente; bei der aufgeschobenen Lebensversicherung tritt eine Leistung der Gesellschaft nicht ein, sofern der Tod eines Versicherten innerhalb der ersten n Jahre erfolgt.

III. Beginnen die vertragsmäßigen Leistungen der Gesellschaft zwar nach Abschluß des Versicherungsgeschäftes (Alter der Versicherten x), sind dieselben jedoch nicht bis zu den höchsten Lebensaltern gewährleistet, sondern nur bis zum Ablauf eines bestimmten Lebensalters $(x+m)$, so spricht man

1) An Stelle der nach Gleichung 5 festgesetzten Bezeichnung $l_x - l_{x+1} = d_x$ findet man in einzelnen Lehrbüchern auch die Bezeichnung $l_x - l_{x+1} = d_{x+1}$.

a) von aufhörenden Renten, welche gezahlt werden an die Überlebenden

$$l_x, l_{x+1}, \ldots, l_{x+m-1} \text{ (pränumerando)}$$

oder

$$l_{x+1}, l_{x+2}, \ldots, l_{x+m} \text{ (postnumerando).}$$

b) Von einer kurzen Lebensversicherung, welche gezahlt wird an die Hinterbliebenen der Verstorbenen

$$d_x, d_{x+1}, \ldots, d_{x+m-1}.$$

IV. Beginnen die vertragsmäßigen Leistungen nicht zur Zeit des Versicherungsabschlusses (Alter x), sondern in einem späteren Lebensalter des Versicherten $(x + n)$, und werden dieselben nicht bis zu den höchsten Lebensaltern garantiert, sondern nur bis nach Ablauf eines beliebigen höheren Lebensalters $(x + m)$, so spricht man von einer aufgeschobenen temporären Renten- oder Lebensversicherung und zwar

a) Von einer um n Jahre aufgeschobenen und auf $m - n$ Jahre begrenzten Rente, welche gezahlt wird an die Überlebenden

$$l_{x+n}, l_{x+n+1} \text{ usw. } \ldots\ l_{x+m-1} \text{ (pränumerando)}$$

oder

$$l_{x+n+1}, l_{x+n+2} \text{ usw. } \ldots\ l_{x+m} \text{ (postnumerando).}$$

b) Von einer kurzen auf die Dauer von $m - n$ Jahren begrenzten Lebensversicherung mit einer Karenzzeit von n Jahren, welche bezahlt wird an die Hinterbliebenen der Verstorbenen

$$d_{x+n}, d_{x+n+1}, \ldots, d_{x+m-1}.$$

Wenn man die Formeln für die letztgenannten Versicherungsmodalitäten entwickelt hat, sind die vorhergehenden nur Spezialfälle, welche dadurch bestimmt sind, daß entweder $n = 0$ oder $x + m = \omega$, wo ω das höchste Lebensalter bezeichnet.

Die Form der Rentenversicherung enthält implizite eine spezielle Versicherungsform, welche gewöhnlich unberechtigterweise dem eigentlichen Lebensversicherungsgeschäfte zugerechnet wird, nämlich die Form der sogenannten Erlebensversicherung. Während bei der Todesfallversicherung ein Kapital zur Auszahlung gelangt für den Fall des Eintritts des Todes des Versicherten, ist bei der Erlebensversicherung ein Kapital zahlbar für den Fall der Versicherte ein bestimmtes Lebensalter erreicht, und das Kapital wird nicht ausgezahlt an die Hinterbliebenen der vor Ablauf dieses bestimmten Lebensalters Verstorbenen, d. h. die im Alter x auf das Alter $x + m$ abgeschlossene Erlebensversicherung wird gezahlt an die Überlebenden l_{x+m}. Man

sieht hieraus, daß die Rentenversicherung eigentlich nichts anderes ist, als eine Summe von Erlebensversicherungen, die einzeln fällig werden, wenn der Versicherte das Alter $x + 1, x + 2, \cdots, x + m$ erreicht.

Die Form der reinen Lebensversicherung (eigentlich Sterbensversicherung) und der Erlebensversicherung finden sich kombiniert in der sogenannten gemischten Lebensversicherung, welche gegenwärtig die am meisten gebräuchliche Form der Alters- und Reliktenversorgung bildet. Die gemischte oder abgekürzte Lebensversicherung, auch Alternativversicherung genannt, gewährleistet dem Versicherten die Auszahlung eines bestimmten Kapitals für den Fall derselbe ein bestimmtes Lebensalter $(x + m)$ erreicht oder aber früher verstirbt, d. h. die Versicherung wird, wie man sich ausdrückt, ausbezahlt im Fall des Todes, spätestens bei Erreichung eines bestimmten Lebensalters. Diese Versicherung läßt sich zerlegen in eine kurze Todesfallversicherung, welche ausbezahlt wird an die Hinterbliebenen der Verstorbenen $d_x, d_{x+1}, \ldots, d_{x+m-1}$ und außerdem an die Überlebenden l_{x+m}.

Die Alternativversicherung kann auch eine aufgeschobene sein, d. h. für die Auszahlung der Todesfallversicherung kann eine Karenzzeit von n Jahren bestimmt sein, so daß die gemischte Versicherung mit Karenzzeit zur Auszahlung kommt an die Hinterbliebenen der Verstorbenen $d_{x+n}, d_{x+n+1}, \ldots, d_{x+m-1}$ und an die Überlebenden l_{x+m}.

Selbstverständlich lassen sich noch weitere beliebige Kombinationen bilden, die praktisch mehr oder weniger Bedeutung haben können, indem man eine beliebige Gruppe von l_x mit einer beliebigen Gruppe von d_x kombiniert, z. B. könnte man auch eine gemischte Versicherung in der Weise abschließen, daß ein bestimmtes Kapital fällig wird für den Fall der Tod zwischen dem Alter $x + n$ und $x + m$ eintritt und daß außerdem ein bestimmter Betrag fällig wird, wenn der Versicherte eine bestimmte Periode etwa vom Alter $x + n'$ bis zum Alter $x + m'$ durchlebt. In der Praxis findet man Kapitalversicherungen auf den Todesfall mit Bonifikationen, die bei Erreichung eines bestimmten Lebensalters ausbezahlt werden; in der Rentenversicherung kann Prämienrückgewähr ohne Zinsen für den Fall daß der Tod vor dem Rentenbezug eintritt, vereinbart sein usw. Die Feststellung der statistischen Grundlagen für die verschiedenen Versicherungsmodalitäten kann nach den obigen Ausführungen keinerlei Schwierigkeiten bieten.

§ 79. Rechnungsgrundlagen.

1. Jede Leistung der Gesellschaft an eine nach der Absterbeordnung gegebene Zahl von Überlebenden wird mit ihrem Werte zur Zeit des Abschlusses der Versicherung abzuschätzen, d. h. entsprechend der Zahl der Jahre, die zwischen dem Zeitpunkte des Abschlusses der Ver-

sicherung und den Fälligkeitsterminen der Einzelbeträge liegen, zu diskontieren sein. Es tritt also die Wahl des Zinsfußes als bestimmendes Moment für die Prämienberechnung hinzu. Eine spätere Leistung an l_{x+n} Überlebende ist mit $l_{x+n} \cdot v^n$ zu bewerten, wenn v den Diskontfaktor im Sinne der Zinseszinsrechnung darstellt. Eine Leistung an die Hinterbliebenen der nach Umlauf von n Jahren Verstorbenen, welche als erst am Jahresschlusse fällig gedacht wird, ist mit $d_{x+n} \cdot v^{n+1}$ zu bewerten. Die Ausrechnung der entsprechenden Summenformeln vereinfacht sich wesentlich, wenn man allgemein statt $l_{x+n} \cdot v^n$ schreibt

$$\frac{l_{x+n} \cdot v^{x+n}}{v^x}$$

und statt

$$d_{x+n} \cdot v^{n+1} = \frac{d_{x+n} \cdot v^{x+n+1}}{v^x}.$$

Die Produkte $l_y \cdot v^y$ oder $d_y \cdot v^{y+1}$ nennt man die auf die Geburtszeit diskontierten Zahlen der Lebenden oder Toten des Alters y; sie stellen bestimmte, für eine Absterbeordnung bei gegebenem Zinsfuße ein für allemal festgelegte Rechnungselemente dar, deren Anwendung die Ausrechnung der in der Prämienberechnung auftretenden Summenformeln wesentlich erleichtert. In der neuen Schreibweise ist die diskontierte Zahl der Lebenden:

$$(13) \qquad D_x = l_x \cdot v^x$$

und die diskontierte Zahl der Toten:

$$(14) \qquad C_x = d_x \cdot v^{x+1}.$$

2. Bei Herstellung der Tabellenwerke[1]) werden dann noch die sämtlichen diskontierten Zahlen der Lebenden und Toten vom Schlusse der Sterblichkeitstafel an rückwärts aufaddiert, und man definiert üblicher Weise:

$$(15) \qquad N_x = D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \cdots + D_\omega = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\omega-x} D_{x+\alpha},^{2)}$$

1) Ohne die Benützung der im folgenden entwickelten Formeln und der ausführlichen Tabellenwerke gestaltet sich die Rechnung im Einzelfalle sehr umständlich. Man verfolge diese bei: Broecker, Die Grundzüge der Lebensversicherungstechnik in gemeinverständlicher Darstellung. Berlin, 2. Aufl. 1906.

2) Vielfach berechnet man auch die Summe der diskontierten Zahlen der Lebenden von dem Alter x an in der Weise, daß $\mathsf{N}_x = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\omega-x} D_{x+\alpha} = D_x + N_x$ in die Rechnung eingeführt wird. Statt N_{x-1} schreibt man dann N_x wie Seite 444/5.

Sterbetafel und

der 23 deutschen Lebensversicherungsgesellschaften für normal versicherte Männer

Alter	Anzahl der Lebenden	Sterbenswahrscheinlichkeit	Mittlere Lebensdauer	Diskontierte Zahlen der Lebenden	Diskontierte Zahlen d. Gestorbenen	Summe der diskontierten Zahlen der Lebenden	Summe der diskontierten Zahlen der Gestorbenen
x	l_x	q_x	λ_x	D_x	C_x	N_x	M_x
17	102 787	0.0088435	41.59	57 273.31	489.3702	1 195 728.59	16 838.0363
18	101 878	0.0091875	40.96	54 847.15	486.8657	1 138 455.28	16 348.6661
19	100 942	0.0093321	40.34	52 505.56	473.4171	1 083 608.13	15 861.8004
20	100 000	0.0091900	39.71	50 256 59	446.2397	1 031 102.57	15 388.3833
21	99 081	0.0091642	39.08	48 110.85	425.9887	980 845.98	14 942.1436
22	98 173	0.0090351	38.43	46 057.92	402.0643	932 735.13	14 516·1549
23	97 286	0.0088502	37.78	44 098.34	377.0811	886 677.21	14 114.0906
24	96 425	0.0086596	37.11	42 230.01	353.3277	842 578.87	13 737.0095
25	95 590	0.0085365	36.43	40 448.62	333.6116	800 348.86	13 383.6818
26	94 774	0.0084833	35.74	38 747.18	317.5898	759 900.24	13 050.0702
27	93 970	0.0084814	35.04	37 119.30	304.1785	721 153.06	12 732.4804
28	93 173	0.0085325	34.34	35 559.88	293.1548	684 033.76	12 428.3019
29	92 378	0.0086601	33.63	34 064.22	285.0227	648 473.88	12 135.1471
30	91 578	0.0088231	32.92	32 627.26	278.1382	614 409.66	11 850.1244
31	90 770	0.0090118	32.21	31 245.79	271.9548	581 782.40	11 571.9862
32	89 952	0.0092383	31.49	29 917.11	267.0425	556 536.61	11 299.9278
33	89 121	0.0094366	30.78	28 638.38	261.1104	520 619.50	11 032.8920
34	88 280	0.0096964	30.07	27 408.83	256.7802	491 981.12	10 771.7816
35	87 424	0.0099858	29.36	26 225·18	253.0239	464 572.29	10 515.0014
36	86 551	0.0102714	28.65	25 085.31	248.9481	438 347.11	10 261.9775
37	85 662	0.0105765	27.94	23 988.07	245.1291	413 261.80	10 013.0294
38	84 756	0.0109491	27.24	22 931.74	242.5908	389 273.73	9 767.9003
39	83 828	0.0113327	26.53	21 913.69	239.9439	366 341.99	9 525.3095
40	82 878	0.0117648	25.83	20 932.70	237.9306	344 428.30	9 285.3656
41	81 903	0.0122828	25.13	19 986.90	237.1938	323 495.60	9 047.4350
42	80 897	0.0127940	24.44	19 0[illegible]3.82	235.7791	303 508.70	8 810.2412
43	79 862	0.0133105	23.75	18 193.08	233.9687	284 434.88	8 574.4621
44	78 799	0.0138580	23.06	17 343.84	232.2238	266 241.85	8 340.4934
45	77 707	0.0143745	22.38	16 525.11	229.5076	248 898.01	8 108.2696
46	76 590	0.0148844	21.70	15 736.79	226.3125	232 372.99	7 878.7620
47	75 450	0.0154937	21.02	14 978.31	224.2218	216 636.11	7 652.4495
48	74 281	0.0162087	20.34	14 247.58	223.1255	201 657.80	7 428.2277
49	73 077	0.0170505	19.67	13 542.64	223.1005	187 410.22	7 205.1022
50	71 831	0.0181398	19.00	12 861.58	225.4169	173 867.58	6 982.0017
51	70 528	0.0193115	18.35	12 201.23	227.6558	161 006.00	6 756.5848
52	69 166	0.0206026	17.70	11 560.97	230.1317	148 804.77	6 528.9290
53	67 741	0.0219955	17.06	10 939.89	232.4917	137 243.80	6 298.7973
54	66 251	0.0234864	16.43	10 337.45	234 5796	126 303.91	6 066.3056
55	64 695	0.0250560	15.81	9 753.295	236.1149	1 115 966.463	5 831.7260

Rechnungsgrundlagen

und Frauen mit vollständiger ärztlicher Untersuchung. Zinsfuß $3^1/_2$ %. (Nach Riem).

Alter	Anzahl der Lebenden	Sterbenswahrscheinlichkeit	Mittlere Lebensdauer	Diskontierte Zahlen der Lebenden	Diskontierte Zahlen d. Gestorbenen	Summe der diskontierten Zahlen der Lebenden	Summe der diskontierten Zahlen der Gestorbenen
x	l_x	q_x	λ_x	D_x	C_x	N_x	M_x
56	63 074	0.0268098	15.21	9 187.359	237.9817	106 213.168	5 595.6111
57	61 383	0.0286561	14.61	8 638.694	239.1804	97 025.809	5 357.6294
58	59 624	0.0307259	14.03	8 107.385	240.6827	88 387.115	5 118.4490
59	57 792	0.0328765	13.46	7 592.540	241.1752	80 279.730	4 877.7663
60	55 892	0.0353539	12.90	7 094.612	242.3402	72 687.190	4 636.5911
61	53 916	0.0377995	12.35	6 612.355	241.4918	65 592.578	4 394.2509
62	51 878	0.0404218	11.82	6 147.258	240.0803	58 980.223	4 152.7591
63	49 781	0 0431691	11.30	5 699.302	237.7136	52 832.965	3 912.6788
64	47 632	0.0461245	10.78	5 268.857	234.8050	47 133.663	3 674.9652
65	45 435	0.0494333	10.28	4 855.879	231.9244	41 864.806	3 440.1602
66	43 189	0.0533006	9.79	4 459.744	229.6687	37 008.927	3 208.2358
67	40 887	0.0575978	9.31	4 079.263	227.0112	32 549.183	2 978.5671
68	38 532	0.0622599	8.85	3 714.308	223.4323	28 469.920	2 751.5559
69	36 133	0.0673069	8.40	3 365.269	218.8462	24 755.612	2 528.1236
70	33 701	0.0727575	7.97	3 032.622	213.1845	21 390.343	2 309.2774
71	31 249	0.0785625	7.56	2 716.885	206.2274	18 357.721	2 096.0929
72	28 794	0.0846010	7.16	2 418.782	197.7114	15 640.836	1 889.8655
73	26 358	0.0912816	6.78	2 139.276	188.6730	13 222.054	1 692.1541
74	23 952	0.0985304	6 41	1 878.261	178.8075	11 082.778	1 503.4811
75	21 592	0.1064746	6.05	1 635.937	168.2955	9 204.517	1 324.6736
76	19 293	0.1145493	5.72	1 412.321	156.3095	7 568.580	1 156.3781
77	17 083	0.1231048	5.39	1 208.252	143.7117	6 156.259	1 000.0686
78	14 980	0.1323097	5.08	1 023.681	130.8627	4 948.007	856.3569
79	12 998	0.1421757	4.77	858.2007	117.8893	3 924.3268	725.4942
80	11 150	0 1551570	4.48	711.2908	106.62953	3 066.1261	607.6049
81	9 420	0.1697452	4.21	580.6074	95.22253	2 354.8353	500.97537
82	7 821	0.1845033	3.97	465.7507	83.02661	1 774.2279	405.75284
83	6 378	0.1981812	3.76	366.9742	70.26804	1 308.4772	322.72623
84	5 114	0.2111850	3.56	284.2965	58.00885	941.5030	252.45819
85	4 034	0.2221120	3.38	216.6738	46.49837	657.2065	194.44934
86	3 133	0.2278521	3.21	162.8481	35.85058	440.5327	147.95097
87	2 423	0.2335947	3.01	121.4907	27.41987	277.6846	112.10044
88	1 857	0.2380188	2.77	89.96237	20.68861	156.19399	84.68057
89	1 415	0.2431095	2.48	66.23162	63.99196	66.23162	63.99196
90							

Alter	a_x	P_x	A_x	Alter	a_x	P_x	A_x
20	20.5168	1.4924	30.3196	50	13.5184	4.0157	54.2857
30	18.8312	1.9287	36.3200	60	10.2454	6.3788	65.3537
40	16.4541	2.6959	44.5588	70	7.0534	10.7959	76.1479

wobei

(15a) $$N_x = D_{x+1} + N_{x+1}$$

(16) $$M_x = C_x + C_{x+1} + \cdots + C_\omega = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\omega-x} C_{x+\alpha},$$

wobei

(16a) $$M_x = C_x + M_{x+1}.$$

Diese Hilfszahlen genügen für einfache Prämienberechnungen.

Als Beispiel sind Seite 444/5 diese ersten Rechnungsgrundlagen, welche aus dem Material der deutschen Versicherungsgesellschaften gewonnen sind, für den Zinsfuß von $3\frac{1}{2}\%$ mitgeteilt.[1])

§ 80. Einmalige und jährliche Prämien für Versicherungen auf das Leben einer Person.

1. Wenn man nach den oben vorgetragenen Prinzipien die Barwerte der Leistungen der Gesellschaft an die betreffende Gruppe von Überlebenden oder Toten berechnet hat, braucht man den Gesamtwert nur auf die Gesamtzahl der Versicherten l_x zu verteilen, um die einmalige Prämie oder Mise für den einzelnen Versicherten zu finden, mittels deren ein Einkauf in die Versicherung erfolgen kann.

Will man dagegen die Versicherung nicht mit einmaliger Prämienzahlung abschließen, sondern voraussetzen, daß Jahresprämien geleistet werden, so gilt als allgemeines Prinzip, daß, wie eben hinsichtlich der Leistungen der Gesellschaften geschehen ist, nunmehr auch hinsichtlich der Leistungen (der gesuchten Prämien) der Versicherten festgestellt wird, von welcher Reihe von Überlebenden diese Prämienzahlungen jeweils erfolgen. Die Prämienzahlungen der Versicherten können in der Praxis verschieden limitiert sein: bei der Versicherung auf den Todesfall kann bestimmt sein, daß die je am Anfang eines Jahres fälligen Prämien von Beginn der Versicherung bis zum Sterbejahre gezahlt werden, also von den jeweils Überlebenden l_x, l_{x+1}, l_{x+2} usw. bis l_ω, bei der gemischten Versicherung von den Überlebenden $l_x, l_{x+1}, \ldots, l_{x+m-1}$, wenn m die längste Versicherungsdauer, — bei der aufgeschobenen Lebens- oder Rentenversicherung von den Überlebenden $l_x, l_{x+1}, \ldots, l_{x+m-1}$, wenn m die Karenzzeit, — bei der

1) Erste Unterlagen in dem Quellenwerke: Deutsche Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von 23 Lebensversicherungsgesellschaften, Berlin 1883. — Die aus der neuen Deutschen Volkssterbetafel 1891/1900 abgeleiteten Rechnungselemente finden sich vollständig im „Statistischen Jahrbuch für das Deutsche Reich" Jahrgang 1909.

Erlebensversicherung von den Überlebenden $l_x, l_{x+1}, \ldots, l_{x+m-1}$, wenn $x+m$ das zu erreichende Lebensalter usw. Es kann aber auch bestimmt sein, daß die Prämienzahlung nur auf eine kürzere Frist geleistet werden soll, etwa nur von den Überlebenden $l_x, l_{x+1}, \ldots, l_{x+n-1}$ usw. Der Gesamtwert der gleichbleibenden Jahresprämien stellt sich immer als der Kapitalwert gleichbleibender Renten dar und muß der einmaligen Prämie (Einlage, mise) gleich sein.

Die folgenden wichtigsten Formeln[1]) ergeben sich nach obigen Ausführungen ohne weiteres:

2. Einmalige Prämien.

A) Erlebensversicherung, die gezahlt wird, wenn der Versicherte das Alter $x+n$ erlebt:

$$(15)\qquad {}_n\mathrm{E}_x = \frac{l_{x+n}\cdot v^n}{l_x} = \frac{l_{x+n}\cdot v^{x+n}}{l_x\cdot v^x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

B) Leibrente, beginnend nach m Jahren, aufhörend nach $n+m$ Jahren, zahlbar postnumerando an die Überlebenden (fortgesetzte Erlebensversicherung für n Jahre)

$$(16)\qquad {}_{m|n}a_x = \frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=n} l_{x+m+\alpha}\cdot v^{m+\alpha}}{l_x} = \frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=n} l_{x+m+\alpha}\cdot v^{x+m+\alpha}}{l_x\cdot v^x}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=n} D_{x+m+\alpha}}{D_x} = \frac{N_{x+m}-N_{x+m+n}}{D_x}.$$

Als Spezialfälle findet man die um m Jahre aufgeschobene postnumerando, also erstmals nach $m+1$ Jahren zahlbare Leibrente auf Lebenszeit

$$(16\,\mathrm{a})\qquad {}_{m|}a_x = \frac{N_{x+m}}{D_x}$$

und die ohne Aufschub höchstens n Jahre laufende temporäre Leibrente

$$(16\,\mathrm{b})\qquad {}_{|n}a_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}.$$

Der einfachste Fall $m=0$, $x+m+n=\omega$ stellt die einfache, postnumerando zahlbare Leibrente auf Lebenszeit dar, welche kurz

1) Wegen der Bezeichnungsweise vergleiche: Bulletin du comité permanent des Congrès internationaux d'actuaires bzw. den zweiten Band des vom Institute of Actuaries herausgegebenen: Textbook of the Principles of interest, life annuities and assurances etc. New edition, London 1901.

mit a_x bezeichnet wird, nämlich

(16 c)[1] $$a_x = \frac{\sum D_{x+1}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}.$$

Wird die Leibrente pränumerando bezahlt, so ist die aufgeschobene, temporäre Rente allgemein

(17) $${}_{m|n}\mathfrak{a}_x = {}_{m-1|n}a_x = \frac{N_{x+m-1} - N_{x+m+n-1}}{D_x},$$

die aufgeschobene Rente

(17 a) $${}_{m|}\mathfrak{a}_x = \frac{N_{x+m-1}}{D_x},$$

die aufhörende Rente

(17 b) $${}_{|n}\mathfrak{a}_x = \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x}$$

und die einfache sofort beginnende Leibrente auf Lebenszeit ($m = 0$)

(17 c)[1] $$\mathfrak{a}_x = \frac{\sum D_x}{D_x} = \frac{N_{x-1}}{D_x} = \frac{\mathsf{N}_x}{D_x} = a_x + 1.$$

C) Todesfallversicherung, zahlbar im Falle der Tod zwischen dem Alter $x + m$ und $x + m + n$ eintritt:

(18) $${}_{m|n}A_x = \frac{\sum\limits_{\alpha=0}^{\alpha=n-1} d_{x+m+\alpha} \cdot v^{m+\alpha+1}}{l_x} = \frac{\sum\limits_{\alpha=0}^{\alpha=n-1} d_{x+\alpha+m} \cdot v^{x+m+\alpha+1}}{l_x \cdot v^x}$$
$$= \frac{\sum\limits_{\alpha=0}^{\alpha=n-1} C_{x+m+\alpha}}{D_x} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}.$$

Als Spezialfälle findet man die um m Jahre aufgeschobene Lebensversicherung (mit Karenz)

(18 a) $${}_{m|}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}$$

und die ohne Aufschub auf höchstens n Jahre laufende (kurze) Lebensversicherung

(18 b) $${}_{|n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}.$$

Der einfachste Fall $m = 0$, $x + m + n = \omega$ stellt die gewöhliche ein-

1) Zu Formel (16 c) und (17 c): Erfolgt die Zahlung der Jahresrente in n Teilraten, so sind die Barwerte näherungsweise $a_x - \frac{n+1}{2n}$ bzw. $\mathfrak{a}_x - \frac{n-1}{2n}$. Vgl. Zillmer, Mathem. Rechnungen bei Lebens- und Rentenversicherungen, Berlin 1861 (1. Aufl.).

fache Lebensversicherung auf den Todesfall dar:

$$A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + \cdots + C_\omega}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}. \tag{18c}$$

D) Gemischte Versicherung, zahlbar im Falle des Todes, spätestens bei Erreichung eines bestimmten Lebensalters $(x + n)$, soviel wie eine kurze Todesfallversicherung, ergänzt durch eine Erlebensversichung auf das Alter $x + n$:

$$A_{x\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}. \tag{19}$$

3. Eine wichtige Beziehung findet man zwischen der einmaligen Prämie für die Todesfallversicherung A_x und dem Barwert der sofort beginnenden Leibrente auf Lebenszeit in der Formel

$$A_x = 1 - (1 - v)\,\mathfrak{a}_x, \tag{20}$$

welche sich ohne weiteres ergibt, wenn man auf die Grundgleichungen

$$A_x = \{(l_x - l_{x+1})v + (l_{x+1} - l_{x+2})v^2 + \cdots\} : l_x$$

und

$$\mathfrak{a}_x = \{l_x + l_{x+1} \cdot v + l_{x+2} \cdot v^2 + \cdots\} : l_x$$

zurückgeht.

4. Jährliche Prämien[1]). Abgesehen von den Fällen, wo es sich um Kapitaleinlagen zum Erwerb für sofort beginnende Renten handelt, wird im allgemeinen an Stelle der einmaligen Prämie eine jährliche gleichbleibende Prämie gezahlt, welche vom Abschluß der Versicherung bis zu einem beliebigen Zeitpunkte zahlbar, vereinbart werden kann. Bei der Versicherung einer aufgeschobenen Rente (Alterspension) wird im allgemeinen eine Prämie vereinbart werden, welche zu zahlen ist bis zum Beginn des Rentenbezugs bzw. bis zum etwa früher eintretenden Tode; die Prämienzahlung kann aber auch eine abgekürzte sein. Ähnlich wird bei der Todesfallversicherung vielfach eine Beschränkung der Prämienzahlung beliebt. Die jährliche Prämie für eine solche Versicherung findet man, wenn die einmalige Prämie für dieselbe durch den Barwert einer abgekürzten, der Dauer der Prämienzahlung entsprechenden Leibrente

1) Die Formelbezeichnung für die jährlichen Prämien wird nach den internationalen Vereinbarungen so gewählt, daß der Buchstabe P vor die Bezeichnung der einmaligen Prämie der betr. Versicherungskombination gesetzt wird und links von P als Indizes noch die auf die Prämienzahlung bezüglichen Buchstaben treten. Die Bezeichnung wird dadurch ziemlich unübersichtlich; die Definition geschieht deshalb besser in Worten.

dividiert wird. Ist das Alter beim Abschluß der Versicherung x und soll die Prämienzahlung höchstens t mal geleistet werden, so ist dieser Divisor nach Formel (17), wenn man dort $m = 0$ und $m + n = t$ setzt

$$(21) \qquad {}_{|t}a_x = \frac{N_{x-1} - N_{x+t-1}}{D_x}.$$

A) Es ist also beispielsweise die höchstens t mal zahlbare Jahresprämie für eine eventuell nach n Jahren fällige Erlebensversicherung

$$(22) \qquad \frac{{}_nE_x}{{}_{|t}a_x} = \frac{D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+t-1}}$$

B) für eine um m Jahre aufgeschobene Leibrente (pränumerando)

$$(23) \qquad \frac{{}_{m|}a_x}{{}_{|t}a_x} = \frac{N_{x+m-1}}{N_{x-1} - N_{x+t-1}},$$

C) für eine einfache Todesfallversicherung, wenn die pränumerando Jahresprämie zahlbar ist bis zum Tode höchstens t mal (abgekürzte Prämienzahlung)

$$(24) \qquad \frac{A_x}{{}_{|t}a_x} = \frac{M_x}{N_{x-1} - N_{x+t-1}}$$

und wenn die Prämie ohne Beschränkung bis zum Eintritt des Versicherungsfalles zu zahlen ist (einfachste Art der Lebensversicherung)

$$(25) \qquad P_x = \frac{A_x}{a_x} = \frac{M_x}{N_{x-1}}.$$

D) Die Jahresprämie für die gemischte Todesfallversicherung wird, wenn sie höchstens t mal zu zahlen ist ($t < n$)

$$(26) \qquad \frac{A_{x\overline{n}|}}{{}_{|t}a_x} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+t-1}}$$

und wenn $n = t$, zur Zeit die üblichste Form der Lebensversicherung,

$$(27) \qquad P_{x\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}}.$$

5. Führt man in (25) die Formel (20) ein, so ergibt sich für die lebenslängliche Jahresprämie der Todesfallversicherung folgende einfache Ableitung aus dem reziproken Werte des Leibrentenwertes für das gleiche Beitrittsalter:

$$(25\,a) \qquad P_x = \frac{1}{a_x} - (1 - v).$$

Man könnte diese Formel auch ohne Rechnung begrifflich ableiten; denn $\frac{1}{a_x}$ ist die Rente auf Lebenszeit aus dem Kapitale 1, und

$$1 - v = \frac{i}{1+i}$$

die pränumerando-Ewigrente aus dem Kapitale 1; der Betrag P_x wird gezahlt, damit im Todesfalle das Kapital 1 fällig wird.

6. Ähnliche Formeln wie (20) und (25a) gelten auch für die gemischte Versicherung.

§ 81. Kombinationen von Renten- und Lebensversicherungen auf das Leben mehrerer Personen.

1. Handelt es sich um Versicherungen, bei welchen das Leben zweier Personen vom Alter x und u in Frage kommt, so sind ebenso wieder alle möglichen Kombinationen in bezug auf zeitliche Begrenzung des Versicherungsfalles denkbar, wie bei den Versicherungen auf das Leben einer Person. Es treten hinzu die Möglichkeiten, daß ein Versicherungsfall gegeben ist, wenn x bzw. u allein am Leben oder verstorben ist oder wenn beide gleichzeitig leben oder beide gestorben sind, ferner wenn die Reihenfolge des Sterbens in Betracht kommen soll. Diese Kombinationen kommen vor bei Berechnung von Witwenpensionen, Lebensversicherungen für Überlebende, Eherenten, Waisenrenten usw. Für die Berechnungen von sogenannten Überlebensrenten oder Überlebensversicherungen ist zunächst die Berechnung der sogenannten einfachen Verbindungsrente (Rente zahlbar, so lange zwei verbundene Personen gleichzeitig am Leben sind) und der sogenannten einfachen Kapitalversicherung für verbundene Leben, (zahlbar bei Lösung der Verbindung, d. h. beim Tode des Zuerststerbenden) notwendig.

2. Der Gedankengang ist der gleiche wie bei Berechnung der Formeln für einfache Leben. Man denkt sich $l_x \cdot l_u$ Paare (d. h. $l_x \cdot l_u$ $x$jährige und $l_x \cdot l_u$ $u$jährige Personen (Mann, Frau, Sohn, Tochter); nach einem Jahre sind es noch $l_{x+1} \cdot l_{u+1}$ solcher Paare usw. Denn es werden im Laufe des nächsten Jahres aufgelöst: $d_x \cdot l_u$ und $d_u \cdot l_x$ Paare, worunter aber $d_x \cdot d_u$ doppelt gezählt sind, es verbleiben also:

$$l_x \cdot l_u - (l_x - l_{x+1}) \cdot l_u - (l_u - l_{u+1})\, l_x + (l_x - l_{x+1})(l_u - l_{u+1}) = l_{x+1} \cdot l_{u+1}.$$

Die Anzahl der innerhalb des ersten Jahres aufgelösten Paare ist

$$l_x \cdot l_u - l_{x+1} \cdot l_{u+1},$$

der im zweiten Jahre aufgelösten Paare

$$l_{x+1} l_{u+1} - l_{x+2} l_{u+2} \text{ usw.}$$

Analog würden die Formeln für drei verbundene Leben (z. B. bei Versicherung von Waisen oder Doppelwaisen) zu konstruieren sein. Um die Formeln der Rentenversicherungen oder Lebensversichungen für verbundene Leben zu berechnen, hat man die Zahlen der kombinierten Absterbeordnungen entsprechend zu diskontieren und den gesamten Gegenwaıtswert aller Zahlungen der Versicherungsgesellschaft auf die zur Zeit des Versicherungsabschlusses vorhandenen Paare zu verteilen. Es müssen hiernach bei zwei verbundenen Leben die Produkte aus der Zahl der Lebenden bzw. Sterbenden für das eine Alter mit den diskontierten Zahlen bzw. Sterbenden für das andere Alter gebildet werden.

3. Der Kapitalwert der einfachen vorschüssigen Verbindungsrente auf das Leben zweier Personen im Alter x bzw. u, zahlbar solange beide gleichzeitig leben, ist hiernach

$$\text{(28)} \qquad \mathfrak{a}_{x,u} = \frac{\sum l_x \cdot D_u}{l_x \cdot D_u} = \frac{\sum l_u \cdot D_x}{l_u \cdot D_x},$$

wenn $\sum$ die Summe der entsprechenden Produkte bis zum höchsten Alter ω bedeutet. Gewöhnlich bildet man die Produkte aus der Zahl der Lebenden des jüngeren Alters und der diskontierten Zahl der Lebenden des höheren Alters.

Der Wert einer aufgeschobenen Verbindungsrente, die nach n Jahren beginnt, falls dann das Paar noch vollständig ist und solange läuft, wie das Paar vollständig ist, berechnet sich

$$\text{(29)} \qquad {}_{n|}\mathfrak{a}_{x,u} = \frac{\sum l_{x+n} \cdot D_{u+n}}{l_x \cdot D_u} = \frac{\sum l_{u+n} \cdot D_{x+n}}{l_u \cdot D_x}$$

$$= \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{D_{u+n}}{D_u} \cdot \mathfrak{a}_{x+n,\, u+n}$$

$$= \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \frac{l_{u+n}}{l_u} \cdot \mathfrak{a}_{x+n,\, u+n}.$$

Die aufhörende oder temporäre Rente (zahlbar nur innerhalb einer bestimmten Karenzzeit bzw. nur bis zur Auflösung des Paares, wenn diese innerhalb der Karenzzeit erfolgt) ist die Differenz zwischen der einfachen Verbindungsrente und der aufgeschobenen Rente usw. Soll

die Verbindungsrente für ein aus einer x jährigen und einer u jährigen Person bestehendes Paar nicht erlöschen beim Tode der zuerststerbenden, sondern erst beim Tode der zuletztsterbenden, so wird das Resultat das gleiche sein, als wenn man an jede einzelne Person auf Lebenszeit die Rente zahlt und so lange beide gleichzeitig leben, einmal die Rente wieder in Abzug kommt:

$$\mathfrak{a}_{\overline{x,u}} = \mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_u - \mathfrak{a}_{x,u}. \tag{30}$$

Soll die Rente vom Tode des Zuerststerbenden bis zum Tode des Überlebenden nur dann zur Auszahlung kommen, wenn der Zuerststerbende die im Voraus bestimmte Person ist, so ist der Wert einer solchen Rente gleich dem Wert der Leibrente der anderen Person vermindert um die Verbindungsrente (z. B. Witwenpension an die Frau, vom Alter u, wenn der Mann x Jahre alt ist)

$$\mathfrak{a}_{x|u} = \mathfrak{a}_u - \mathfrak{a}_{x,u}. \tag{31}$$

4. Zur Berechnung der jährlichen Prämien werden die einmaligen Prämien bzw. Rentenkapitalwerte durch die der Dauer der Beitragszahlung entsprechenden Rentenwerte dividiert. Im letzteren Beispiel ergibt sich also die bis zur Auflösung des Paares zu zahlende Jahresprämie für eine Witwenpension als

$$P_{x|u} = \frac{\mathfrak{a}_u - \mathfrak{a}_{x,u}}{\mathfrak{a}_{x,u}} = \frac{\mathfrak{a}_u}{\mathfrak{a}_{x,u}} - 1. \tag{32}$$

Analog den für einfache Leben konstruierten Formeln ist die Einlage für die Kapitalversicherung für verbundene Leben, zahlbar beim Tode der Zuerststerbenden der beiden Personen

$$A_{x,u} = 1 - (1 - v) \cdot \mathfrak{a}_{x,u}, \tag{33a}$$

also die pränumerando zahlbare Jahresprämie

$$P_{x,u} = \frac{1}{\mathfrak{a}_{x,u}} - (1 - v), \tag{33b}$$

und wenn die Versicherung beim Tode des Zuletztsterbenden fällig ist,

$$A_{\overline{xu}} = 1 - (1 - v)\{\mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_u - \mathfrak{a}_{x,u}\}$$

$$\text{bzw. } P_{\overline{xu}} = \frac{1}{\mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_u - \mathfrak{a}_{x,u}} - (1 - v).$$

Aus diesen Beispielen geht das Prinzip der Berechnung solcher Versicherungskombinationen zur Genüge hervor; die Berücksichtigung der Einzelheiten, insbesondere auch hinsichtlich der Verteilung der



Sterbefälle beider Personengruppen während eines Jahres würde hier zu weit führen.

5. Eine allgemeine Formel zur Berechnung von Leibrenten auf das Leben mehrerer verbundener Personen[1]) gibt C. J. Malmsten (zur Theorie der Leibrenten in Acta mathematica Bd. 1 (1882)) in folgendem:

Sei $P_{(x_1 x_2 x_3 \ldots x_n)}$ der gegenwärtige Wert einer Lebensrente vom Betrage 1, zahlbar an jedem solchen Jahresschlusse, an welchem n bestimmte Personen, die gegenwärtig das Alter $x_1 x_2 \ldots x_n$ haben, alle noch leben und ${}^vP_{(x_1 x_2 x_3 \ldots x_n)}$ der gegenwärtige Wert einer Rente, die an jedem solchen Jahresschlusse bezahlt werden soll, an welchem von diesen n Personen wenigstens v Personen noch leben, so ist

$$(34) \quad {}^vP_{(x_1 x_2 \ldots x_n)} = \sum_{p=0}^{p=n-v} \{(-1)^p (v+p-1)^p \sum P_{(x_1 x_2 \ldots x_{v+p})}\},$$

worin $\sum P_{x_1 x_2 \ldots x_{v+p}}$ die Summe von denjenigen Funktionen bezeichnet, die man aus $P_{(x_1 x_2 \ldots x_{v+p})}$ erhält, wenn man dann alle möglichen $v+p$ gliedrigen Kombinationen ohne Wiederholung und ohne Verstellung der Größen $x_1 x_2 \ldots x_n$ einsetzt. Für $n=2$, $v=1$ erhält man die obige Formel (30), nämlich

$$(34\text{a}) \qquad {}^1a_{x_1 x_2} = a_{x_1} + a_{x_2} - a_{(x_1 x_2)}$$

für $n=3$, $v=2$

$$(34\text{b}) \qquad {}^2a_{x_1 x_2 x_3} = a_{(x_1 x_2)} + a_{(x_1 x_3)} + a_{(x_2 x_3)} - 2a_{(x_1 x_2 x_3)}$$

§ 82. Invaliditätsversicherung. Andere Kombinationen.

1. Einen besonderen Gegenstand der mathematischen Lebensversicherungstechnik bildet die Invaliditätsversicherung, deren einfachste Anwendung in der Praxis sich mit Berechnung der Beiträge beschäftigt, welche nötig sind, um dem Versicherten bei eintretender Erwerbsunfähigkeit eine lebenslängliche Pension zu sichern. Die Umständlichkeiten der einschlägigen Berechnungen beruhen darin, daß die Höhe der Pensionen nicht von Anfang an feststeht, sondern sich nach dem jeweiligen Verdienste zur Zeit des Eintritts der Invalidität richtet. Die zu schaffenden Rechnungsgrundlagen verlangen die Kombination der Sterbenswahrscheinlichkeiten mit den Invaliditätswahrscheinlichkeiten. Es ist einleuchtend, daß die Feststellung der letzteren auf

1) Vielfach genügen hier Näherungsmethoden; man findet z. B. eine Methode, die Verbindungsrente für drei Personen auf eine solche für zwei Personen zurückzuführen bei Landré, Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung, 2. Aufl., Jena 1901.



Grund der Erfahrung besonderen Schwierigkeiten begegnet und es schwierig ist, für die verschiedenen Berufe genügendes Beobachtungsmaterial zu schaffen. Man stößt in der Praxis mit Vorliebe auf die Anwendung der Invaliditätstafeln, welche in systematischer Weise auf Grund des umfangreichen Materials der deutschen Eisenbahnverwaltungen gewonnen sind. Auch die Knappschaftskassen liefern Massenbeobachtungen. Um die Grundlinien anzudeuten, sei bemerkt, daß zur Konstruktion einer Invaliditätstafel nötig ist: die Kenntnis der am Anfange jeden Jahres in Betracht gezogenen sich in Aktivität befindlichen Personen eines bestimmten Alters, $\mathfrak{A}_x$, die Wahrscheinlichkeit w für diese im Laufe eines Jahres während der Aktivität zu sterben, die Wahrscheinlichkeit w_1 im Laufe des Jahres invalid zu werden, die Wahrscheinlichkeit w_2 für eine x jährige invalide Person im Laufe des Jahres zu sterben. Um die Sterbefälle aus der Zahl der im Laufe des Jahres invalid gewordenen zu berücksichtigen, nimmt man etwa an, daß dieselben durchschnittlich ein halbes Jahr invalid waren. Diese einfachste Annahme führt dazu, daß mutmaßlich $\mathfrak{A}_x w_1 \left(1 - \frac{w_2}{2}\right) = J_x$ Invalide das Ende des Jahres erleben. Dann wäre

$$\mathfrak{A}_{x+1} = A_x(1 - w) - J_x. \tag{35}$$

Jedem der invalid werdenden soll eine Leibrente versichert werden, deren Barwert nach den Regeln der einfachen Leibrentenrechnung sich mit $\mathrm{a}_{x+\dots}$ berechnet. Dabei ist natürlich speziell eine Absterbeordnung für Invalide zu wählen.[1]) Wenn der einmalige Beitrag für jede aktive Person vom Eintrittsalter x für die gleichbleibende Invalidenrente 1 K_x heißt, so muß sein

$$K_x \cdot \mathfrak{A}_x = J_x \cdot \mathrm{a}_x \cdot v + J_{x+1} \cdot \mathrm{a}_{x+1} \cdot v^2 + J_{x+2} \cdot \mathrm{a}_{x+2} \cdot v^3 + \cdots$$

$$K_x = \frac{1}{\mathfrak{A}_x \cdot v^x} \sum J_x \cdot v^{x+1} \cdot \mathrm{a}_x \tag{36}$$

Die unter dem Summenzeichen stehenden Produkte können ein für allemal aus der Invaliditätstafel berechnet werden. $J_x \cdot v^{x+1}$ stellt die diskontierte Zahl der invalidwerdenden im gleichen Sinne dar, wie bei der Lebensversicherung $d_x \cdot v^{x+1}$ die diskontierte Zahl der Toten. Diese diskontierten Zahlen sind mit den Rentenbarwerten für die entsprechenden Alter zu multiplizieren. Ist der Anspruch auf die Invalidenrente ein steigender, d. h. nimmt diese wie bei Beamtenpensionen mit dem Dienstalter zu, so sind diese Barwerte noch mit einem weiteren Faktor der das Steigerungsverhältnis angibt, zu multiplizieren.

1) Hier sind der Kürze halber, da es sich nur um Darstellung des Prinzipes handelt, die Barwerte für Renten nach vollen Lebensjahren eingesetzt. Über die verschiedenen Arten der Berechnung vgl. Spitzer, Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften usw. (Wien, 1881) und die neuere Literatur (S. 456).



2. Die Jahresprämien für eine Invalidenpension berechnen sich nach denselben Grundsätzen, wie früher vorgetragen; der einmalige Beitrag wird in eine Rente vom Betrag der Jahresprämie P_x aufgelöst, wobei die Dauer der Prämienzahlung bestimmt werden kann, hier so, daß dieselbe so lange zu leisten ist, als der im Alter x beigetretene Aktive erwerbsfähig geblieben ist, d. h. es muß noch die Aktivitätsrente

$$\frac{\sum \mathfrak{A}_x \cdot v^x}{\mathfrak{A}_x \cdot v^x} \tag{37}$$

berechnet werden, also wird schließlich

$$P_x = \frac{\sum J_x \cdot v^{x+1} \cdot \mathfrak{a}_x}{\sum \mathfrak{A}_x \cdot v^x}, \tag{38}$$

wo $\mathfrak{A}_x \cdot v^x$ die diskontierte Zahl der Aktiven vom Alter x darstellt.[1])

Es ist leicht, nach diesen Grundsätzen die Formeln für aufgeschobene oder temporäre Invalidenpensionen usw. aufzustellen.

3. Ähnlich wie bei Berechnung von Versicherungen für verbundene Leben oder der Invalidenversicherung wird verfahren, wenn es sich um andere Versicherungen handelt, wo die Sterbenswahrscheinlichkeit noch mit anderen Wahrscheinlichkeiten verbunden wird. Bei Aussteuerkassen kommt die Heiratswahrscheinlichkeit in Betracht, d. h. es müssen Tafeln konstuiert werden, in welchen die Zahl der Überlebenden in Ledige und Verheiratete zerlegt wird. Man kann auch sonstige Kombinationen bilden, z. B. wird bei der sogenannten Hypothekarlebensversicherung, welche der Entschuldung des ländlichen Grundbesitzes dienen soll, die versicherte Summe eine wechselnde, nämlich der jeweilige Kapitalrest einer Amortisationsschuld.

§ 83. Prämienreserven. Risiko und Sparprämien.

1. Nach dem Prinzipe, Leistungen und Gegenleistungen der Versicherten und der Gesellschaft in ihren Jetztwerten zur Zeit des Vertragsabschlusses gleich zu setzen, lassen sich die mathematischen Prämien unter beliebigen Voraussetzungen über deren nähere Gestal-

1) Als Spezial-Literatur für die Pensionsversicherung seien genannt: Falkowicz, Der Pensionsfond, Prag 1892. — Meyer (Hugo), Beiträge zur Pensionsversicherung, Jena 1908. — Rosmanith, Die Lösung des Problems der Gehaltssteigerung in der Invalidenversicherung, Leipzig und Wien, 1911. — Friedrich, Mathematische Theorie der reichsgesetzlichen Invaliditäts- und Altersversicherung, Leipzig 1895. Ferner: Denkschrift, betr. die Pensions- und Hinterbliebenenversicherung der Privatangestellten; Drucksachen des Reichstags 12. Legislaturper. I. Session 1907/1909, Nr. 986.

tung berechnen. Wenn der Versicherer aber andere Jahresprämien einnimmt, als dem laufenden Risiko entspricht, so ist er gezwungen Rücklagen oder Ausgleichsfonds zu bilden. Für diese lassen sich mathematische Grundsätze aufstellen. Wir zeigen dies an dem Beispiele der Lebensversicherung.

Die Prämienreserve im Sinne der Lebensversicherungstechnik[1]) wird auf zweierlei Weise definiert:

1. Als der Überschuß des aufgezinsten Wertes der bereits geleisteten Beitragszahlungen über den aufgezinsten Wert der bereits geleisteten Auszahlungen der Gesellschaft (retrospektive Methode).

2. Als der Überschuß des Barwertes der zur Zeit der Berechnung der Prämienreserve (etwa nach m jähriger Versicherungsdauer) von Seiten der Gesellschaft noch zu leistenden Auszahlungen über den Barwert der von den Versicherten noch zu leistenden Beitragszahlungen (prospektive Methode).

Eine allgemeine Behandlung der Theorie der Prämienreserven und der Nachweis der Identität der Formulierung 1. und 2. läßt sich hier nicht geben; die Berechnungen der Prämienreserven erfordern eine kritische Betrachtung jeder einzelnen Versicherungskombination hinsichtlich der Bedeutung der Reserve, und wir wollen hier nur die grundlegenden Prinzipien für die gewöhnlichen Arten der Lebensversicherung behandeln.

2. Die oben unter **1,** 1 gegebene Definition der Prämienreserven gibt Gelegenheit darauf hinzuweisen, wie die Lebensversicherungsprämie in zwei Teile, die Risiko- und Sparprämie, zerlegt werden kann. Die Risikoprämie wird vielfach mit der sogenannten natürlichen Prämie verwechselt. Unter der letzteren wäre in der Lebensversicherung diejenige Umlage zu verstehen, welche analog der Bemessung der Prämien bei der Schadensversicherung zur Bestreitung der im Laufe des Jahres eintretenden Verpflichtungen der Gesellschaft dient. Mit dem Alter steigt diese Prämie, d. h. die natürliche Prämie, in der Lebensversicherung so erheblich, daß man an Stelle der steigenden dem jeweiligen Jahresrisiko Rechnung tragenden Prämien die gleichbleibenden Durchschnittsprämien, wie wir sie oben berechnet haben, erhebt. In der ersten Zeit der Versicherungsdauer wird nur ein Teil

1) Bei den Versicherungen mit kurzfristiger Vertragsdauer, insbesondere in der gewöhnlichen Schadensversicherung ist unter Prämienreserve und Prämienübertrag gewöhnlich die Rücklage der im Voraus gezahlten Prämien und der auf das folgende Rechnungsjahr zu übertragende Teil der Jahresprämien verstanden. In der Lebensversicherung hat die „Prämienreserve“ eine besondere Bedeutung.



dieser Durchschnittsprämie zur Deckung des Jahresbedarfs gebraucht; der Rest wird zu Rücklagen verwendet, aus welchen ein Teil der jährlichen Verpflichtung der Gesellschaft gedeckt erscheint. Unter Risikoprämie i. e. S. versteht man die natürliche Prämie für die im einzelnen Versicherungsjahr ungedeckte, sogenannte „reduzierte" Versicherungssumme. Die Differenz zwischen der durchschnittlichen Prämie und der jeweiligen Risikoprämie — wir denken hier immer nur an die Rechnung mit Nettoprämien, wie sie auf Grund der gewählten Sterbetafel und des festgesetzten Zinsfußes sich ergeben, nicht an die Brutto- oder Tarifprämien — heißt Sparprämie. Aus den Rücklagen der Sparprämien und deren Zinsen bildet sich der Prämienreservefonds.

Für einzelne Versicherungsmodalitäten macht die Zerlegung der Durchschnittsprämie in Risiko- und Sparprämie scheinbar Schwierigkeiten, wenn zu Beginn der Versicherung (wie bei der Kinderversicherung usw.) sich anfangs negative Prämienreserven ergeben.[1])

Bei der Todesfallversicherung ist also die Risikoprämie P' jeweils gleich der kurzen Versicherung auf ein Jahr, das Risiko der Gesellschaft aber bildet die sogenannte reduzierte Versicherungssumme, d. h. der durch die jeweilige Prämienreserve nicht gedeckte Betrag $1 - {}_mV_x$, wenn ${}_mV_x$ die Prämienreserve nach m jähriger Versicherungsdauer bedeutet. Die verschiedenen Risikoprämien sind also im Alter $x + \alpha$

$$(39) \qquad {}_\alpha P_x' = v q_{x+\alpha}(1 - {}_\alpha V_x),$$

und die Sparprämien

$${}_\alpha P_x'' = P_x - {}_\alpha P_x' = P_x - v q_{x+\alpha}(1 - {}_\alpha V_x).$$

Durch die Sparprämien werden die Reserven ergänzt, d. h. es ist

$$(40) \qquad {}_\alpha P_x'' = v\,{}_\alpha V_x - {}_{\alpha-1}V_x,$$

und die Reserve nach m jähriger Versicherungsdauer muß gleich der Summe der aufgezinsten und angesammelten Sparprämien sein

$$(41) \qquad {}_mV_x = {}_1P_x'' \cdot r^m + {}_2P_x'' \cdot r^{m-1} + {}_3P_x'' \cdot r^{m-2} + \cdots + {}_mP_x'' \cdot r.$$

3. Um die Prämienreserve für die gewöhnliche Lebensversicherung nach der retrospektiven Methode zu berechnen, d. h. als den Überschuß der aufgezinsten geleisteten Einzahlungen über die geleisteten aufgezinsten Auszahlungen, verfahren wir wie folgt: Die gleichbleibende Jahresprämie P_x für die Versicherungssumme 1 wurde

1) Man vergleiche jedoch den Aufsatz von Bortkiewicz, Risikoprämie und Sparprämie bei Lebensversicherungen auf eine Person, in Ehrenzweigs Assekuranz-Jahrbuch, XXIV. Jahrgang.

in den aufeinanderfolgenden Jahren von $l_x, l_{x+1}, \ldots, l_{x+m-1}$ Überlebenden bezahlt; Auszahlungen sind erfolgt an die Hinterbliebenen von $d_x, d_{x+1}, \ldots, d_{x+m-1}$ Verstorbenen. Die angesammelten Beträge verteilen sich auf l_{x+m} zur Zeit der Reserveberechnung Überlebende. Es ist also nach dieser Methode:

$$l_{x+m} \times {}_mV_x = P_x[l_x \cdot r^m + l_{x+1} \cdot r^{m-1} + \cdots + l_{x+m-1} \cdot r] \\ - \{d_x \cdot r^{m-1} + d_{x+1} \cdot r^{m-2} + \cdots + d_{x+m-1}\}$$

oder

$${}_mV_x = P_x \cdot \frac{D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{x+m-1}}{D_{x+m}} - \frac{C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+m-1}}{D_{x+m}}$$

(42)
$${}_mV_x = \frac{P_x(N_{x-1} - N_{x+m-1}) - (M_x - M_{x+m})}{D_{x+m}}.$$

4. Man kann aus Formel (42) auch folgende ableiten, welche den Wert der Prämienreserve nach m Jahren für den Zeitpunkt des Versicherungsabschlusses darstellt:

$${}_mV_x = \frac{D_x}{D_{x+m}} \left\{ P_x \cdot \frac{\sum D_x - \sum D_{x+m}}{D_x} - \frac{\sum C_x - \sum C_{x+m}}{D_x} \right\}$$

(43)
$$\frac{D_{x+m}}{D_x}\, {}_mV_x = P_x \cdot |_m\mathrm{a}_x - |_mA_x \text{ (vgl. Formel (16b) und (18b))},$$

d. h. die auf das Beitrittsalter unter Berücksichtigung der Sterblichkeit diskontierte Reserve nach m Jahren ist gleich dem Barwert der temporären Rente im Betrage P_x vermindert um den Barwert der innerhalb m Jahren zur Auszahlung gelangenden Versicherungssummen. Führt man in Formel (42) aber die Werte ein:

$$P_x \cdot N_{x-1} = D_x \cdot A_x = M_x, \quad \frac{N_{x+m-1}}{D_{x+m}} = \mathrm{a}_{x+m} \quad \text{und} \quad \frac{M_{x+m}}{D_{x+m}} = A_{x+m},$$

so erhält man

(44)
$${}_mV_x = A_{x+m} - P_x \cdot \mathrm{a}_{x+m}.$$

Diese Formel läßt die Identität der nach der retrospektiven und prospektiven Methode berechneten Prämienreserve ohne weiteres erkennen.

5. Was diese zweite oder prospektive Methode anlangt, so ist diese die für die Berechnung der Prämienreserven in der Anwendung weit einfacher zu handhabende. Man geht dabei immer von der Auffassung aus, daß der Überschuß der diskontierten künftigen Passivleistungen der Gesellschaft über die diskontierten künftigen Leistungen der Versicherten durch vorhandenes Kapital gedeckt sein muß. Es ist dabei ohne weiteres einleuchtend, daß die Reserven für Rentenversicherungen, welche auf Grund einmaliger Kapitalseinlagen abgeschlossen

sind oder für Lebensversicherungen mit einmaliger Prämienzahlung identisch sind mit den Rentenbarwerten bzw. den einmaligen Prämien, welche nötig wären, um zu dem Zeitpunkte der Reserveberechnung, d. h. für das erhöhte Beitrittsalter $x + m$ die Versicherung neu abzuschließen. Für die Todesfallversicherung mit jährlicher Prämienzahlung aber kann man die Prämienreserve kurz so entwickeln: Die einmalige Prämie A_{x+m} stellt den Wert des Versicherungskapitals 1 im Alter $x + m$ dar; der Versicherte zahlt die gleichbleibende dem Beitrittsalter x entsprechende Prämie P_x; der Gesamtwert aller zukünftigen Prämienzahlungen vom Alter $x + m$ ab bewertet sich mit $P_x \cdot \mathfrak{a}_{x+m}$, folglich muß notwendig zur Deckung der Verpflichtung der Gesellschaft vorhanden sein:

$$_mV_x = A_{x+m} - P_x \cdot \mathfrak{a}_{x+m}$$

wie in Formel (44) angegeben. Dieses Ergebnis ist also mit der Berechnung nach der retrospektiven Methode identisch. Man schreibt auch:

$$(45) \qquad _mV_x = P_{x+m} \cdot \mathfrak{a}_{x+m} - P_x \cdot \mathfrak{a}_{x+m} = (P_{x+m} - P_x)\mathfrak{a}_{x+m},$$

d. h. die Reserve berechnet sich als das Produkt aus der Differenz der Jahresprämien für das Alter $x + m$ und x und dem Leibrentenbarwert für das Alter $x + m$. Unter Anwendung der Formel

$$P_{x+m} = \frac{1}{\mathfrak{a}_{x+m}} - (1 - v) \quad \text{bzw.} \quad P_x = \frac{1}{\mathfrak{a}_x} - (1 - v)$$

kann man die Reserve auch schreiben

$$(46) \qquad _mV_x = 1 - \frac{\mathfrak{a}_{x+m}}{\mathfrak{a}_x} \quad \text{oder (46a)} \quad 1 - {_mV_x} = \frac{\mathfrak{a}_{x+m}}{\mathfrak{a}_x}.$$

Diese Formel gilt auch für die gemischte Versicherung, wenn die darin vorkommenden Rentenbarwerte als temporäre, bis zum Schlußalter der Versicherung genommen werden; sie eignet sich besonders gut zur Berechnung der Prämienreservetafeln für die verschiedenen Beitrittsalter: man hat um die reduzierte Versicherungssumme zu erhalten nur den reziproken Wert der Leibrente für das Beitrittsalter x mit den Leibrentenbarwerten für alle höheren Alter der Reihe nach zu multiplizieren.

6. Mit der Ausscheidung der Risikoprämie aus der Gesamtprämie hängt auch die Berechnung des sog. Sterblichkeitsgewinnes oder -Verlustes in der Lebensversicherung zusammen. Neben der Gewinn- und Verlustrechnung, bei welcher die für die Auffüllung der Prämienreserven nötigen Beträge unter den Passiven der Gesellschaft erscheinen, pflegt man noch eine rein technische Gewinn- und Verlustrechnung aufzustellen, welche die Abrechnung der wirklichen von der erwar-



tungsmäßigen Sterblichkeit feststellt, also die Rechnungsgrundlagen kontrolliert. Zu diesem Zwecke bildet man die Differenz der Deckungskapitalien (aufgezinste Reserve am Jahresanfang plus aufgezinste Prämien gegen Reserve am Jahresschlusse) und vergleicht sie mit den wirklich erforderlichen Zuschüssen zur Reserve der durch Tod erloschenen Versicherungen, d. h. die linke Seite der Gleichung

$$({}_mV_x + P_x)r - {}_{m+1}V_x = q_{x+m}(1 - {}_{m+1}V_x) \tag{47}$$

wird mit der tatsächlich benötigten reduzierten Versicherungssumme verglichen, um den Gewinn oder Verlust aus der Sterblichkeit zu errechnen. In der Praxis sind natürlich Ab- und Zugänge während des Jahres auf den durchschnittlichen Versicherungsbestand von Einfluß.

7. Die Bedeutung der Prämienreserve für den einzelnen Versicherten besteht darin, daß dieselbe für die Bemessung des Rückkaufwertes der Versicherung die Grundlage bildet und bei der Umwandlung der Versicherung in eine prämienfreie in voller Höhe als einmalige Prämie für die neu abzuschließende Versicherung (entsprechend dem höheren Beitrittsalter bzw. dem Zeitpunkt der Reserveberechnung oder der Umwandlung) zur Anrechnung gebracht wird. In der Höhe des Rückkaufswertes (meist in Prozenten der Reserve) pflegen die Gesellschaften auch die Polize zu beleihen, d. h. dem Versicherten gegen besondere Verzinsung Darlehen zu gewähren, die bei Eintritt des Versicherungsfalles von der Versicherungssumme in Abzug kommen. Hierin tritt der Sparcharakter der Lebensversicherung besonders zu Tage. In dem Gesetz, betreffend die Beaufsichtigung privater Versicherungsunternehmungen vom 12. Mai 1901 sind besondere Vorschriften über die Prämienreserve bei der Lebensversicherung (auch Kranken- und Unfallversicherung) erlassen.[1]) Dort und in dem Reichsgesetze vom 30. Mai 1908 über den Versicherungsvertrag ist das Anrecht der Versicherten geregelt; außerdem verlangen die Vorschriften getrennte Buchung und Verrechnung der Prämienreserve für den Schluß jedes Geschäftsjahres nach den genehmigten Rechnungsgrundlagen unter Bestätigung der Vorschriftsmäßigkeit der Berechnung durch einen Sachverständigen. Eine Entnahme aus dem mündelsicher anzulegenden Prämienreservefonds ist, abgesehen von den zur Vornahme von Änderungen der Kapitalanlage erforderlichen Mitteln, nur gestattet, soweit es sich um Beträge handelt, welche durch Eintritt des Versicherungsfalles, durch Rückkauf oder andere Fälle der Beendigung des Versicherungsverhältnisses frei werden.

1) Zur Orientierung über die rechtliche Natur der Prämienreserve vgl. Rehm, Die Bilanzen der Aktiengesellschaften usw., München, 1903; ferner Moldenhauer, Die rechtliche Natur des Rückkaufs usw. in Ehrenzweigs Assekuranzjahrbuch Bd. XXIV. Vgl. auch die Geschäftsberichte des K. A. f. P.-V.



§ 84. Bruttoprämien, Zillmerei und Gewinnbeteiligung.

1. Die Zuschläge zu den Nettoprämien haben zweierlei Unkosten zu berücksichtigen, erstens die einmaligen Erwerbsunkosten (z. B. Abschlußprovision, Honorare für Gutachten, Stempel), zweitens die dauernden Geschäftsunkosten der Gesellschaft (allgemeine Verwaltungskosten, Inkassoprovisionen). Ferner muß in der Bruttoprämie ein Zuschlag enthalten sein, welcher die Ansammlung eines Sicherheitsfonds zur Deckung des außergewöhnlichen Risikos ermöglicht, wie dasselbe durch die Schwankungen in der Sterblichkeit bzw. die Abweichungen von den Rechnungsgrundlagen bedingt ist. Hierzu tritt ev. ein Zuschlag für den Unternehmergewinn. Man kann für die Berechnung der Zuschläge zu den Nettoprämien, die teils aus konstanten vom Beitrittsalter unabhängigen, teils aus prozentualen Zuschlägen zur Nettoprämie und zum außerrechnungsmäßigen Risiko[1]) bestehen, bestimmte Grundsätze aufstellen; in der Praxis werden die theoretischen Betrachtungen nur sehr im Rohen berücksichtigt.[2])

2. Da die ersten Unkosten einer Versicherung, zum Teile infolge der vielfach hohen Abschlußprovisionen, erhebliche sind, wird in der Regel die erste Bruttoprämie zur Deckung der ersten Unkosten ganz in Anspruch genommen. Nach dem sog. Zillmerschen Verfahren wird daher der ersten Prämie ein größerer Betrag auf Kosten der Prämienreserve entnommen. Sind die einmaligen Unkosten δ_x, so werden diese nach und nach im Verlaufe der Versicherungsdauer amortisiert und zwar, bei der lebenslänglichen Todesfallversicherung mit lebenslänglicher Prämienzahlung im Betrage $\frac{\delta_x}{\mathrm{a}_x}$. Bei Berechnung der Prämienreserve tritt an Stelle der Nettoprämie P_x, die um die Tilgungsquote für die Anwerbekosten vermehrte Nettoprämie, die sog. Reserveprämie $P_x + \frac{\delta_x}{\mathrm{a}_x}$.

Die sog. Zillmersche Prämienreserve wird hiernach

$$(48)\qquad {}_mV_x' = A_{x+m} - \left(P_x + \frac{\delta_x}{\mathrm{a}_x}\right)\mathrm{a}_{x+m}$$

$$= {}_mV_x - \delta_x \cdot \frac{\mathrm{a}_{x+m}}{\mathrm{a}_x} = \left\{P_{x+m} - P_x - \frac{\delta_x}{\mathrm{a}_x}\right\}\mathrm{a}_{x+m}.$$

1) Wegen der Theorie des Risikos und der Literatur hierzu vgl. u. a. Bohlmann, Lebensversicherungsmathematik in der Encyklopädie der mathem. Wissenschaften I D 46 Leipzig bei Teubner; ferner Küttner, Das Risiko der Lebensversicherungsanstalten und Unterstützungskassen, Heft VII der Veröffentlichungen des D. V. f. V.-W. Berlin, E. Mittler u. Sohn 1906.

2) Eine eingehende Darstellung der Theorie der Zuschläge findet man bei Landré, Mathematisch technische Kapitel zur Lebensversicherung. Jena, Verlag von Gustav Fischer, 1901 (2. Aufl.).

Damit im ersten Jahre keine negative Prämienreserve entsteht, muß

$$\frac{\delta_x \mathfrak{a}_{x+1}}{\mathfrak{a}_x} < {}_1V_x$$

sein; bzw.

$$P_{x+1} > P_x + \frac{\delta_x}{\mathfrak{a}_x};$$

der Grenzfall ist

(48a) $$\delta_x = \{P_{x+1} - P_x\}\mathfrak{a}_x,$$

woraus

(48b) $${}_mV_x' = A_{x+m} - P_{x+1} \cdot \mathfrak{a}_{x+m},$$

d. h. für den Fall δ_x das sog. Zillmersche Maximum darstellt, ergibt sich die Prämienreserve, indem statt mit der Nettoprämie P_x mit der Nettoprämie P_{x+1} (für das um ein Jahr erhöhte Alter) gerechnet wird.

Nach dem Reichsgesetz vom 12. V. 01 darf der Betrag, um den bei Berechnung der ersten Prämienreserve gezillmert wird, $12^1/_2$‰ der Versicherungssumme nicht überschreiten.

3. Die Tarifprämien sind verschieden, je nachdem es sich um Versicherung mit oder ohne Gewinnbeteiligung handelt; mit anderen Worten: die in Aussicht gestellten Dividenden (auch die Aktiengesellschaften lassen einen Teil des Gewinnes den Versicherten zugute kommen) müssen in den Jahresprämien mit ihren diskontierten Werten enthalten sein. Der tatsächliche Gewinn besteht aus dem Sterblichkeits- und Zinsgewinn, dem Gewinn aus Rückkauf und Stornis(Verfall), dem Gewinn aus den Zuschlägen, aus Vermögensanlagen usw. Für die Gewinnbeteiligung der Versicherten gibt es verschiedene Systeme in der Lebensversicherung; es wird, wie bei der Schadensversicherung nach Ablauf einer Karenzzeit, ein bestimmter Prozentsatz der Jahresprämie zurückvergütet, oder die Dividende im Verhältnis zur Prämienreserve, oder zur Summe der eingezahlten Prämie berechnet oder ein gemischtes System gewählt. Sobald die Dividenden nach irgend einem Maßstabe steigen sollen, ist die Bildung besonderer Dividendenreservefonds nach Analogie des Prämienreservefonds nötig, während bei dem ältesten Verfahren der Dividendenverteilung im Verhältnis zur Jahresprämie, die Ausschüttung ohne weiteres — eventuell unter Aufschub um einige Jahre — erfolgen kann. Die Dividenden können auch in der Form der Erhöhung der Versicherungsleistungen gutgeschrieben werden. Für alle einschlägigen Rechnungen gelten die hier skizzierten Prinzipien für die Anwendung der beiden Rechnungsgrundlagen, Sterblichkeitstafel und Zinsfuß. Die Kapitalwerte der Belastung der Gesellschaft für die verschiedenen Gewinnverteilungssysteme berechnen sich für die einfache Todesfallversicherung mit lebenslänglicher Prämienzahlung,



wenn Π_x die Bruttoprämie für das Beitrittsalter x bedeutet und C, C', C'' die Kapitalwerte der Belastung für eine Dividende von 1% der Bruttoprämie bzw. von 1% der Prämienreserve bzw. von 1% der Summe der Bruttoprämien:[1])

(49a) $$C = \frac{\Pi_x}{100} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{k=\omega-x} D_{x+k}}{D_x}$$

(49b) $$C' = \frac{1}{100} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{k=\omega-x} {}_kV_x \cdot D_{x+k}}{D_x}$$

(49c) $$C'' = \frac{\Pi_x}{100} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{k=\omega-x} k \cdot D_{x+k}}{D_x}.$$

Um diese Kapitalwerte erhöhen sich die einmaligen Todesfallversicherungsprämien. In diesem informatorischen Beispiele ist der Einfachheit halber angenommen, daß die erste Dividende schon nach Ablauf des ersten Versicherungsjahres bezahlt wird, und so viele Jahresdividenden zur Anrechnung gelangen, als Jahresprämien gezahlt werden. Die Aufstellung der Formeln für die anderweite Festsetzung des Beginnes des Dividendenabzuges oder für gemischte Systeme bietet keine Schwierigkeiten. Zu erwähnen ist, daß bei Einführung des Systems der steigenden Dividende die Gesellschaften s. Zt. eine jährliche Steigerung um je 3% der Bruttoprämie in Aussicht stellten, so daß nach 33 maligem Dividendenbezug die Dividende größer werden sollte, als die Jahresprämie. Viele Gesellschaften haben mangels nötiger Dividendenrücklagen den Prozentsatz erheblich heruntersetzen müssen; durch die Einführung der gemischten (abgekürzten) Todesfallversicherung mit früherem Abschluß der Versicherung ist das System der steigenden Dividenden auch in seinen Folgen rechnerisch besser übersehbar geworden.

4. Kurz erwähnt sei, daß bei dem Tontinensystem der Gewinnbeteiligung die Dividenden eine Reihe von Jahren hindurch aufgesammelt werden und dann an die Überlebenden zur Ausschüttung gelangen; d. h. es findet eine Vererbung innerhalb der Gruppen gleichzeitig eingetretener Personen (Gewinnverband) statt.

---

1) Vgl. die Schrift: „Die Gewinnbeteiligung der Versicherten bei den im Deutschen Reiche arbeitenden Lebensversicherungsgesellschaften". Dem V. internationalen Kongreß für Versicherungswissenschaft zu Berlin gewidmet vom Kaiserlichen Aufsichtsamt für Privatversicherung Berlin 1906.



Ähnliche Rechnungen, wie sie die Formeln (49) illustrieren, hat man anzustellen, um auf mathematischer Grundlage zu entscheiden, ob die verschiedenen in den Tarifen der Gesellschaft gewöhnlich vorgesehen Dividendenpläne im Einzelfalle für den Versicherten gleichwertig sind.

§ 85. Technische Bilanzen.

1. Nach dem gleichen Prinzip wie die Prämienreserve als Differenz der Aktiven und Passiven bzw. Forderungen und Verpflichtungen der Gesellschaft erfaßt wird, muß zu einem beliebigen Zeitpunkt die versicherungstechnische Bilanz für irgend einen Versicherungsverein, der sich mit der Gewährung von Sterbegeldern, Alters- und Invalidenrenten, Witwen- und Waisenpensionen befaßt, vorgenommen werden. Die Differenz zwischen den rechnungsmäßigen Kapitalwerten aller Verpflichtungen des Vereins und den Verpflichtungen der Kassenmitglieder muß als Reserve vorhanden sein, widrigenfalls eben eine Erhöhung der Beiträge oder eine Verminderung der Leistungen stattfinden muß. Übersteigt das Vermögen die rechnungsmäßige Prämienreserve, so können, wenn die Sicherheitsreserven genügend dotiert sind, die Leistungen erweitert oder die Beiträge reduziert werden. Es wird bei solchen Berechnungen einfach der Vermögensstand der Kassa mit der berechneten Prämienreserve verglichen, nur mit dem Unterschied, daß unter Umständen auch noch bei den Aktiven andere Einnahmen als die Beiträge der Mitglieder zu veranschlagen sind. Das Grundprinzip der Aufstellung einer technischen Bilanz ist aber dem Wesen nach das gleiche, wie das bei Berechnung der Prämienreserven nach prospektiver Methode angewandte Verfahren.

2. Nach dem Vorgetragenen ist einleuchtend, daß solche technische Bilanzen je nach der Wahl der Sterblichkeitstafel und des Zinsfußes verschiedene Resultate ergeben müssen. Die Auswahl der richtigen, den tatsächlichen Verhältnissen am meisten entsprechenden Rechnungsgrundlagen ist vielfach schwierig und zwar um so mehr, als sich keine einfachen analytischen Formeln finden lassen, aus welchen sich der Einfluß der Änderung der Sterbenswahrscheinlichkeiten oder des Zinsfußes kurz ableiten läßt.[1])

Weitere Ausführungen hierzu fallen außerhalb des Rahmens dieses Handbuches.

---

1) Vgl. hierzu Landré, a. a. O.

VIERTES BUCH

ASTRONOMIE

Elfter Abschnitt.

Die astronomischen Koordinaten.

§ 86. Die Koordinaten eines Punktes.

1. Der Himmel erscheint uns als eine Kugel von unbestimmtem Radius, auf deren Innenfläche wir vom Mittelpunkt aus die im Raum zerstreuten Gestirne projizieren. Betrachten wir Gestirne, die, wie die meisten Fixsterne, sich in Entfernungen befinden, gegen welche die uns möglichen Verschiebungen des Beobachtungsortes unmeßbar klein sind, so werden die projizierenden Linien auf denselben Punkt der Sphäre treffen, von welchem uns zugänglichen Beobachtungsort aus wir sie auch ziehen mögen. Betrachtet man dagegen nahe Gestirne, wie die Planeten u. s. f., gegen deren Entfernung die Verschiebung des Beobachtungsortes B nicht verschwindet, dann muß man die Lage des Beobachtungsortes angeben, von dem aus die Projektion an die Sphäre erfolgt, denn die Visierlinien BO und $B'O$ führen auf verschiedene Punkte der Sphäre (Fig. 224). Um nun in diesem Falle nicht verschiedene Sphären mit verschiedenen Mittelpunkten einführen zu müssen, stellt man sich die Sphäre mit einem so großen Radius vor, daß dagegen BB' verschwindet und verlegt ihren Mittelpunkt in einen bestimmten Ort B, z. B. in den Mittelpunkt der Erde; Visuren, die von einem anderen Ort B' aus erhalten sind, z. B. von der Oberfläche der Erde, verschiebt man dann parallel zu sich selbst, bis sie durch B hindurchgehen: BO'; die beiden Parallelen $B'O$ und BO' treffen denselben Punkt der Sphäre, der als Repräsentant der Richtung $B'O$ angesehen werden kann; dadurch daß auf derselben Sphäre auch der die Richtung BO repräsentierende Punkt erscheint, wird für viele Untersuchungen eine bequeme Vorstellungsweise erreicht.

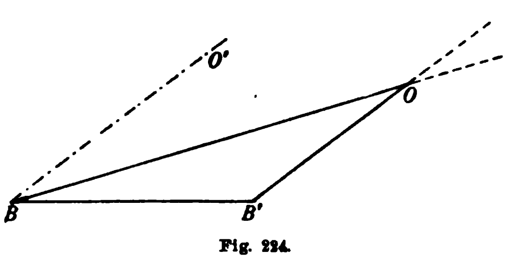


Fig. 224.

2. Um den Ort eines Gestirnes zu bestimmen, bedient man sich verschiedener rechtwinkliger Koordinatensysteme, die ihren Anfangspunkt im Mittelpunkt der Sphäre haben. Die positiven Richtungen der drei Achsen treffen die Sphäre in drei Punkten, die durch Hauptkreise miteinander verbunden ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten und Winkel gleich 90° sind, hervorbringen. Dieses Dreieck ist eine bequeme Vorstellung des Koordinatensystems, wenn man nicht mit den rechtwinkligen, sondern mit den Polarkoordinaten des Punktes operiert, wie dies in der Astronomie vorwiegend der Fall ist.

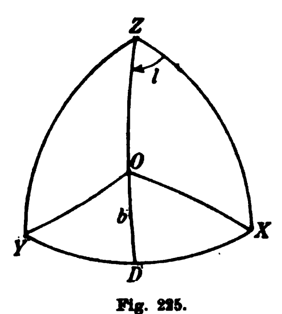


Fig. 225.

Um den Punkt O im Koordinatendreieck XYZ (Fig. 225) zu bestimmen, legt man durch ihn und Z einen Hauptkreis, der also senkrecht auf XY stehen wird, und gibt dessen sphärischen Winkel mit XZ, die Länge l, die auch durch den Bogen XD des Hauptkreises XY gemessen wird, und entweder den Bogen ZO oder dessen Komplement OD, ersteres die Poldistanz, letzteres die Breite b genannt. Durch l, b und durch r, den Radius der Kugel ist aber der Punkt O unzweideutig im Raume bestimmt. Seine rechtwinkligen Koordinaten ergeben sich durch Projektion des Radius r auf die Achsen und lassen sich sofort durch r, l, b ausdrücken:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= r\cos(XO) = r\cos b\cos l \\ y &= r\cos(YO) = r\cos b\sin l \\ z &= r\cos(ZO) = r\sin b. \end{aligned}$$

3. Ist $\xi\eta\zeta$ ein zweites Koordinatendreieck auf derselben Kugel und sind dessen Ecken gegen die des ersten durch die Bogen des Diagrammes

(2)

	x	y	z
ξ	α_1	α_2	α_3
η	β_1	β_2	β_3
ζ	γ_1	γ_2	γ_3

bestimmt, so bestehen für die Koordinaten eines und desselben Punktes nach dem Projektionssatz die Beziehungen:

$$(3) \qquad \begin{aligned} x &= \xi\cos\alpha_1 + \eta\cos\beta_1 + \zeta\cos\gamma_1 \\ y &= \xi\cos\alpha_2 + \eta\cos\beta_2 + \zeta\cos\gamma_2 \\ z &= \xi\cos\alpha_3 + \eta\cos\beta_3 + \zeta\cos\gamma_3 \end{aligned}$$

und umgekehrt

$$(4)\qquad \begin{aligned} \xi &= x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3 \\ \eta &= x\cos\beta_1 + y\cos\beta_2 + z\cos\beta_3 \\ \zeta &= x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3\,. \end{aligned}$$

Haben die beiden Systeme eine Achse gemeinsam z. B. die $x=\xi$-Achse, so daß das zweite System durch Drehung um diese Achse um den Winkel ε aus dem ersten hervorgeht, (Fig. 226) dann wird obiges Diagramm

(5)

	x	y	z
ξ	0	90°	90°
η	90°	ε	$90° - \varepsilon$
ζ	90°	$90° + \varepsilon$	ε

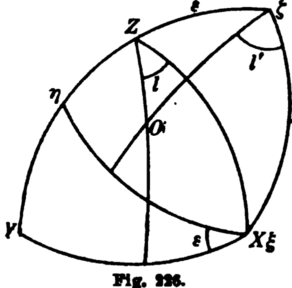


Fig. 226.

und daher die Transformationsformeln:

$$(6)\qquad \begin{aligned} x &= \xi \\ y &= \eta\cos\varepsilon - \zeta\sin\varepsilon \\ z &= \eta\sin\varepsilon + \zeta\cos\varepsilon \end{aligned} \qquad\Bigg|\qquad \begin{aligned} \xi &= x \\ \eta &= y\cos\varepsilon + z\sin\varepsilon \\ \zeta &= -y\sin\varepsilon + z\cos\varepsilon \end{aligned}$$

Sind r, l', b' die Polarkoordinaten im zweiten System, so daß

$$(7)\qquad \begin{aligned} \xi &= r\cos b'\cos l' \\ \eta &= r\cos b'\sin l' \\ \zeta &= r\sin b' \end{aligned}$$

wird, so folgt durch Eintragung von (1) und (7) in (6):

$$(8)\qquad \begin{aligned} \cos b\cos l &= \cos b'\cos l' \\ \cos b\sin l &= \cos b'\sin l'\cos\varepsilon - \sin b'\sin\varepsilon \\ \sin b &= \cos b'\sin l'\sin\varepsilon + \sin b'\cos\varepsilon \end{aligned}$$

$$(9)\qquad \begin{aligned} \cos b'\cos l' &= \cos b\cos l \\ \cos b'\sin l' &= \cos b\sin l\cos\varepsilon + \sin b\sin\varepsilon \\ \sin b' &= -\cos b\sin l\sin\varepsilon + \sin b\cos\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Diese Beziehungen zwischen den Polarkoordinaten der beiden Systeme lassen sich auch unter Anwendung der drei Hauptformeln der sphärischen Trigonometrie auf das Dreieck $Z\zeta O$ ableiten; es ist nämlich in diesem Dreieck

Seite $OZ = 90° - b$, $O\zeta = 90° - b'$, $Z\zeta = \varepsilon$

Winkel $\zeta ZO = 90° + l$, $O\zeta Z = 90° - l'$.

4. Die zur Bestimmung der Gestirnsörter nötigen Koordinatensysteme müssen die Eigenschaften haben, jeder Zeit leicht am Himmel auffindbar zu sein und eine sichere Messung der Koordinaten durch Instrumente zu gestatten; es genügt deshalb nicht, nur ein System einzuführen, sondern es sind drei in ständigem Gebrauch, da nur deren Kombination allen jeweils auftretenden Anforderungen genügt. Diese Systeme werden durch die Natur selbst dargeboten und heißen:

1. das System der Schwere oder des Horizontes,
2. das System der Rotation der Erde oder des Äquators,
3. das System der Translation der Erde oder der Ekliptik.

5. Das erste System wird durch die Richtung der Schwere im Beobachtungsort oder durch die dazu senkrechte Ebene — die Tangentialebene an irgend eine im Gleichgewicht befindliche Flüssigkeitsoberfläche — geboten und ist außer für geodätische Messungen auch für astronomische unentbehrlich, da ein nach seinem Vorbild gebautes Instrument zur Messung der Koordinaten an Einfachheit und Sicherheit von keinem anderen übertroffen werden kann, und da es die Beziehungen zwischen der Lage des Beobachtungsortes auf der Erdoberfläche und dem Himmel vermittelt. Die Richtung der Schwere trifft die Sphäre in zwei Punkten, die Zenit Z und Nadir heißen, die dazu senkrechte Ebene schneidet die Sphäre in dem Hauptkreis, der Horizont heißt. Durch Zenit und Nadir gelegte Hauptkreise nennt man Vertikalkreise. In dem durch das beobachtete Objekt O gelegten Vertikalkreis wird die erste Polarkoordinate dieses Systems gemessen, nämlich entweder $ZO = z =$ Zenitdistanz oder $DO = h =$ Höhe, die sich zu 90^0 ergänzen (Fig. 227). Die zweite Polarkoordinate dieses Systems, die Azimut heißt, kann erst durch Hinzuziehung des zweiten Systems definiert werden.

6. Das zweite System wird durch die Richtung der Achse geboten, um welche die Erde ihre tägliche Drehung ausführt, oder durch die dazu senkrechte Ebene, den Äquator. Die Achse schneidet die Sphäre in zwei Punkten, dem Nordpol P und dem Südpol, die Ebene trifft die Sphäre in dem Hauptkreis des Himmelsäquators. Durch die Pole gelegte Kreise heißen Deklinationskreise, da in ihnen die erste Polarkoordinate dieses Systems, nämlich der Abstand des Objektes vom Äquator $GO = \delta =$ Deklination gemessen wird; zur Definition der zweiten Koordinate, der Rektaszension, bedarf man des dritten Systems (Fig. 227).

Die beiden Punkte, in denen sich die Hauptkreise Horizont und Äquator treffen, heißen West und Ost und zwar ist West im Sinne

der Erddrehung der aufsteigende Knoten des Äquators auf dem Horizont. Der durch das Zenit gelegte Deklinationskreis heißt Meridian des Beobachtungsortes; er trifft den Horizont in zwei Punkten, die von West und Ost um 90° abstehen und Nord und Süd genannt werden, Nord jener, der vom Zenit aus gerechnet in der Richtung nach dem Nordpol liegt. Vom Meridian aus wird die zweite Polarkoordinate des ersten Systems gerechnet, nämlich der sphärische Winkel $SZO = a =$ Azimut, vom südlichen Teil des Meridians aus nach Westen zu von 0° bis 360° gezählt.

Die Deklination des Zenits $CZ = \varphi$ heißt Polhöhe oder geographische Breite des Beobachtungsortes; dieser Winkel ist nämlich gleich dem Komplement der Zenitdistanz des Poles $= 90° - ZP$, also gleich der Höhe des Poles; und andererseits mißt er offenbar den Winkel zwischen der Schwerelinie des Beobachtungsortes und dem Erdäquator, also die eine der Koordinaten, durch die Orte auf der Erdoberfläche festgelegt werden.

Der sphärische Winkel, den der Deklinationskreis eines Gestirnes mit dem Meridian bildet, $ZPO = t$, heißt Stundenwinkel wegen seiner Beziehung zur Zeitrechnung; er wird von 0° bis 360° in der Richtung nach Westen gezählt.

Der durch Ost und West gelegte Vertikalkreis ZW heißt erster Vertikal; sein Azimut ist 90° bzw. 270°.

7. Das dritte System wird durch die Ebene geboten, in welcher sich die Erde um die Sonne bewegt; diese Ebene schneidet an der Sphäre den Hauptkreis der Ekliptik aus, in welcher von der Erde aus gesehen die Sonne ihren scheinbaren jährlichen Lauf in der Richtung von West nach Ost ausführt. Der beim Nordpol des Äquators liegende Pol der Ekliptik heißt der Nordpol N der Ekliptik, der andere der Südpol. Durch die Pole der Ekliptik gelegte Kreise heißen Breitenkreise, weil in ihnen die erste der Polarkoordinaten des dritten Systems die Breite $HO = \beta$ gemessen wird. Der durch die Pole des Äquators gelegte Breitenkreis oder was dasselbe ist, der durch die Pole der Ekliptik gelegte Deklinationskreis enthält den Abstand der beiden Pole $PN = \varepsilon$, welcher gleich ist dem sphärischen Winkel zwischen Ekliptik und Äquator $= AE =$ Winkel AFE und Schiefe der Ekliptik genannt wird. Die Pole dieses Kreises, also die Schnittpunkte von Ekliptik und Äquator, heißen die Äquinoktien und zwar dasjenige, in welchem die Sonne bei ihrem Laufe in der Ekliptik in die Halbsphäre übertritt, in der der Nordpol des Äquators liegt, das Frühlingsäquinoktium oder der Frühlingspunkt, das andere der Herbstpunkt. Vom Deklinationskreis des Frühlingspunktes aus, beziehungsweise vom Breitenkreis dieses Punktes aus werden die

zweiten Polarkoordinaten der beiden Systeme gerechnet und zwar die sphärischen Winkel

$$FPO = \alpha = \text{Rektaszension}$$

$$FNO = \lambda = \text{Länge},$$

beide auch gemessen durch die Bogen FG bzw. FH und zwar von 0° bis 360° in der Richtung der Sonnenbewegung von West nach Ost. Der Nordpol der Ekliptik hat also die Rektaszension 270° und der Nordpol des Äquators die Länge 90°.

Die Ekliptik wird vom Breitenkreis der Pole des Äquators in zwei Punkten getroffen, welche die **Solstizialpunkte** genannt werden und vom Frühlingspunkte nach beiden Seiten um 90° abstehen. E ist das Sommersolstiz, der andere heißt Wintersolstiz. In den Momenten, wo die vier Punkte der Ekliptik, die wir Äquinoktial- und Solstizialpunkte genannt haben, von der Sonne passiert werden, beginnen die entsprechenden Jahreszeiten.

Der Stundenwinkel des Frühlingspunktes $ZPF = \theta$ heißt **Sternzeit**; über ihn folgt Näheres bei Auseinandersetzung der Zeitrechnung; hier sei nur sogleich die fundamentale Gleichung angegeben:

$$\text{Stundenwinkel} = \text{Sternzeit} - \text{Rektaszension:} \quad t = \theta - \alpha.$$

8. In Fig. 227 sind die drei Systeme übersichtlich zusammengestellt, wie sie dem im Mittelpunkt der Sphäre befindlichen Beobachter am Himmel erscheinen; es mag nützlich sein, die Bezeichnungen und die hauptsächlichsten Definitionen an ihrer Hand zu wiederholen.

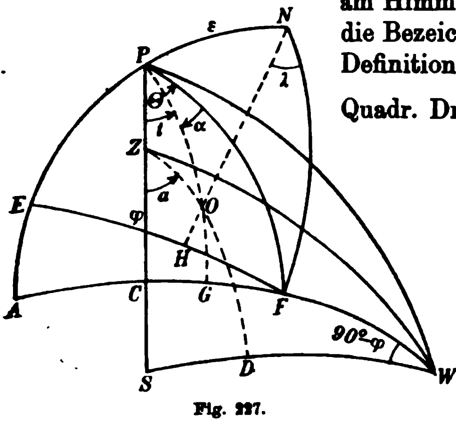


Fig. 227.

Quadr. Dreieck WSZ System des Horizonts:

$$\sphericalangle\, SZO = a = \text{Azimut},$$
$$DO = h = \text{Höhe};$$

Quadr. Dreieck FAP System des Äquators:

$$\sphericalangle\, FPO = \alpha = \text{Rektaszension},$$
$$GO = \delta = \text{Deklination};$$

Quadr. Dreieck FEN System der Ekliptik:

$$\sphericalangle\, FNO = \lambda = \text{Länge}, \quad HO = \beta = \text{Breite};$$

Winkel $ZPO = t = \text{Stundenwinkel} = \theta - \alpha$;

„ $ZPF = \theta = \text{Sternzeit}$;

$ZC = \varphi = \text{Polhöhe}$;

$SC = ZP = 90°$ [illegible] uatorhöhe;

$PN = AE =$ [illegible] = Schiefe der Ekliptik.

9. Infolge der Drehung der Erde um ihre Achse streicht der mit dem Beobachtungsort fest verbundene Meridian SZP in der Richtung von West nach Ost über die Gestirne hinweg, wobei der Pol P eine feste Lage unter den Gestirnen behält, oder die Gestirne scheinen in entgegengesetzter Richtung durch den Meridian hindurchzugehen. Die Koordinaten des ersten Systems a und h sind also einer ständigen Änderung unterworfen und man bedarf bei ihrer Bestimmung stets der Angabe der Phase der Drehung, was am bequemsten durch den Winkel θ erreicht wird; dieser wird nämlich, da F auf dem Äquator liegt und einen festen Stand unter den Gestirnen hat — abgesehen von später zu erörternden kleinen Ändederungen — sich proportional der Drehung ändern und durch seine Größenangabe stets den Stand des Sternhimmels gegen den Ortsmeridian anzeigen. Auch der Stundenwinkel t des Gestirns ändert sich proportional der Drehung, folglich wird die Differenz $\theta - t = \alpha$ eine konstante, d. h. von der Drehung unabhängige Koordinate des Gestirns sein. Da auch die Deklination δ des Gestirnes sich nicht ändert, so sind beide Koordinaten des zweiten Systems unveränderliche Bestimmungsstücke des Gestirnes, solange P und F oder was dasselbe ist, P und N als fest unter den Gestirnen betrachtet werden dürfen. Dasselbe gilt augenscheinlich von den Koordinaten λ und β des dritten Systems, denn dieses ganze System FEN nimmt an der Drehung Teil.

Das System der Ekliptik dient im wesentlichen zur Bestimmung des Frühlingspunktes und ist im übrigen entbehrlich; man behält es jedoch für Untersuchungen im Sonnensystem bei, da es hier gewisse Vorteile bietet; eine direkte Messung seiner Koordinaten durch Instrumente ist unmöglich, sondern sie werden stets aus α und δ durch Rechnung abgeleitet. Auf die Bestimmung von α und δ werden wir später zu sprechen kommen, hier sei nur dies angeführt, daß man streben muß, sie mit einem Instrument zu messen, das dem Typus des ersten Systems angehört; denn gegen die Richtung der Schwere schief gelagerte künstliche Achsen, wie sie direkte Messungen im zweiten System erfordern würden, entbehren der nötigen Sicherheit und Konstanz.

10. Den Übergang von den Koordinaten des einen Systems zu denen des andern haben wir oben bereits allgemein behandelt und wir können daher die in der Praxis auftretenden Fälle sofort durch Spezialisierung lösen.

Der Zusammenhang der Systeme des Horizontes und des Äquators wird am einfachsten erreicht, wenn man das sekundäre System WCP (Fig. 227) mit den Koordinaten Stundenwinkel t und Deklina-

tion δ einführt. Da dieses, wie die Figur 227 unmittelbar zeigt, durch Drehung um die W-Achse des ersten Systems um den Winkel $90^\circ - \varphi$ entsteht und da hier außerdem $l = 90^\circ - a$, $l' = 90^\circ - t$ zu setzen ist, so folgt aus (8) und (9)

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
\cos h \sin a &= \cos\delta \sin t\\
\cos h \cos a &= \cos\delta \cos t \sin\varphi - \sin\delta \cos\varphi\\
\sin h &= \cos\delta \cos t \cos\varphi + \sin\delta \sin\varphi
\end{aligned}
$$

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
\cos\delta \sin t &= \cos h \sin a\\
\cos\delta \cos t &= \cos h \cos a \sin\varphi + \sin h \cos\varphi\\
\sin\delta &= -\cos h \cos a \cos\varphi + \sin h \sin\varphi .
\end{aligned}
$$

Diese Formeln ergeben sich auch aus dem Dreieck ZPO, in welchem

die Seiten $ZP = 90^\circ - \varphi$, $ZO = 90^\circ - h$, $PO = 90^\circ - \delta$,
die Winkel $ZPO = t$ und $PZO = 180^\circ - a$ sind.

Setzt man in den Formeln (10) und (11) $t = \theta - \alpha$, so hat man die Beziehungen zwischen dem Horizontal- und dem Äquatorialsystem.

Die Formeln (10) sind, wie wir später sehen werden, die Grundlage der geographischen Ortsbestimmung, d. h. der Methoden, die Lage des Beobachtungsortes auf der Erdoberfläche durch Gestirnsbeobachtungen zu bestimmen. Die Formeln (11) sind die Grundlage der Theorie der Instrumente, d. h. der Methoden, durch fehlerhaft aufgestellte Instrumente die richtigen Koordinaten der Gestirne zu ermitteln.

11. Bei häufiger Anwendung von (10) namentlich für ein und denselben Beobachtungsort, also bei konstantem φ, empfiehlt sich eine Umformung, die den Vorteil bequemerer logarithmischer Berechnung und der Möglichkeit der Tabulierung bietet. Fällt man (Fig. 228) von Z das Lot $ZL = 90^\circ - n$ auf den Deklinationskreis PO und nennt den Abschnitt $PL = N$, so erhält man n und N aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ZLP durch die Formeln:

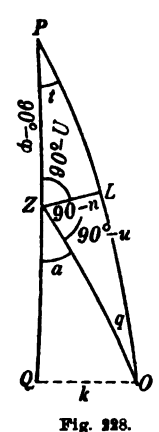


Fig. 228.

$$
\text{a)}\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\sin n \sin N &= \cos\varphi \cos t\\
\sin n \cos N &= \sin\varphi\\
\cos n \qquad &= \cos\varphi \sin t;
\end{aligned}
\right.
$$

setzt man ferner die Winkel $LZP = 90^\circ - U$ und $LZO = 90^\circ - u$, so folgt, da $LO = 90^\circ - (N + \delta)$ ist, aus demselben Dreieck und aus dem anliegenden ZLO:

$$\text{b)} \begin{cases} \sin\varphi \cos U = \cos N \cos t \\ \cos\varphi \cos U = \sin N \\ \sin U = \cos N \sin t \end{cases} \qquad \text{c)} \begin{cases} \cos h \sin u = \cos n \sin(N+\delta) \\ \cos h \cos u = \cos(N+\delta) \\ \sin h = \sin n \sin(N+\delta); \end{cases}$$

führt man endlich noch den Winkel zwischen dem Deklinations- und dem Vertikalkreis des Gestirnes ein, den häufig gebrauchten sogenannten parallaktischen Winkel $ZOP = q$, so kommt für diesen:

$$\text{d)} \begin{cases} \cos h \sin q = \cos n \\ \cos h \cos q = \sin n \cos(N+\delta). \end{cases}$$

Tabuliert man nun ein für allemal die Größen

$$N, \quad C = \cos n, \quad D = \sin n, \quad E = \operatorname{cotg} n, \quad U$$

mit dem Argumente t, so hat man zur Bestimmung von a, h, q aus t und δ lediglich zu rechnen

$$(12) \qquad \begin{aligned} \operatorname{tg} u &= C \operatorname{tg}(N+\delta) \qquad a = U + u \\ \sin h &= D \sin(N+\delta) \\ \operatorname{tg} q &= E \sec(N+\delta). \end{aligned}$$

Solche Tafeln findet man als „parallaktische Hilfstafeln" auf allen Sternwarten.

Will man ohne Benutzung von Tafeln die Formeln (10) nur einfacher einrichten, so fällt man vom Gestirn O das Lot $OQ = k$ auf den Meridian, nennt $PQ = K$, worauf aus dem Dreieck OPQ zur Berechnung von k und K folgt:

$$\begin{aligned} \cos k \sin K &= \cos\delta \cos t \\ \cos k \cos K &= \sin\delta \\ \sin k &= \cos\delta \sin t \\ -90^0 < k &< +90^0 \end{aligned}$$

und hierauf aus (10), oder aus dem Dreieck ZOQ:

$$(10\text{a}) \qquad \begin{aligned} \cos h \sin a &= \sin k \\ \cos h \cos a &= -\cos k \cos(K+\varphi) \\ \sin h &= \cos k \sin(K+\varphi). \end{aligned}$$

Man kann diese Formeln zwar noch kürzer schreiben und k eliminieren:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} K &= \operatorname{cotg}\delta \cos t \\ \operatorname{tg} a &= -\frac{\sin K \operatorname{tg} t}{\cos(K+\varphi)} \\ \operatorname{tg} h &= -\operatorname{tg}(K+\varphi)\cos a, \end{aligned}$$

die Rechnung hiernach wird aber nicht kürzer, als nach (10a) und zudem bleibt bei letzteren nie ein Zweifel über die Wahl des Quadranten, in dem K zu nehmen ist.

12. Häufig beobachtet man Gestirne, deren Koordinaten im Äquatorialsystem α, δ bekannt sind, in einem bestimmten, gegebenen Azimut a und muß dann zur Auffindung derselben die Höhe h und den Stundenwinkel t berechnen, um aus letzterem unter Bildung von $t + \alpha = \theta$ die Sternzeit zu erhalten, in welcher das Gestirn im Azimut a erscheint. Diese Aufgabe löst man mittelst der Formeln (11), wobei man nur Zenit und Pol zu vertauschen braucht, um zu ähnlichen Umformungen zu gelangen, wie vorhin. In der Tat, fällt man (Fig. 229) jetzt vom Pol P das Lot PL auf den Vertikalkreis, nennt wieder

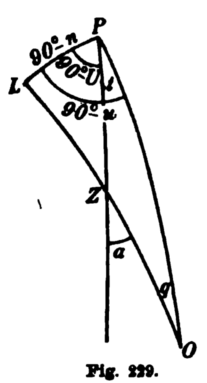


Fig. 229.

$$PL = 90^\circ - n,\quad ZL = N,\qquad \text{Winkel } LPZ = 90^\circ - U,$$
$$\text{Winkel } LPO = 90^\circ - u,$$

so ergeben die rechtwinkligen Dreiecke LPZ, LPO, da

$$LO = 90^\circ - (h - N)$$

ist:

$$\begin{array}{ll|l}
\sin n \sin N & = \cos\varphi \cos a & \sin\varphi \cos U = \cos N \cos a \\
\sin n \cos N & = \sin\varphi & \cos\varphi \cos U = \sin N \\
\cos n & = \cos\varphi \sin a & \qquad \sin U = \cos N \sin a
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll|l}
\cos(h - N) & = \cos\delta \cos u & \cos(h - N) = \cos u \cos\delta \\
\sin(h - N)\cos n & = \cos\delta \sin u & \sin(h - N)\cos q = \cos u \sin\delta \\
\sin(h - N)\sin n & = \sin\delta & \sin(h - N)\sin q = \sin u .
\end{array}$$

Man erkennt, daß man die Größen N, n, U aus den früher erwähnten Tafeln entnehmen kann, nur muß man in sie statt mit dem Argument t mit dem Argument a eingehen; es folgt dann:

$$\sin u = \operatorname{tg}\delta \operatorname{cotg} n = E \operatorname{tg}\delta;\quad t = U - u;\quad \theta = t + \alpha$$
$$\sin(h - N) = \frac{\sin\delta}{\sin n} = \frac{\sin\delta}{D} \tag{13}$$
$$\operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{tg} u}{\sin\delta};\quad \sin q = \sin a \cos\varphi \sec\delta .$$

13. Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten des Äquatorialsystems und des Ekliptikalsystems ergibt sich aus den Gleichungen (8) und (9), wenn hier nach Fig. 227 konstatiert wird, daß das letztere

System aus ersterem durch Aufdrehen um die F-Achse um den Winkel ε entstanden ist:

$$(14)\qquad \begin{aligned} \cos\delta\cos\alpha &= \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\delta\sin\alpha &= \cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon - \sin\beta\sin\varepsilon \\ \sin\delta &= \cos\beta\sin\lambda\sin\varepsilon + \sin\beta\cos\varepsilon \end{aligned}$$

$$(15)\qquad \begin{aligned} \cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\beta\sin\lambda &= \cos\delta\sin\alpha\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\varepsilon \\ \sin\beta &= -\cos\delta\sin\alpha\sin\varepsilon + \sin\delta\cos\varepsilon . \end{aligned}$$

Man kann diese Formeln wieder durch Anwendung der drei Hauptformeln der sphärischen Trigonometrie auf das Dreieck PON (Fig. 227) erhalten mit Beachtung, daß die Seiten desselben

$$PN = \varepsilon, \quad PO = 90^\circ - \delta, \quad NO = 90^\circ - \beta$$

und die Winkel

$$NPO = 90^\circ + \alpha, \quad PNO = 90^\circ - \lambda$$

sind. Der Winkel am Gestirn $PON = \eta$, der offenbar eine ähnliche Rolle spielt wie der parallaktische, ergibt sich aus den Gleichungen:

$$(16)\qquad \begin{aligned} \cos\delta\sin\eta &= \cos\lambda\sin\varepsilon \\ \cos\delta\cos\eta &= \cos\beta\cos\varepsilon - \sin\beta\sin\lambda\sin\varepsilon \qquad \text{oder} \\ \cos\beta\sin\eta &= \cos\alpha\sin\varepsilon \\ \cos\beta\cos\eta &= \cos\delta\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\alpha\sin\varepsilon . \end{aligned}$$

Die Formeln (14) werden kaum jemals gebraucht, die Formeln (15) aber sehr häufig und ihre Resultate bilden dann die Grundlage weiterer umfangreicher Rechnungen. Es ist daher wünschenswert, sie bequemer einzurichten und mit sicheren Kontrollen auszustatten. Führt man den Bogen vom Frühlingspunkt zum Gestirnsort $FO = m$ und seine Neigung gegen den Äquator $\measuredangle\, OFA = M$ ein, so gibt das Dreieck OFG (Fig. 230)

$$\begin{aligned} \sin m \sin M &= \sin\delta \\ \sin m \cos M &= \cos\delta\sin\alpha \qquad 0 < m < 180 \\ \cos m &= \cos\delta\cos\alpha \end{aligned}$$

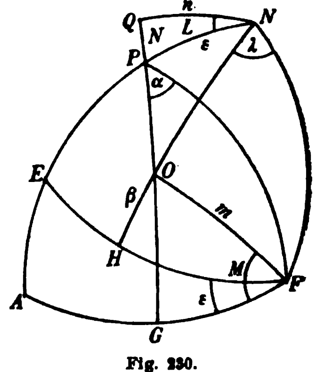


Fig. 230.

und dann das Dreieck OFH, oder die Substi-

tution dieser Ausdrücke in (15):

$$(15a)\qquad \begin{aligned} \cos\beta\cos\lambda &= \cos m \\ \cos\beta\sin\lambda &= \sin m\cos(M-\varepsilon) \\ \sin\beta &= \sin m\sin(M-\varepsilon)\,. \end{aligned}$$

Als Kontrollformeln kann man die *Napier*schen Analogien

$$(17)\qquad \begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}(\lambda-\alpha)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\delta+\beta) &= \cos\tfrac{1}{2}(\lambda+\alpha)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon \\ \cos\tfrac{1}{2}(\lambda-\alpha)\quad\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\delta-\beta) &= \sin\tfrac{1}{2}(\lambda+\alpha)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon \end{aligned}$$

oder wenn man nach (15a) gerechnet hat, die folgenden leicht abzuleitenden benützen:

$$(18)\qquad \begin{aligned} \cos\beta\sin(\lambda-\alpha) &= 2\sin m\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin(M-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\cos\alpha \\ \sin\tfrac{1}{2}(\delta-\beta) &= \sin m\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos(M-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\sec\tfrac{1}{2}(\delta+\beta)\,. \end{aligned}$$

14. Hat man die Umwandlung von α und δ in λ und β sehr häufig auszuführen und wird hierbei nur eine mäßige Genauigkeit verlangt, so lohnt sich die Anlage von Tafeln, die mit dem Argument α eine Reihe von Hilfsgrößen geben, mittels derer dann λ und β durch einfache Ausdrücke folgen. Fällt man vom Pol der Ekliptik N das Lot NQ auf den Deklinationskreis des Gestirnes, nennt $NQ = n$, $PQ = N$, $\sphericalangle\, QNP = L$, so folgt aus dem Dreieck PQN (Fig. 230)

$$\text{a)}\qquad \begin{aligned} \sin n &= \sin\varepsilon\cos\alpha \\ \cos n\sin N &= \sin\varepsilon\sin\alpha \\ \cos n\cos N &= \cos\varepsilon \end{aligned} \qquad\Bigg|\qquad \begin{aligned} \sin n &= \sin\varepsilon\cos\alpha \\ \cos n\sin L &= \sin\alpha \\ \cos n\cos L &= \cos\varepsilon\cos\alpha \end{aligned}$$

und dann aus dem Dreieck OQN:

$$\begin{aligned} \cos\beta\sin(\lambda-L) &= \sin(\delta-N)\sin n \\ \cos\beta\cos(\lambda-L) &= \cos(\delta-N) \\ \sin\beta &= \sin(\delta-N)\cos n \end{aligned} \qquad\Bigg|\qquad \begin{aligned} \cos\beta\sin\eta &= \sin n \\ \cos\beta\cos\eta &= \cos n\cos(\delta-N) \\ \sin\beta &= \cos n\sin(\delta-N)\,. \end{aligned}$$

Tabuliert man mit dem Argument α die aus a) mit einem konstanten ε zu berechnenden: N, L, $a = \sin n$, $b = \operatorname{cotg} n$, $c = \cos n$, so folgt:

$$(19)\qquad \begin{aligned} \operatorname{tg}(\lambda-L) &= a\operatorname{tg}(\delta-N) \\ \operatorname{tg}\beta &= b\sin(\lambda-L) = c\operatorname{tg}(\delta-N)\cos(\lambda-L), \\ \operatorname{cotg}\eta &= b\cos(\delta-N) \end{aligned}$$

oder auch für geringere Genauigkeit

$$\lambda = L + a(\delta - N) \sec \beta$$
$$\beta = c(\delta - N).$$

Die Schiefe der Ekliptik ε ist nicht konstant, wenn auch die Änderung nur eine geringe ist; man muß also entweder von Zeit zu Zeit die Tafel erneuern oder die Änderungen der Hilfsgrößen mit ε berechnen und berücksichtigen.

§ 87. Die Bestimmung einer Bahnebene und eines Punktes derselben.

15. Wir besprechen gleich an dieser Stelle die Mittel, durch welche man die Bahnebene eines Planeten gegen die Koordinatensysteme der Ekliptik oder des Äquators bestimmt. Wird durch den Mittelpunkt der Sphäre — im jetzigen Falle zusammenfallend mit dem Mittelpunkte der Sonne, eine Ebene gelegt, in der sich die Bahn eines Planeten oder Kometen befindet, so schneidet diese die Kugel in einem Hauptkreis, dessen Lage auf der Kugel auch die Lage der Ebene bestimmt. Die Lage dieses Kreises bestimmt man durch die Länge seines aufsteigenden Knotens: $\Omega = FK$ und seine Neigung $i = \measuredangle\, OKE$ gegen die Ekliptik, wobei man übereingekommen ist, als aufsteigenden Knoten jenen der beiden Schnittpunkte von Bahnkreis und Ekliptik zu bezeichnen, in welchem in der Richtung der Bewegung des Planeten dieser von der südlichen Halbkugel in die nördliche übertritt und als Neigung jenen zwischen 0^0 und 180^0 liegenden Winkel, der von den beiden in der Richtung der Längenzählung und in der Richtung der Bewegung von K ausgehenden Zweigen der Ekliptik und der Bahn gebildet wird. Die Lage eines Punktes O in der Bahn ist fixiert durch seine Entfernung $KO = u$ vom Knoten; durch die Angabe dieses Punktes kann die Lage der Bahn in der Bahnebene selbst fixiert werden, indem man z. B. annimmt, daß er die Projektion des Perihels der Bahn an die Sphäre sei. Die drei Stücke Ω, i, u bestimmen dann völlig die Lage der Bahn im Raum unter Benutzung der Ekliptik; dieselben Stücke bezogen auf den Äquator

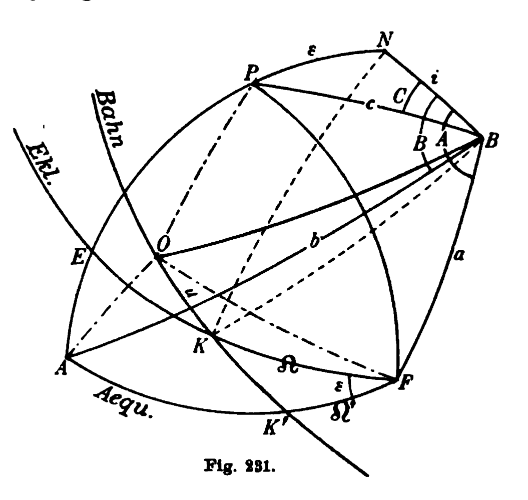


Fig. 231.

bezeichnen wir mit $\Omega' = FK'$, $i' = \sphericalangle OK'A$, $u' = K'O$ und stellen uns als erste Aufgabe, die Beziehungen zwischen Ω, i, u einerseits und Ω', i', u' anderseits aufzustellen. Das Knotendreieck FKK', in welchem

$$FK = \Omega \quad FK' = \Omega' \quad K'K = u' - u$$
$$\sphericalangle KFK' = \varepsilon, \quad \sphericalangle FKK' = i, \quad \sphericalangle KK'F = 180^0 - i'$$

ist, liefert sofort:

$$\begin{aligned}
&\sin i \sin \Omega = \sin i' \sin \Omega' \\
(20) \qquad &\sin i \cos \Omega = \sin i' \cos \Omega' \cos \varepsilon - \cos i' \sin \varepsilon \\
&\cos i = \sin i' \cos \Omega' \sin \varepsilon + \cos i' \cos \varepsilon \\
&\sin i \sin (u' - u) = \sin \Omega' \sin \varepsilon \\
&\sin i \cos (u' - u) = - \cos i' \cos \Omega' \sin \varepsilon + \sin i' \cos \varepsilon .
\end{aligned}$$

Noch bequemere Ausdrücke erhält man durch Anwendung der Gaußschen Formeln.

16. Wir gehen jetzt über zu der für die astronomische Rechenpraxis, nämlich für die Ephemeridenrechnung, wichtigen Aufgabe, die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes O, also eines beliebigen Ortes des Planeten in seiner Bahn, in bezug auf beide Systeme zu ermitteln und zwar unter der Bedingung, daß die konstanten Größen Ω, i bzw. Ω', i' getrennt erscheinen von den variabeln u bzw. u' und unter der weiteren Voraussetzung, daß entweder Ω, i, u oder Ω', i', u' gegeben seien.

Wir bezeichnen die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes O im System der Ekliptik mit x, y, z, im System des Äquators mit x', y', z', dann ist, wenn r die Entfernung des Planeten von der Sonne also der Radius der durch den Planeten gelegten Kugel ist:

$$\frac{x}{r} = \cos (FO) \qquad \frac{x'}{r} = \cos (FO)$$
$$\frac{y}{r} = \cos (EO) \qquad \frac{y'}{r} = \cos (AO)$$
$$\frac{z}{r} = \cos (NO) \qquad \frac{z'}{r} = \cos (PO).$$

Es kommt nun darauf an, diese Cosinus durch $\Omega i u$ oder $\Omega' i' u'$ auszudrücken. Sollen die rechtwinkligen Koordinaten in einem System mittelst der zum anderen System gehörigen Bahnbestimmungsstücke ausgedrückt werden, also z. B. x', y', z' durch $\Omega i u$, so verbinden wir den Pol B der Bahn mit den Achsen F, A, P des Äquatorialsystems,

nennen

$$BF = a, \quad BA = b, \quad BP = c$$

und die Winkel dieser Hauptkreise mit dem Hauptkreis durch B und den Pol N des Ekliptikalsystems (gezählt um B herum in derselben Richtung wie $\sphericalangle KBO = u$) nämlich $FBN = A$, $ABN = B$, $PBN = C$, dann ist in den Dreiecken OBF, OBA, OBP die gemeinsame Seite $OB = 90^0$ und die Winkel $OBF = A + u - 90^0$, $OBA = B + u - 90^0$, $OBP = C + u - 90^0$, da $\sphericalangle KBN = 90^0$ ist, und daher

$$\begin{aligned} \cos(FO) &= \sin a \sin(A + u) \\ \cos(AO) &= \sin b \sin(B + u) \\ \cos(PO) &= \sin c \sin(C + u). \end{aligned}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst, wenn noch a, b, c, A, B, C durch die Stücke Ω und i, von denen sie offenbar allein abhängen, ausgedrückt sind. Hiezu dienen die Dreiecke FBN, ABN, PBN, in denen

$$BN = i, \quad PN = \varepsilon, \quad \sphericalangle BNF = 90^0 - \Omega,$$
$$\sphericalangle BNA = \sphericalangle BNP = 180^0 - \Omega;$$

man erhält:

$$\begin{aligned} \sin a \sin A &= \cos \Omega \\ \sin a \cos A &= -\cos i \sin \Omega \\ \cos a &= \sin i \sin \Omega \\[1ex] \sin b \sin B &= \cos \varepsilon \sin \Omega \\ \sin b \cos B &= -\sin i \sin \varepsilon + \cos i \cos \varepsilon \cos \Omega \\ \cos b &= -\cos i \sin \varepsilon - \sin i \cos \varepsilon \cos \Omega \\[1ex] \sin c \sin C &= \sin \varepsilon \sin \Omega \\ \sin c \cos C &= \sin i \cos \varepsilon + \cos i \sin \varepsilon \cos \Omega \\ \cos c &= \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon \cos \Omega, \end{aligned} \tag{21}$$

wozu als Schlußformeln kommen:

$$\begin{aligned} x' &= r \sin a \sin(A + u) \\ y' &= r \sin b \sin(B + u) \\ z' &= r \sin c \sin(C + u). \end{aligned}$$

Sollen die rechtwinkligen Koordinaten in einem System mittelst der zum selben System gehörigen Bahnbestimmungsstücke ausgedrückt werden, also z. B. $x'y'z'$ durch Ω', i', u', dann werden die Formeln

natürlich einfacher; sie ergeben sich offenbar aus obigen, wenn man $\varepsilon = 0$ setzt und statt $i \Omega$ einführt $i' \Omega'$; also:

$$
\begin{aligned}
\sin a' \sin A' &= \cos \Omega' \\
\sin a' \cos A' &= -\cos i' \sin \Omega' \\
\cos a' &= \sin i' \sin \Omega'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin b' \sin B' &= \sin \Omega' \\
\sin b' \cos B' &= \cos i' \cos \Omega' \\
\cos b' &= -\sin i' \cos \Omega'
\end{aligned}
\tag{22}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\sin c' \sin C' &= 0 \\
\sin c' \cos C' &= \sin i' \\
\cos c' &= \cos i'
\end{aligned}
\right| \quad \text{also} \quad
\begin{aligned}
C' &= 0 \\
c' &= i'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x' &= r \sin a' \sin (A' + u') \\
y' &= r \sin b' \sin (B' + u') \\
z' &= r \sin c' \sin (C' + u').
\end{aligned}
$$

Die übrigen Fälle, die in der Praxis kaum vorkommen, lassen sich ebenso erledigen. Die Größen a, b, c, A, B, C heißen die Gaußschen Konstanten, da sie zuerst von ihm in die Ephemeridenrechnung eingeführt wurden. Von den vielen Beziehungen, die zwischen ihnen bestehen, erwähnen wir nur die eine:

$$
\frac{\sin b \sin c \sin (B - C)}{\sin a \cos A} = -\operatorname{tg} i,
$$

die meist zur Kontrolle benutzt wird.

Fällt die Bahn eines Planeten mit der Ekliptik zusammen, wie z. B. die Erdbahn, und sollen die Äquatorealkoordinaten $X' Y' Z'$ eines Punktes derselben bestimmt werden, dann bedarf man der Gaußschen Konstanten nicht; denn setzt man in (21) $i = 0$ und $\Omega + u = L =$ der Länge der Erde, so folgt einfach

$$
\begin{aligned}
X' &= R \cos L \\
Y' &= R \sin L \cos \varepsilon \\
Z' &= R \sin L \sin \varepsilon.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

§ 88. Ephemeridenrechnung.

17. Zum Abschluß dieser Ausführungen über die Koordinatensysteme behandeln wir die Verbindung von Koordinaten, die sich auf verschiedene Anfangspunkte beziehen, also z. B. auf die Sonne — heliozentrisches System und die Erde — geozentrisches System. Wir werden hier zwei verschiedene Typen von Formeln zu unterscheiden haben, je nachdem es sich um besonders einfache Ausdrücke für die Berechnung der geozentrischen Koordinaten aus den heliozentrischen handelt (Ephemeridenrechnung) oder um Ausdrücke, welche alle Bestimmungsstücke in einfachster Form und geringster Anzahl enthalten, um als Grundlage für die Ermittelung der heliozentrischen Bahn aus geozentrischen Beobachtungen zu dienen (Bahnbestimmung).

18. Im ersteren Fall wollen wir das Äquatorealsystem zur Grundlage nehmen und zwei Systeme mit parallelen Achsen betrachten, von denen das eine den Anfangspunkt in der Sonne S, das andere in der Erde E hat. Die Richtungen nach einem Gestirn O von beiden Anfangspunkten aus haben die Richtungscosinus:

$$\frac{x'}{r} \quad \frac{y'}{r} \quad \frac{z'}{r} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\xi'}{\varrho} \quad \frac{\eta'}{\varrho} \quad \frac{\zeta'}{\varrho},$$

wenn $SO = r$ $EO = \varrho$ genannt wird; die Richtungscosinus der Richtung SE seien

$$\frac{X'}{R} \quad \frac{Y'}{R} \quad \frac{Z'}{R},$$

wenn $SE = R$ gesetzt wird. Projiziert man das Dreieck SEO mit den drei Seiten r, ϱ, R auf die Achsen des Systems S, so ist die Summe der Projektionen auf jede der drei Achsen Null; man hat also die Gleichungen

$$\begin{aligned} R\frac{X'}{R} + \varrho\frac{\xi'}{\varrho} - r\frac{x'}{r} &= 0 \\ R\frac{Y'}{R} + \varrho\frac{\eta'}{\varrho} - r\frac{y'}{r} &= 0 \\ R\frac{Z'}{R} + \varrho\frac{\zeta'}{\varrho} - r\frac{z'}{r} &= 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Sind α und δ die im System E bestimmten Polarkoordinaten Rektaszension und Deklination, also die geozentrischen beobachtbaren Koordinaten des Gestirnes, so werden die Richtungscosinus nach (1) (S. 470)

$$\frac{\xi'}{\varrho} = \cos\delta\cos\alpha \quad \frac{\eta'}{\varrho} = \cos\delta\sin\alpha \quad \frac{\zeta'}{\varrho} = \sin\delta.$$

Werden diese und $\frac{x'}{r}\ \frac{y'}{r}\ \frac{z'}{r}$ aus (21) in (24) eingetragen, so folgt

$$
\begin{aligned}
\varrho \cos\delta \cos\alpha &= r \sin a \sin(A+u) - X' \\
\varrho \cos\delta \sin\alpha &= r \sin b \sin(B+u) - Y' \qquad (25)\\
\varrho \sin\delta &= r \sin c \sin(C+u) - Z'.
\end{aligned}
$$

Dies sind die grundlegenden Gleichungen der Ephemeridenrechnung, welche den geozentrischen Ort ϱ, α, δ aus dem heliozentrischen des Gestirnes und der Erde berechnen lassen. Die Größen $-X', -Y', -Z'$ finden sich in den astronomischen Jahrbüchern vorausberechnet vor oder können aus (23) gewonnen werden; r und u werden aus der heliozentrischen Bewegung der Gestirne bestimmt, a, b, c, A, B, C sind lediglich Funktionen der Elemente der Bahnlage Ω, i gegen die Ekliptik.

19. Im zweiten Fall wählen wir das System der Ekliptik als zu Grunde liegendes Koordinatensystem, um für die Erdörter möglichst einfache Ausdrücke zu haben; auf sie beziehen sich dann auch die zu bestimmenden Elemente der Bahnlage Ω, i, u. Wir schlagen die Sphäre um die Sonne S und projizieren auf sie den Erdort nach E, den Gestirnsort nach H; die geozentrische Richtung EO, parallel nach S verschoben und ebenfalls an die Sphäre projiziert treffe nach dem Punkt G (Fig. 232), dann stellen E, H, G den heliozentrischen Ort der Erde und des Gestirns und den geozentrischen des Gestirns dar und man konstatiert zuerst, daß die drei Punkte in einem Hauptkreis liegen.

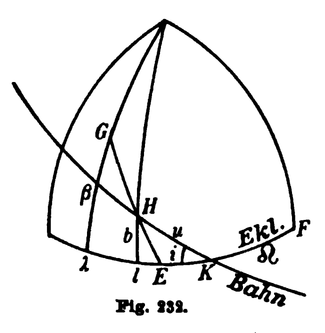


Fig. 232.

Sind ferner L, l, λ die Längen, $0, b, \beta$ die Breiten dieser drei Punkte, so werden die Richtungscosinus

$$
\begin{aligned}
\frac{X}{R} &= \cos L, & \frac{x}{r} &= \cos b \cos l, & \frac{\xi}{\varrho} &= \cos\beta\cos\lambda \\
\frac{Y}{R} &= \sin L, & \frac{y}{r} &= \cos b \sin l, & \frac{\eta}{\varrho} &= \cos\beta\sin\lambda \\
\frac{Z}{R} &= 0, & \frac{z}{r} &= \sin b, & \frac{\zeta}{\varrho} &= \sin\beta
\end{aligned}
$$

und daher die auf die Ekliptik angewendeten Gl. (24):

$$
\begin{aligned}
\varrho\cos\beta\cos\lambda &= r\cos b\cos l - R\cos L \\
\varrho\cos\beta\sin\lambda &= r\cos b\sin l - R\sin L \qquad (26)\\
\varrho\sin\beta &= r\sin b.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen können sofort so umgestaltet werden, daß die Stücke Ω, i, u explizite erscheinen; wir wollen dies gleich auf einem allgemeineren Wege zu erreichen suchen, der uns noch andere nützliche Umformungen verschafft. Führen wir statt des Frühlingspunktes F einen andern Punkt F_1 in der Ekliptik von der Länge N ein, von dem aus alle Längen gezählt werden sollen, so werden die Richtungskosinus $\frac{X}{R} = \cos(L - N)$, ... und daher die Gl. (24)

$$(27)\quad \begin{aligned} \varrho \cos\beta \cos(\lambda - N) &= r \cos b \cos(l - N) - R \cos(L - N) \\ \varrho \cos\beta \sin(\lambda - N) &= r \cos b \sin(l - N) - R \sin(L - N) \\ \varrho \sin\beta &= r \sin b. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (26) bleiben also ungeändert, wenn man alle Längen um denselben Betrag ändert. Dem beliebigen Winkel N kann man nun Spezialwerte zulegen, z. B. $N = L$ setzen, wodurch folgende besonders zur Berechnung der heliozentrischen Koordinaten aus den geozentrischen geeignete Gleichungen entstehen:

$$(28)\quad \begin{aligned} r \cos b \cos(l - L) &= \varrho \cos\beta \cos(\lambda - L) + R \\ r \cos b \sin(l - L) &= \varrho \cos\beta \sin(\lambda - L) \\ r \sin b &= \varrho \sin\beta. \end{aligned}$$

Setzt man $N = \Omega$, so erhält man zuerst

$$\begin{aligned} \varrho \cos\beta \cos(\lambda - \Omega) &= r \cos b \cos(l - \Omega) - R \cos(L - \Omega) \\ \varrho \cos\beta \sin(\lambda - \Omega) &= r \cos b \sin(l - \Omega) - R \sin(L - \Omega) \\ \varrho \sin\beta &= r \sin b, \end{aligned}$$

und wenn man aus dem Dreieck KHl die Beziehungen

$$(29)\quad \begin{aligned} \cos b \cos(l - \Omega) &= \cos u \\ \cos b \sin(l - \Omega) &= \cos i \sin u \\ \sin b &= \sin i \sin u \end{aligned}$$

entnimmt und darin substituiert:

$$(30)\quad \begin{aligned} \varrho \cos\beta \cos(\lambda - \Omega) &= r \cos u - R \cos(L - \Omega) \\ \varrho \cos\beta \sin(\lambda - \Omega) &= r \sin u \cos i - R \sin(L - \Omega) \\ \varrho \sin\beta &= r \sin u \sin i. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen repräsentieren die einfachste Verbindung zwischen den geozentrischen, also beobachtbaren Koordinaten $\lambda\beta$ einerseits und den heliozentrischen Bestimmungsstücken der Bahn i und Ω und den Polarkoordinaten r, u andererseits; letztere sind aus der ebenen Kegelschnittsbewegung des Gestirns abzuleiten.



Zwölfter Abschnitt.

Die astronomische Zeitrechnung.

§ 89. Sternzeit und mittlere Zeit.

1. Seit den ältesten Zeiten ist die Zeitrechnung nach den Gestirnen geregelt worden und der Astronomie die Aufgabe zugefallen, für die nötigen Einrichtungen zu sorgen und die ständige Zeitbestimmung auszuführen. Es sollen hier zuerst die Einrichtungen der Zeitrechnung besprochen werden, die Methoden der Zeitbestimmung aber einem späteren Abschnitt vorbehalten werden.

Wir können die Zeit nur durch die Beobachtung der Bewegung eines Körpers messen. Die Einfügung der Ereignisse in die Phasen einer gewählten fundamentalen Bewegung gestattet deren zeitliche Fixierung. Als fundamentale Bewegung empfiehlt sich eine periodische Winkelbewegung, wie die Umdrehung der Erde um ihre Achse, von der angenommen wird, daß sie mit völliger Gleichförmigkeit erfolge. Die Zeitmessung wird dann zur Winkelmessung, zu deren Ausführung geteilte Kreise oder Uhren dienen können. Jedes Zeitmoment und jedes Zeitintervall ist gegeben durch einen Winkel. Man hat neben der üblichen Gradteilung des Kreisumfanges in 360^{0} zu $60'$ zu $60''$ noch eine sogenannte Zeitteilung, bei der der Kreisumfang in 24^{h} zu 60^{m} zu 60^{s} geteilt wird. Das Verhältnis zwischen beiden ist also folgendes:

$$1^{h} = 15^{0} \qquad 1^{0} = 4^{m}$$
$$1^{m} = 15' \qquad 1' = 4^{s}$$
$$1^{s} = 15'' \qquad 1'' = 0^{s},066\ldots,$$

d. h. der Übergang vom Gradmaß zum Zeitmaß geschieht durch Division mit 15, der umgekehrte durch Multiplikation mit 15.

2. Um die Rotation der Erde durch Winkel messen zu können, muß ein Punkt an der Himmelssphäre vereinbart werden und muß auf der Erde selbst ein Index, der stets zugänglich ist, definiert werden. Der Winkel zwischen dem Strahl nach dem vereinbarten Punkte und dem

Index mißt die stattgehabte Bewegung und gibt das Maß für die dazu gebrauchte Zeit. Als Index wählt man die feste Meridianebene des Erdortes, welche die Himmelssphäre in einem Hauptkreis schneidet, der durch die Pole der Drehung und durch das Zenit des Ortes hindurchgeht. Dieser Meridian überstreicht mit der rotierenden Erde die Himmelssphäre in der Richtung von West nach Ost. Fixpunkte an der Sphäre, die zur Zeitmessung Verwendung finden, sind zwei im Gebrauch, die beide auf dem Äquator liegen: 1. der Frühlingspunkt F; 2. der Mittelpunkt S einer fingierten im Äquator sich gleichmäßig bewegenden Sonne, die stets möglichst nahe an der wahren Sonne bleibt. Beide Punkte sind bewegt und müssen scharf definiert werden. Jeder gibt Anlaß zu einer besonderen Zeiteinteilung, der erste zur Sternzeit für den internen astronomischen Gebrauch, der zweite zur mittleren Sonnenzeit für die allgemein menschlichen Bedürfnisse. Der Winkel zwischen dem Meridian und den Punkten F oder S oder einem anderen Punkt des Äquators wird, wie schon früher erwähnt, Stundenwinkel genannt und in der entgegengesetzten Richtung der Bewegung vom Meridian aus gezählt.

3. Sternzeit. Der Frühlingspunkt ist unter den Gestirnen nicht fest, sondern führt eine später zu besprechende, Präzession und Nutation genannte Bewegung aus; diese Bewegung ist keine gleichförmige, aber der Unterschied von einer solchen ist so gering, daß praktisch der Benutzung des wahren Frühlingspunktes zur Herstellung eines gleichförmigen Zeitmaßes kein Bedenken entgegensteht. Man definiert:

1. Der Moment, in welchem der Meridian eines Ortes über den wahren Frühlingspunkt hinweggeht, ist der Beginn eines Zeitintervalles, des Sterntages, dessen Ende mit der nächsten Koinzidenz von Meridian und Frühlingspunkt zusammenfällt.

2. Der Stundenwinkel des wahren Frühlingspunktes mißt die seit Beginn des Sterntages verflossene Ortssternzeit.

3. Der Unterschied der Ortssternzeiten zweier Meridiane ist gleich der Längendifferenz λ derselben und zwar hat der östlich gelegene Ort die um λ größere Sternzeit. Wird, wie üblich, die Längendifferenz λ nach Westen positiv, nach Osten negativ von dem Fundamentalmeridian aus bis $180^0 = 12^h$ gezählt, so wird also die Sternzeit des Ortes gleich der Sternzeit im Fundamentalmeridian $- \lambda$.

4. Die Sternzeit θ kann durch jedes Gestirn bestimmt werden, dessen wahre Rektaszension α bekannt und dessen Stundenwinkel t gemessen ist, denn man hat:

$$\theta = t + \alpha .$$



Ist $t = 0$, d. h. wird der Moment beobachtet, in welchem der Meridian über das Gestirn hinweggeht, so wird für diesen Moment $\theta = \alpha$, d. h. durch die Rektaszension eines durch den Ortsmeridian gehenden Gestirnes ist direkt die im selben Moment stattfindende Sternzeit gegeben.

4. Mittlere Zeit. Die auf den Frühlingspunkt gegründete Zeitrechnung ist für das bürgerliche Leben ungeeignet und wird durch eine auf die Sonne basierte ersetzt, da diese die auffälligste Erscheinung der Erdrotation, den Wechsel von Tag und Nacht, hervorbringt. Die wirkliche Sonne ist jedoch zu einer Zeiteinteilung nicht zu gebrauchen, da ihre Bewegung in einer Ellipse um die Erde stattfindet, also ungleichförmig ist, und in einer zum Äquator geneigten Ebene, der Ekliptik erfolgt. Man ersetzt sie durch eine fingierte „mittlere Sonne“, die sich gleichmäßig im Äquator bewegt und stets so nahe als möglich bei der wirklichen Sonne bleibt. Dies wird erreicht, wenn man die fingierte Sonne sich mit derselben mittleren Geschwindigkeit im Äquator bewegen läßt, mit der sich die wahre Sonne in der Ekliptik bewegt. Die fingierte Sonne wird hiernach durch folgenden Ausdruck ihrer Rektaszension definiert:

$$\begin{aligned} A &= 279^\circ\, 39'\, 15''.51 + (3548''.33043 \times 365.25)\, t + 0''.000\,1395\, t^2 \\ (1) \qquad & \qquad + \text{Nutation in Rektaszension,} \end{aligned}$$

oder in Zeitteilung:

$$\begin{aligned} A &= 18^h\, 38^m\, 37^s.034 + (3^m\, 56^s.55536 \times 365 \cdot 25)\, t + 0^s.0000093\, t^2 \\ & \qquad + \text{Nutation in Rektaszension,} \end{aligned}$$

wobei t in julianischen Jahren von dem Moment 1900 Jan. 0 = 1899 Dez. 31 0^h mittl. Zeit Berlin an gezählt wird. Die auf diesen Punkt basierte Zeit heißt „mittlere Sonnenzeit“ und wird durch folgende Definitionen reguliert:

1. Der Moment, in welchem der Meridian eines Ortes über die „mittlere Sonne“ hinweggeht (mittlerer Mittag), ist der Beginn eines Zeitintervalles, des mittleren Sonnentages, dessen Ende mit der nächstfolgenden Koinzidenz von Meridian und mittlerer Sonne zusammenfällt. Im bürgerlichen Gebrauch läßt man den mittleren Sonnentag um einen halben Tag früher beginnen, d. h. wenn die Sonne in dem unter dem Horizont liegenden Teile des Meridians sich befindet.

2. Der Stundenwinkel der mittleren Sonne mißt die seit Beginn des mittleren Sonnentages verflossene mittlere Ortszeit.

3. Der Unterschied der mittleren Ortszeiten zweier Meridiane ist gleich der Längendifferenz λ derselben und zwar hat der östliche die um λ größere mittlere Zeit. Es versteht sich von selbst, sei aber wegen mancher Verfehlungen dagegen ausdrücklich hervorgehoben, daß für λ derselbe in Zeit ausgedrückte Winkel zu nehmen ist, ob er nun zur Sternzeit oder zur mittleren Zeit hinzugefügt wird; denn λ ist sowohl der Unterschied der gleichzeitigen Sternzeiten wie der mittleren Zeiten zweier Meridiane.

4. Die Bestimmung der mittleren Sonnenzeit kann mittelst der wirklichen Sonne geschehen, indem man deren Stundenwinkel mißt, wenn man den Unterschied der Rektaszensionen der wirklichen und der mittleren Sonne kennt und durch Rechnung berücksichtigt; dieser Unterschied muß durch die Theorie der Bewegung der Sonne (Sonnentafeln) geliefert werden und heißt Zeitgleichung in dem Sinne:

Zeitgl. = Rektasz. der wirklichen Sonne — Rektasz. der mittl. Sonne

= Stundenwinkel der mittl. Sonne — Stundenw. der wahren Sonne.

= Mittlere Sonnenzeit — wahre Sonnenzeit.

Die wahre Sonnenzeit wird auch durch die Sonnenuhren direkt angezeigt; sie wird durch Hinzufügung der Zeitgleichung in mittlere Zeit verwandelt. Die Zeitgleichung, die bis $16^1/_2$ Minuten anwachsen kann, erklärt die ungleiche Dauer von „Vormittag", d. h. der Zeit von Aufgang der wahren Sonne bis zum mittleren Mittag, und „Nachmittag", d. h. der Zeit vom mittleren Mittag bis zum Sonnenuntergang. In der Regel bestimmt man die mittlere Zeit nicht durch die Sonne, sondern durch Vermittlung der Sternzeit; hierzu muß das Verhältnis der beiden ermittelt werden.

5. Beziehung zwischen Sternzeit und mittlerer Zeit. Die Formel (1) zeigt, daß die mittlere Sonne sich in jedem mittleren Tag um den Winkel

$$3548''.33043 = 3^m\,56^s.55536$$

in der Richtung der Rotationsbewegung, also von West nach Ost, gegen den Frühlingspunkt verschiebt. Da der Meridian in einem Sterntag

$$360^0 = 1296000'' = 86400^s$$

beschreibt, so braucht er

$$\frac{3548''.33043}{1296000} = \frac{236^s.55536}{86400} = 0.002737909 \text{ Sterntage,}$$

um die bewegte mittlere Sonne einzuholen, und es ist daher

$$1 \text{ mittl. Sonnentag} = 1.002\,737\,909 \text{ Sterntage,}$$

woraus

$$1 \text{ Sterntag} = 0.997\,269\,567 \text{ mittl. Sonnentage,}$$

oder in Stunden, Minuten, Sekunden ausgedrückt:

$$1 \text{ mittl. Sonnentag} = 24^h\ 3^m\ 56^s.55536 \text{ Sternzeit}$$
$$1 \text{ Sterntag} = 23\ \ 56\ \ 4.09058 \text{ mittl. Zeit.}$$

Hieraus findet man

1 Stunde mittl. Zeit	$= 1^h\ 0^m\ 9^s.85647$	Sternzeit
1 Minute „ „	$= 1\ \ 0.16427$	„
1 Sekunde „ „	$= 1.00274$	„

und umgekehrt

1 Stunde Sternzeit	$= 59^m\ 50^s.17044$	mittl. Zeit
1 Minute „	$= 59.83617$	„ „
1 Sekunde „	$= 0.99727$	„ „

und kann hiernach leicht Tafeln entwerfen, um Intervalle, die in mittlerer Zeit ausgedrückt sind in solche von Sternzeit zu verwandeln und umgekehrt. Eine nach mittlerer Zeit gehende Uhr verliert in

$$\left(\frac{1}{0.00274}\right) \text{Sekunden} = 365^s = 6^m\ 5^s$$

eine volle Sekunde gegen eine nach Sternzeit gehende, d. h. die beiden Uhren schlagen alle $6^m\ 5^s$ genau zusammen, wodurch man ein bequemes und scharfes Mittel zur Vergleichung einer nach Sternzeit mit einer nach mittlerer Zeit gehenden Uhr erhält.

Der Überschuß von $3^m\ 56^s.55536$ Sternzeit der Dauer eines mittleren Tages über die Dauer eines Sterntages häuft sich in

$$\frac{24^h}{3^m\ 56^s.55536} = \frac{86400^s}{236.55536} = 365.242\,198\,79 \text{ mittleren Tagen}$$

zu einem vollen Sterntag an. Man hat also zwischen Sternzeit und mittlerer Zeit auch die Relation

$$366.242\,198\,79 \text{ Sterntage} = 365.242\,198\,79 \text{ mittl. Tage.}$$

Der Ausdruck (1) gestattet für $0^h\ 0^m\ 0^s$ mittlerer Zeit — mittleren Mittag — jedes Tages die Rektaszension der mittleren Sonne zu berechnen; in den astronomischen Jahrbüchern wird diese Angabe

in der Sonnenephemeride unter der zutreffenden Überschrift „Sternzeit im mittleren Mittag" für den betreffenden Grundmeridian gegeben. Für einen anderen Meridian in λ westlicher Länge ist dieser Angabe, um die für ihn geltende zu erhalten, der Betrag der Bewegung der mittleren Sonne in der Zeit λ, also $(3^m\ 56^s.55536)\lambda$ (λ in Bruchteilen des Tages) hinzuzufügen. Diese Größe ist identisch mit der Reduktion der mittleren Zeit λ in Sternzeit und kann also der betreffenden Tabelle entnommen werden. — Da die Rektaszension der mittleren Sonne im mittleren Mittag gleich dem im selben Moment stattfindenden Stundenwinkel des Frühlingspunktes ist, so stellt sie die Sternzeit im mittleren Mittag dar.

Mit diesen Mitteln kann der Übergang von einer in Sternzeit gemachten Angabe in eine Angabe in mittlerer Zeit bewerkstelligt werden und umgekehrt. Ist die Sternzeit gegeben, so zieht man davon die Sternzeit im mittleren Mittag des betreffenden Tages, eventuell unter Hinzufügung von 24^h, ab und verwandelt den Rest in mittlere Zeit. Ist die mittlere Zeit gegeben, so verwandelt man sie in Sternzeit und fügt die Sternzeit im mittleren Mittag hinzu.

Beispiele. 1. Das Datum 1910 Jan. 28 $10^h\ 18^m\ 31^s.61$ Sternzeit Hongkong ist in mittlere Zeit desselben Ortes zu verwandeln.

Wir benutzen das Berliner Jahrbuch; der Längenunterschied ist $6^h\ 43^m\ 7^s.1$ östlich, also $\lambda = -6^h\ 43^m\ 7^s.1$; die Reduktion von λ auf Sternzeit ist $1^m\ 6^s.22$, also die Korrektion der Sternzeit im Berliner mittleren Mittag $= -1^m\ 6^s.22$.

Sternzeit im Berliner mittleren Mittag 1910 Jan. 28	20^h	27^m	$19^s.90$
Korrektion	—	1	6.22
Sternzeit im Hongkonger mittl. Mittag	20	26	13.68

Gegebene Sternzeit Hongkong . .	34^h	18^m	$31^s.61$
Sternzeit im mittleren Mittag . .	20	26	13.68
Seit Mittag in Sternzeit verflossen	13	52	17.93
Reduktion auf mittlere Zeit. . .	—	2	16.35
Mittlere Zeit Hongkong	13	50	1.58

2. Das Datum 1910 Jan. 28 mittlere Zeit Hongkong $13^h\ 50^m\ 1^s.58$ ist in Sternzeit zu verwandeln.

Seit Mittag sind verflossen	13^h	50^m	$1^s.58$	mittlere Zeit
Reduktion auf Sternzeit		+ 2	16.35	
Seit Mittag verflossen	13	52	17.93	Sternzeit.

Sternzeit im mittleren Berliner Mittag	$20^h\,27^m\,19^s.90$
Korr. auf Hongkong	$-1\quad 6.22$
Sternzeit im mittl. Hongkonger Mittag	20 26 13.68
Seitdem verflossen	13 52 17.93
Sternzeit Hongkong	10 18 31.61

Wir sahen oben, in wie einfacher Weise die Sternzeit durch die Beobachtung eines Gestirnes von bekannter Rektaszension bestimmt werden kann. Durch die eben gezeigte Umwandlung von Sternzeit in mittlere Zeit lernt man also auch letztere kennen.

6. Zonenzeit. Die für den Verkehr unbequeme Verschiedenheit der Ortszeiten hat zur Einführung von Normalmeridianen geführt, deren Zeit für einen größeren Länderkomplex maßgebend sein sollte; diese hat man zuerst durch die Hauptsternwarten der betreffenden Länder gelegt, jetzt benutzt man dazu Meridiane, die eine runde Anzahl von Stunden vom Meridian von Greenwich abstehen, z. B. in Deutschland den Meridian, der $15^0 = 1^h$ östlich von Greenwich läuft. Dieser gibt dann die Zonenzeit, in Deutschland die sogenannte mitteleuropäische Zeit. Um von dieser auf Ortszeit und umgekehrt überzugehen, ist einfach die Längendifferenz gegen den Normalmeridian in der oben angegebenen Weise zu berücksichtigen. Z. B. da Straßburg gegen Greenwich die östliche Länge $31^m\,2^s.37$ hat, liegt es $28^m\,57^s.63$ westlich vom Normalmeridian der Mitteleuropäischen Zeit und daher

$$\text{Straßburger Ortszeit} = \text{Mitteleuropäische Zeit} - 28^m\,57^s.63.$$

7. Beistehende Fig. 233, die vom Nordpol gesehen die rotierende Erde WMO und das Himmelsgewölbe $W'CO'$ darstellt, läßt die Verhältnisse der verschiedenen Zeiten am einfachsten überblicken. Es sind PM und PM' zwei Erdmeridiane der Orte M und M'; M' liegt um $\lambda = \sphericalangle MPM'$ westlich von M; C und C' sind die Projektionen der Meridiane an den Himmel; F ist der Frühlingspunkt, S die mittlere Sonne, G ein beliebiges Gestirn mit der Rektaszension $\alpha = \sphericalangle FPG$. Dann ist

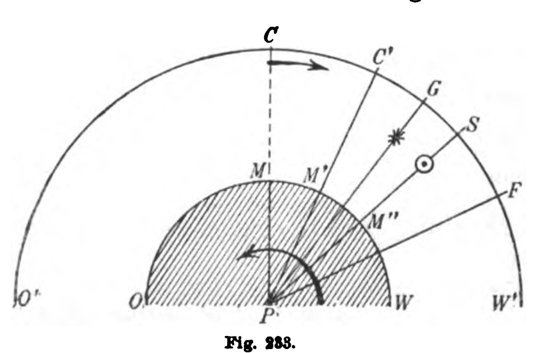


Fig. 233.

$$\text{Sternzeit in } M = \theta = \measuredangle CPF,$$
$$\text{„ „ } M' = \theta' = \measuredangle C'PF,$$
$$\theta = \theta' + \lambda$$

$$\text{Mittlere Zeit in } M = m = \measuredangle CPS,$$
$$\text{„ „ „ } M' = m' = \measuredangle C'PS,$$
$$m = m' + \lambda.$$

$$\text{Rektaszension von } G = \alpha = \measuredangle FPG,$$
$$\text{Stundenwinkel von } G \text{ in } M = t_* = \measuredangle CPG,$$
$$\text{Sternzeit in } M\text{: } \theta = \alpha + t_*;\ t_* = \theta - \alpha.$$

$$\text{Rektaszension von } S = A = \measuredangle FPS,$$
$$\text{Stundenwinkel von } S \text{ in } M = t_\odot = CPS,$$
$$\text{mittlere Zeit in } M\text{: } m = t_\odot = \theta - A \text{ oder } \theta - m = A\ ,$$

d. h. der Unterschied zwischen Sternzeit und mittlerer Zeit ist in jedem Moment gleich der Rektaszension der mittleren Sonne. Dies gilt auch für M': $\theta' - m' = A$, d. h. in demselben absoluten Zeitmoment ist für alle Erdorte der Unterschied ihrer Ortssternzeiten und ortsmittleren Zeiten derselbe.

Steht S im Meridian von M'', d. h. hat M'' mittleren Mittag, dann ist $\measuredangle\ FPS = A = \theta''$, d. h. die Rektaszension der mittleren Sonne ist gleich der Sternzeit im mittleren Mittag.

§ 90. Zeitrechnung nach Jahren.

8. Die Einteilung der Zeit in Tage gewährt die einfachste und sicherste Zeitrechnung; die Scheu vor großen Zahlen und der Wechsel der Jahreszeiten haben aber noch Zusammenfassungen dieser natürlichen Einheit zu höheren Einheiten veranlaßt, deren wichtigste zu besprechen sind.

Die mittlere Sonne durchläuft ebenso wie die wirkliche Sonne den vollen Umkreis von 360° vom Frühlingspunkt bis wieder zum Frühlingspunkte in

$$\frac{1\,296\,000}{3548.33043} = \frac{1}{0.002\,737\,909} = 365.242\,198\,79 \text{ mittleren Tagen}$$

oder in

$$\frac{1.002\,737\,909}{0.002\,737\,909} = 366.242\,198\,79 \text{ Sterntagen.}$$

Diesen Zeitraum nennt man ein tropisches Jahr. Nach einer von *Bessel* getroffenen Festsetzung beginnt man das tropische Jahr in

demjenigen absoluten Moment, in welchem die Größe (1) (S. 490) ohne die Nutation, also die mittlere Rektaszension der mittleren Sonne

$$A_0 = 279^0\,39'15''.51 + (3548''.33043 \times 365.25)t + 0''.000\,139t^2$$

jeweils den Betrag $280^0 = 18^h\,40^m$ erreicht. Sein Beginn ist somit von keiner Ortszeit abhängig, sondern ein absoluter Zeitpunkt, den man kurz mit z. B. 1911. 0 zu bezeichnen pflegt. Wegen des quadratischen Gliedes ist das tropische Jahr nicht zu allen Zeiten gleich lang; der Unterschied aber macht in 1000 Jahren erst 5^s in der Jahresdauer aus und kann für die heutige Astronomie außer Betracht bleiben.

Sowohl der Anfang als die Dauer des tropischen Jahres bringen wegen der Bruchteile des Tages für die Zeitrechnung einige Unbequemlichkeit mit sich. Man gebraucht daher neben dem tropischen Jahr ein Jahr, das aus einer ganzen Anzahl von Tagen besteht und mit dem Beginn eines mittleren Tages seinen Anfang nimmt. Die Dauer desselben hat Julius Cäsar, beraten durch den alexandrinischen Astronomen Sosigenes, derartig reguliert, daß auf drei Jahre mit 365 Tagen ein Jahr mit 366 Tagen folgen sollte, so daß die durchschnittliche Dauer eines solchen „julianischen Jahres“ 365.25 Tage beträgt; die Jahre mit 366 Tagen heißen Schaltjahre, die anderen Gemeinjahre. Dieser julianischen Zeitrechnung bedient man sich zur Datierung für alle Jahre bis zur Einführung der gregorianischen Zeitrechnung, von wo ab diese sowohl in der Astronomie als im bürgerlichen Leben gebraucht wird. Die nach Papst Gregor XIII. benannte, von dem römischen Arzt Luigi Lilio vorgeschlagene Reform der julianischen Zeitrechnung wurde durch das Bestreben hervorgerufen, dem tropischen Jahre näher zu bleiben, als es durch das julianische Jahr möglich ist; der Unterschied zwischen beiden

$$365.250\,000\,00 - 365.242\,198\,79 = 0.007\,801\,21$$

hatte im 16. Jahrh. der christlichen Aera eine Differenz von 10 Tagen zwischen der Zählung nach Tagen des tropischen und des julianischen Jahres hervorgerufen. Um dies zu korrigieren und ein ähnliches Auseinandergehen für die Zukunft zu verhindern, bestimmte Gregor durch Bulle vom 1. März 1582, daß auf den mit 4. Oktober 1582 bezeichneten Tag sofort der mit 15. Oktober 1582 zu bezeichnende Tag folgen sollte; ferner daß der Schalttag in allen durch 100 ohne Rest teilbaren Jahren ausfallen solle mit Ausnahme derjenigen, die durch 400 ohne Rest teilbar sind, welche Schalttage behalten sollen. 100 gregorianische Jahre enthalten also 36 524 Tage, 400 gregorianische Jahre aber $4 \times 36\,524 + 1 = 146\,097$ Tage, während 400 tropische Jahre $= 146\,096.879\,516$ Tage sind.



Das julianische und das gregorianische Jahr beginnt man in astronomischer Zählweise mit dem durch

Januar 0 $0^h 0^m 0^s$ mittlerer Ortszeit

bezeichneten Moment, der identisch ist mit

Dezember 31 $0^h 0^m 0^s$ mittlerer Ortszeit

des vorhergehenden Jahres; in bürgerlicher Zählweise beginnt es 12 Stunden später. Hieran reihen sich die 365 bzw. 366 Tage in der üblichen Bezeichnung durch Monat und Monatstag. Der Schalttag wird als 29. Februar eingeführt, der den Gemeinjahren fehlt.

Die Jahre, auch das tropische, bezeichnet man mit ihrer Ordinalzahl in der christlichen Ära; am Beginn des Jahres X sind also $X - 1$ Jahre seit Beginn der Ära verflossen. Das dem Beginn der Ära unmittelbar vorangehende Jahr wird von Historikern, Chronologen usw. als das Jahr 1 a. Chr. n., astronomisch als das Jahr 0 und die vorangehenden mit $-1, -2, \ldots$ bezeichnet, so daß

Jahr Y a. Chr. n. chronologisch $= -Y + 1$ astronomisch

ist. Der Beginn des Jahres $-X$ liegt dann ebenfalls $-X - 1$ Jahre vom Beginn der Ära ab, d. h. mit den astronomisch bezeichneten Jahreszahlen kann unmittelbar das Intervall in Jahren gebildet werden.

Um das Intervall weit auseinander liegender Zeitangaben schnell und sicher bilden zu können, bedient man sich der von dem Chronologen *Joseph Scaliger* eingeführten julianischen Periode. Der erste Tag derselben ist Januar 1 des Jahres -4712 (astr.), liegt also vor allen bekannten astronomischen und geschichtlichen Ereignissen. Mittels einer Tabelle kann man zu jedem im julianischen oder gregorianischen Kalender gegebenen Datum die seit Beginn der julianischen Periode verflossene Anzahl von Tagen entnehmen und damit das Intervall zwischen zwei Ereignissen in Tagen leicht bilden.

Dreizehnter Abschnitt.

Die Änderungen der Koordinaten der Gestirne.

§ 91. Die Präzession.

1. Die Hauptkreise und ihre Pole, auf die wir die Koordinatensysteme des Äquators und der Ekliptik begründet haben, liegen nicht unveränderlich im Raum. Es ändern sich daher die Koordinaten der Gestirne nicht nur wegen deren eigener Bewegung, sondern auch wegen der Änderung der Koordinatenachsen und diese letztere muß von der Gesamtänderung in Abzug gebracht werden, um die reine Bewegung der Gestirne zu erhalten. Die Ursachen der Bewegung der Koordinatensysteme zu erforschen ist Aufgabe der Mechanik des Himmels und diese stellt auch die Form der Ausdrücke auf, durch die die Bewegungen beschrieben werden; es ergeben sich Glieder, die für sehr lange Zeiträume als proportional der Zeit betrachtet werden können oder allgemeiner Potenzreihen der Zeit sind, und solche, die nach dem Sinus und Cosinus rasch variabler Winkel fortschreiten. Man faßt die ersteren (säkularen) Glieder unter dem Namen der Präzession, die letzteren (periodischen) unter dem Namen der Nutation zusammen. Ein Koordinatensystem, das durch Anbringung der Präzession auf eine andere Epoche gebracht wird, heißt ein mittleres System und die darauf bezogenen Sternörter mittlere. Das rasch veränderliche System, welches die durch die Glieder der Nutation dargestellten Bewegungen mitmachend gedacht ist, heißt ein wahres System und die darauf bezogenen Sternörter heißen wahre. Die Beobachtungen liefern stets wahre Örter; um mehrere derselben mit einander verbinden zu können und daraus die reine Bewegung der Gestirne abzuleiten, ist es üblich, alle Beobachtungen einer bestimmten Klasse auf ein mittleres System für eine bestimmte Epoche zu reduzieren.

2. Die Säkularbewegungen, die wir zuerst besprechen, zerfallen ihrer Ursache nach in solche, welche von der Bewegung der Erdachse und in solche, welche von der Bewegung der Ekliptik herrühren. Das Schwanken der Erdachse im Raum ist Folge der Anziehung von



Sonne und Mond auf das Erdellipsoid und ihr säkularer Hauptbetrag ergibt sich aus einem der großen Störungsgesetze, die schon von Newton formuliert wurden: wenn eine Bahnebene der Sitz einer störenden Kraft ist, die auf einen Körper in einer anderen Bahnebene einwirkt, dann führt die Knotenlinie der gestörten Ebene auf der störenden eine säkulare rückläufige Bewegung aus. Als störende Ebene tritt hier die Sonnenbahn (Ekliptik) bzw. die dagegen wenig geneigte Mondbahn auf, als gestörte der Äquator und die Erscheinung ist die Rückwärtsbewegung des Schnittpunktes des Äquators mit der Ekliptik, d. h. des Frühlingspunktes; die Erscheinung stellt den einen, und zwar den Hauptteil der Präzession dar. Der Name erklärt sich daraus, daß infolge des Rückwärtsweichens des Frühlingspunktes die Längen der Gestirne zunehmen. Hält man die Ekliptik, die in der Tat eine

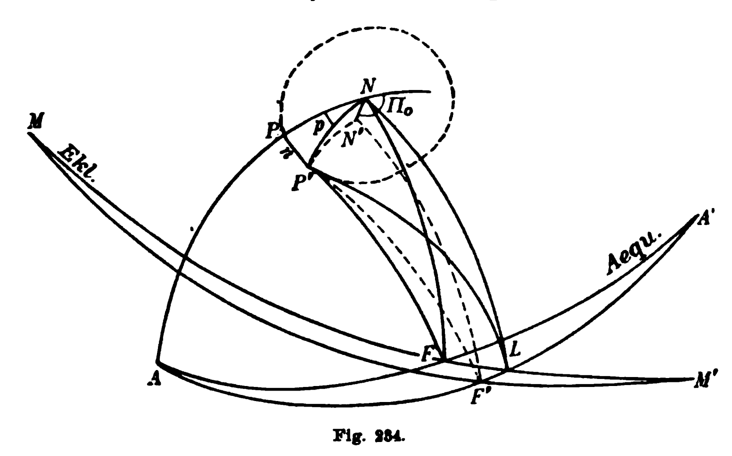


Fig. 234.

viel kleinere Bewegung ausführt, zunächst fest, so läßt sich dieser Teil der Präzession auch in folgender Weise beschreiben. Der Frühlingspunkt F (Fig. 234) ist der Schnittpunkt der durch die Pole P und N von Äquator und Ekliptik zum Hauptkreis PN senkrecht gezogenen Hauptkreise PF und NF, kurz der Pol von PN; seine Bewegung kann also durch die Bewegungen der Pole P und N dargestellt werden. Bewegt sich F auf der festen Ekliptik und bleibt dabei die Neigung des Äquators gegen die Ekliptik: ε konstant, so beschreibt der Pol P um den Pol N einen kleinen Kreis mit dem Radius $PN = \varepsilon$. Der Winkelbewegung von NP um N entspricht die Bewegung des Poles von PN, nämlich F, auf dem Polkreis von N. Für kleine Zeiträume, also für die instantane Bewegung, kann man die Bewegung von P auf einem Hauptkreis PP' sich vollziehen lassen, der auf PN senkrecht steht, also mit PF zusammenfällt. Nennt man $PP' = n$ die Geschwindigkeit, mit der sich P auf dem Hauptkreis

PF bewegt und p die entsprechende Winkelgeschwindigkeit von NP um N, also $p = \sphericalangle PNP' = FL =$ der Geschwindigkeit von F auf der festen Ekliptik, so folgt aus dem Dreieck $PP'N$

$$\sin p = \frac{\sin n}{\sin \varepsilon}$$

oder da es sich um kleine Winkel handelt

$$p = \frac{n}{\sin \varepsilon}.$$

Man nennt diesen Teil der Präzession die **Lunisolarpräzession**. Führt man als Einheit der Zeit das tropische Jahrhundert ein, so gibt die Theorie die Form, die Beobachtung den Zahlenwert folgender Ausdrücke

$$(1)\quad \begin{cases} n = 5490''.66 \sin \varepsilon \cos \varepsilon = P \sin \varepsilon \cos \varepsilon \\ p = 5490\,.66 \cos \varepsilon \qquad = P \cos \varepsilon \end{cases}$$

Der Zahlenfaktor gilt streng für die Epoche 1850, ändert sich aber, als nur von den Trägheitsmomenten des Erdkörpers und den Elementen der Sonnen- und Mondbahn abhängig, außerordentlich wenig. *Newcomb*, (Spherical Astronomy) dem wir auch die weiteren Zahlenangaben und Entwicklungen entnehmen, hat ihn die **Präzessionskonstante** genannt.

3. Die Bewegung der Ekliptik ist eine wesentlich kleinere als die des Äquators und rührt her von den Störungen, welche die übrigen Planeten auf die Erde ausüben. Man muß, um sie beschreiben zu können, einen festen Hauptkreis oder seinen Pol einführen, als welche man am zweckmäßigsten die Lage der Ekliptik selbst für eine bestimmte Epoche, z. B. 1850 wählt. In Fig. 234 ist MFM' diese Fundamentalekliptik, N ihr Pol; AFA' der gleichzeitige Äquator, P sein Pol. Man kann dann sagen: der Pol N beschreibt eine gegen PN konvexe Kurve NN' und zwar so, daß N' sich dem P' nähert; oder, wenn man durch die benachbarten Punkte N und N' einen Hauptkreis legt und M, M' dessen Pole nennt: die Ekliptik rotiert um die Achse MM', welche selbst sich ändert, da die Bewegung von N nicht in einem Hauptkreis erfolgt. Die Ekliptik nimmt infolgedessen die Lage $MF'M'$ ein und es ist M der aufsteigende Knoten der bewegten Ekliptik auf der festen. Die Theorie der Säkularstörungen der Erdbahn liefert die Geschwindigkeit von $N: NN' = \pi$ und ihre Richtung gegen $PN: \sphericalangle PNN' = 180^0 - \Pi_0$ in folgender Form:

$$(2)\quad \begin{cases} \pi \sin \Pi_0 = +\,5''.341 + 0''.3870t - 0''.00056t^2 \\ \pi \cos \Pi_0 = -\,46''.837 + 0''.1126t + 0'.00104t^2, \end{cases}$$



wo die Einheit der Zeit, wie auch in allem weiteren das tropische Jahrhundert ist. π erscheint in der Figur auch als die Geschwindigkeit, womit der Winkel zwischen den beiden Ekliptiken MFM' und $MF'M'$ sich ändert und Π_0 als die Länge des aufsteigenden Knotens M der instantanen Ekliptik auf der festen, gezählt vom Frühlingspunkt F der Fundamentalepoche 1850, also $\Pi_0 = FM$. — Der Frühlingspunkt F, welcher infolge der Lunisolarpräzession rückwärts nach L gerückt ist, geht also infolge der Bewegung der Ekliptik von L nach F', und zwar wie die Figur erkennen läßt, nach vorwärts. Man nennt diese letztere Bewegung die Präzession durch die Planeten.

Man führt die Rückwärtsbewegung als positive ein, so daß unter Präzession die Größe zu verstehen ist, um welche mit wachsender Zeit die Längen wachsen; der Präzession durch die Planeten ist also das negative Zeichen zu geben.

Der wirkliche Frühlingspunkt für die neue Epoche, wie er als Pol von $P'N'$ sich unter dem Wirken beider Bewegungen ergibt, ist F''. Die allgemeine Bewegung dieses Punktes, oder die allgemeine Präzession ist nun zu untersuchen; zunächst wieder die Geschwindigkeiten.

4. In Fig. 235, die einen Teil von Fig. 234 vergrößert wiedergibt, sind zwei Lagen von Ekliptik und Äquator gezeichnet, die zu zwei um eine Einheit verschiedenen Zeiten gehören, so daß die Strecken die Geschwindigkeiten darstellen. Die beiden Äquator sind in der Nähe von F parallel gezeichnet, da F von den Schnittpunkten der beiden 90° absteht (siehe Fig. 234). Ihre senkrechte Distanz bei F oder L ist n; ferner ist $FL = p$.

Fig. 235.

Die beiden Ekliptiken schneiden sich in M', dem absteigenden Knoten, und es ist der Winkel zwischen ihnen π und $M'F = 180° - \Pi_0$.

Die Schiefe der Ekliptik für die Fundamentalepoche 1850.0 ist aus der Beobachtung bestimmt:

$$\varepsilon = 23° 27' 31''.68$$

und dieser Winkel bleibt sehr nahe konstant, soweit es sich um die Neigung des bewegten Äquators gegen die feste Ekliptik für 1850 handelt; die Schiefe der bewegten Ekliptik gegen den bewegten Äquator dagegen ist veränderlich und sei mit $\varepsilon + d\varepsilon$ bezeichnet, so daß

$d\varepsilon$ die Änderung in 100 Jahren darstellt. Wir führen endlich $M'F' = 180^0 - \Pi$ ein, so daß Π die Länge des aufsteigenden Knotens der bewegten Ekliptik auf der festen, gezählt vom momentanen Frühlingspunkt F' darstellt, und nennen die Planetenpräzession

$$LF' = -\lambda = -\frac{\pi \sin \Pi}{\sin \varepsilon} \quad \text{(Dreieck } LF'M'\text{)}.$$

Wird LQ senkrecht zum Äquator o und $F'T$ senkrecht zur Ekliptik o gezogen, so hat man folgende Definitionen und Ausdrücke für die auftretenden instantanen Geschwindigkeiten, gültig für 1850:

Lunisolarpräzession in Länge

$$= FL = p = 5490''.66 \cos \varepsilon = P \cos \varepsilon = 5036''.84,$$

Planetenpräzession in Länge

$$= LT = -\lambda \cos \varepsilon = -\pi \sin \Pi \operatorname{cotg} \varepsilon = -12''.31,$$

Allgemeine Präzession in Länge

$$l = FF' = FT = p - \lambda \cos \varepsilon = (P - \lambda) \cos \varepsilon = p - \pi \sin \Pi \operatorname{cotg} \varepsilon = 5024''.53 = 83'.742,$$

Lunisolarpräzession in Rektaszension

$$= FQ = p \cos \varepsilon = P \cos \varepsilon^2 = 4620''.53,$$

Lunisolarpräzession in Deklination

$$= n = p \sin \varepsilon = P \sin \varepsilon \cos \varepsilon = 2005''.11,$$

Planetenpräzession in Rektaszension

$$LF' = -\lambda = -\pi \sin \Pi \operatorname{cosec} \varepsilon = -13''.42,$$

Allgemeine Präzession in Rektaszension

$$= FQ - LF' = m = P \cos \varepsilon^2 - \lambda = P \cos \varepsilon^2 - \pi \sin \Pi \operatorname{cosec} \varepsilon = 4607''.11.$$

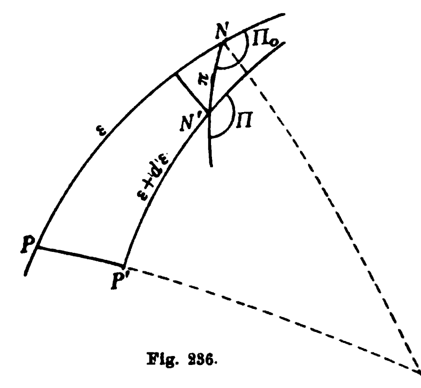


Fig. 236.

5. Die Änderung der Schiefe ergibt sich aus Fig. 236, wo wir die oberen Teile von Fig. 234 vergrößert wieder gegeben haben unter Einsetzung der neu eingeführten Bezeichnungen.

Zerlegt man $NN' = \pi$ in die beiden Komponenten nach den Richtungen NP und NF, also $-\pi \cos \Pi_0$ und $\pi \sin \Pi_0$, oder für eine andere Epoche in $-\pi \cos \Pi$ und $\pi \sin \Pi$, so stellt erstere sehr nahe den Unterschied zwischen $PN = \varepsilon$ und $P'N' = \varepsilon + d\varepsilon$, also $-d\varepsilon$ dar, da der von PN und $P'N'$ gebildete Winkel für kleine Zeiträume

klein ist. Also für 1850

$$d\varepsilon = \pi \cos \Pi_0 = -46''.837$$

und allgemein $d\varepsilon = \pi \cos \Pi$.

6. Die in obiger Zusammenstellung angegebenen Formeln gelten allgemein, die Zahlenwerte aber für die Epoche 1850; um die Zahlenwerte für die Geschwindigkeiten anderer Epochen zu erhalten, muß man den Wert von Π und hierzu zunächst den Wert von Π_0 und π aus den Angaben (2) entwickeln; man erhält, wenn t in Jahrhunderten von 1850 aus gezählt wird:

$$\left\{\begin{aligned} \Pi_0 &= 173^0\,29'.68 - 28'.972t - 0'.011t^2 \\ \pi &= 47''.141 - 0''.0675t + 0''.0007t^2. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Nun unterscheiden sich $\Pi_0 = FM$ und $\Pi = F'M$ offenbar um den Betrag der allgemeinen Präzession in Länge $lt = 83'.742t$, so daß

$$\Pi = \Pi_0 + lt$$

wird und in Zahlen mit Umgehung des quadratischen Gliedes

$$\Pi = 173^0\,29'.68 + 54'.770t. \tag{4}$$

Mit diesen Angaben findet man zunächst

$$d\varepsilon = \pi \cos \Pi = -46''.837 - 0''.017t + 0''.0051t^2$$

oder nach Integration:

$$\varepsilon = 23^0\,27'\,31''.68 - 46''.837t - 0''.0085t^2 + 0''.0017t^3 \tag{5}$$

und kann nun obige Ausdrücke berechnen; wir stellen sie für einige Epochen in einer Tabelle zusammen:

Geschwindigkeiten für ein tropisches Jahrhundert.

Epoche	Lunisolarpräzession in Länge $p = P \cos \varepsilon$	Planetenpräzession in Länge $-\pi \sin \Pi \operatorname{cotg} \varepsilon$	Allgemeine Präzession in Länge $l = p - \pi \sin \Pi \operatorname{cotg} \varepsilon$
1650	5035''.85	−15''.77	5020''.08
1750	5036 .34	−14 .04	5022 .30
1850	5036 .84	−12 .31	5024 .53
1950	5037 .33	−10 .58	5026 .75
2050	5038 82	− 9 .85	5028 .97

Epoche	Allgemeine Präzession in Rektaszension. $m = P \cos \varepsilon^2 - \pi \sin \Pi \operatorname{cosec} \varepsilon$	Allg. Präzession in Dekl. $n = p \sin \varepsilon$	Mittlere Schiefe der Ekliptik ε
1650	4601''.53	2006''.81	23° 29' 5''.31
1750	4604 .32	2005 .96	28 18.51
1850	4607 .11	2005 .11	27 31.68
1950	4609 .90	2004 .26	26 44.84
2050	4612 .69	2003 .41	25 57.98

7. Mit aus dieser Tabelle interpolierten Mittelwerten der Geschwindigkeiten können Übertragungen von Gestirnskoordinaten von einer Epoche auf eine andere ausgeführt werden, wenn es sich um kleinere Zeiträume handelt; wir werden die Formeln hierfür später aufstellen. Handelt es sich aber um große Zeiträume, so muß man die Lage des Koordinatensystems für eine Epoche im Verhältnis zu seiner Lage für eine andere Epoche durch strenge Integration bestimmen, wozu die bisherigen Angaben sich noch nicht eignen. Es müssen Hilfsgrößen eingeführt und deren Reihenentwicklungen nach Potenzen der Zeit bestimmt werden, worauf erst die Integration über längere Zeiträume möglich ist. Mit deren Definition wollen wir an der Hand der Fig. 237 beginnen.

Fig. 237.

Es seien N und P die Pole von Ekliptik und Äquator für die Fundamentalepoche $T_0 = 1850$, N' und P' dieselben für die Epoche $T_0 + t$, ferner

$$NP = \varepsilon, \qquad N'P' = \varepsilon';$$

dann ist ε' bereits durch die Reihe (5) gegeben:

$$(6) \qquad \varepsilon' = 23^0\,27'\,31''.68 - 46''.837t - 0''.0085t^2 + 0''.0017t^3.$$

Wir ziehen im sphärischen Viereck $NPN'P'$ die Diagonale $NP' = \varepsilon_1$, dann stellt ε_1 die Neigung des Äquators für die Zeit $T_0 + t$ gegen die Ekliptik für T_0 dar. Durch die beiden Punkte P und P' legen wir einen Hauptkreis und nennen $PP' = \Theta$ (der Weg, auf dem P nach P' gelangte, liegt nicht auf diesem Hauptkreis, sondern etwa auf der punktierten Linie). Ebenso legen wir durch N und N' einen Hauptkreis und setzen $NN' = k$ und auch hier stellt die punktierte Linie den eigentlichen Weg von N nach N' dar; der Winkel, den k mit der Verlängerung von PN bildet, sei Π_1. k und Π_1 lassen sich wie folgt aus den Formeln (2) ermitteln. Die dort gegebenen Ausdrücke stellen die Komponenten der Geschwindigkeiten von N' auf dem Wege NN' dar; integriert man

zwischen T_0 und $T_0 + t$, so erhält man

$$(7)\qquad \begin{cases} k \sin \Pi_1 = 5''.341 t + 0''.1935 t^2 - 0''.00019 t^3 \\ k \cos \Pi_1 = -46''.837 t + 0''.0563 t^2 + 0''.00035 t^3. \end{cases}$$

Wir setzen ferner

$$\sphericalangle PP'N = 90^\circ - \zeta, \qquad \sphericalangle NPP' = 90^\circ - \zeta_0,$$
$$\sphericalangle PP'N' = 90^\circ - z, \qquad \sphericalangle NP'N' = a,$$
$$\text{also: } 90^\circ - z = 90^\circ - \zeta + a \quad \text{oder} \quad z = \zeta - a.$$

Da der Pol von NP' der Punkt L der Fig. 235 ist, und der Pol von $N'P'$ der Punkt F', so stellt a den Gesamtbetrag der Planetenpräzession in Rektaszension für die Zeit von T_0 bis $T_0 + t$ dar, deren Geschwindigkeit oben zu $-\pi \sin \Pi \operatorname{cosec} \varepsilon = -\lambda$ bestimmt wurde. — Endlich setzen wir $\sphericalangle PNP' = \psi$ und dies ist offenbar der Gesamtbetrag der Lunisolarpräzession in Länge gemessen auf der Ekliptik für T_0, also die Größe, deren Geschwindigkeit wir zu $p = \mathbf{P} \cos \varepsilon$ bestimmt haben.

Um die Geschwindigkeiten der neu eingeführten Größen zu bestimmen, betrachten wir die nächste Lage von P, nämlich P'', die in der Zeit dt erreicht werde; es ist dann $\sphericalangle P''P'N' = 90^\circ$, also $P''P'B = z$ und da die Geschwindigkeit von P n ist, wird

$$P'P'' = n\,dt = \mathbf{P} \cos \varepsilon \sin \varepsilon\, dt.$$

Der Übergang von P' in P'' ruft in den Größen Θ und ε_1 die Änderungen $d\Theta$ und $d\varepsilon_1$ hervor, die gegeben sind durch:

$$(8)\qquad d\Theta = PP'' - PP' = n \cos z\, dt = \mathbf{P} \cos \varepsilon' \sin \varepsilon' \cos z \cdot dt,$$

$$(9)\qquad d\varepsilon_1 = NP'' - NP' = n \sin a\, dt = \mathbf{P} \cos \varepsilon' \sin \varepsilon' \sin a \cdot dt.$$

Die Änderung von ψ, nämlich $d\psi = \sphericalangle P'NP''$ ergibt sich aus dem Dreieck $P'NP''$:

$$\frac{\sin d\psi}{\sin (90^\circ + a)} = \frac{\sin (n\,dt)}{\sin (\varepsilon_1 + d\varepsilon_1)}$$

oder mit Übergehung der Glieder zweiter Ordnung

$$\sin \varepsilon_1 \cdot d\psi = n \cos a\, dt.$$

Nun ist im Dreieck $NN'P'$:

$$\frac{\sin a}{\sin (\Pi_1 + \psi)} = \frac{\sin k}{\sin \varepsilon'}$$

oder

(10) $$a = \frac{k \sin(\Pi_1 + \psi)}{\sin \varepsilon'},$$

woraus hervorgeht, daß a ebenso wie k sehr klein ist; setzt man also $\cos a = 1$, so wird

(11) $$\frac{d\psi}{dt} = \frac{n}{\sin \varepsilon_1} = \frac{P \cos \varepsilon' \sin \varepsilon'}{\sin \varepsilon_1} = \frac{P \sin 2\varepsilon'}{2 \sin \varepsilon_1}.$$

In den Formeln (8) bis (11) kann man k, Π_1 und ε' als bekannt ansehen (vermöge (6) und (7)), unbekannt sind ε_1, ψ und a; um sie bestimmen zu können, muß man den Weg der sukzessiven Näherung beschreiten. Setzt man in erster Näherung

$$\psi = pt,$$

und nimmt für p seinen Wert für 1850, so wird

$$\psi = 5036''.8t = 83'.95t.$$

Rechnet man hiermit und mit Benutzung von (6) und (7) nach Formel (10) a, so kommt

Epoche	ψ	a
1850	0° 0'.0	0''.00
1900	0 42.0	6 .11
1950	1 23.9	11 .03
2000	2 5.9	14 .76
2050	2 47.8	17 .30
2100	3 29.8	18 .65

und hieraus berechnet man:

$$\sin a = 0.000\,06503t - 0.000\,01154t^2.$$

Wird dies in (9) eingetragen, so folgt

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = 0''.1304t - 0''.0232t^2$$

und durch Integration

(12) $$\varepsilon_1 = \varepsilon + 0''.0652t^2 - 0''.0077t^3$$

Hieraus ist ersichtlich, wie schon früher hervorgehoben wurde, daß sich ε_1, also die Neigung des Äquators gegen die feste Ekliptik, nur sehr wenig ändert. Trägt man nun alles in (11) ein und rechnet aus, so kommt:

Epoche	$\frac{d\psi}{dt}$	a
1750	5038″.97	− 15″.794
1800	5037 .91	− 7 .303
1850	5036 .84	0 .000
1900	5035 .78	+ 6 .113
1950	5034 .71	+ 11 .034
2000	5033 .63	+ 14 .764
2050	5032 .55	+ 17 .301
2100	5031 .46	+ 18 .644

und in einer Reihe dargestellt:

$$\frac{d\psi}{dt} = 5036''.84 - 2''.130t - 0''.01t^2$$

und integriert:

$$\psi = 5036''.84t - 1''.065t^2 - 0''.003t^3. \tag{13}$$

Damit ist der Totalbetrag der Lunisolarpräzession gezählt auf der festen Ekliptik für 1850 gefunden. Trägt man ihn in (10) ein, so ergibt sich der in obiger Tabelle bereits angesetzte definitive Wert der Planetenpräzession a, woraus die Reihenentwicklung

$$a = 13''.416t - 2''.380t^2 - 0''.0014t^3. \tag{14}$$

Trägt man dies in (9) ein, um den definitiven Wert von $d\varepsilon_1$ zu erhalten, so kommt man wieder auf die Formel (12), so daß die erste Näherung bereits zum Ziel geführt hat.

Um die Winkel ζ und ζ_0 zu entwickeln, hat man aus Dreieck $PP'N$ nach den Napierschen Analogien:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\zeta + \zeta_0) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi}{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon)}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\zeta - \zeta_0) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon)\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\psi}{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon)}.$$

Da nach (12) $\varepsilon_1 - \varepsilon = \varDelta\varepsilon_1 = +0''.0652t^2 - 0''.0077t^3$ ein sehr kleiner Winkel ist, können wir seine höheren Potenzen vernachlässigen und schreiben:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\zeta + \zeta_0) = \cos(\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varDelta\varepsilon_1)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi$$

$$(\zeta - \zeta_0) = \frac{\varDelta\varepsilon_1}{\sin(\varepsilon + \frac{1}{2}\varDelta\varepsilon_1)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi}.$$

Die Ausrechnung ergibt:

	$\frac{1}{2}(\zeta + \zeta_0)$
1750	$-2310''.769$
1800	-1155.257
1850	0.000
1900	$+1155.011$
1950	$+2309.793$
2000	$+3464.352$
2050	$+4618.705$
2100	$+5772.870$

woraus:

$$\zeta + \zeta_0 = 4620''.53t - 0''.984t^2 + 0''.036t^3$$

und direkt:

$$\zeta - \zeta_0 = 13.42t - 1.588t^2 - 0.010t^3$$

und daher:

$$(15)\quad \begin{aligned} \zeta &= 2316''.97t - 1''.286t^2 + 0''.017t^3 \\ \zeta_0 &= 2303.55t + 0.302t^2 + 0.018t^3 \\ z = \zeta - a &= 2303.55t + 1.094t^2 + 0.018t^3. \end{aligned}$$

Um schließlich noch Θ zu berechnen, setzt man z in (8) ein, oder man benutzt bequemer die aus Dreieck $PP'N$ sich ergebende Formel

$$\sin \Theta = \frac{\sin \varepsilon \sin \psi}{\cos \zeta}.$$

Man erhält

	Θ
1750	$-2005''.50$
1800	-1002.66
1850	0.00
1900	$+1002.44$
1950	$+2004.64$
2000	$+3006.37$
2050	$+4008.19$
2100	$+5009.47$

und daraus:

$$(16)\quad \Theta = 2005''.11t - 0''.43t^2 - 0''.041t^3.$$

8. Die eingeführten Hilfsgrößen, welche die gegenseitige Lage der durch die Präzession bewegten Koordinatenebenen bestimmen, setzen uns nun in den Stand, die fundamentale Aufgabe zu lösen: gegeben sind Rektaszension und Deklination eines Gestirnes bezogen auf das Koordinatensystem einer Ausgangsepoche; man bestimme diese Größen bezogen auf das System einer anderen Epoche.

Man unterscheidet zwei Lösungen dieser Aufgabe, eine erste durch

Reihenentwicklungen nach Potenzen der Zeit für kleinere Zeiträume und eine zweite, trigonometrische Lösung für lange Zeiträume und für dem Pol nahe Sterne.

9. Trigonometrische Lösung.

α und δ seien die Koordinaten des Gestirnes O für die Anfangsepoche T_0, α' und δ' jene für die Epoche $T_0 + t$.

Wir ziehen in Fig. 237 durch die Pole P und P' die Deklinationskreise nach dem Gestirnsort O und nach den Frühlingspunkten F und F'; es steht dann FP senkrecht auf PN und $F'P'$ senkrecht auf $P'N'$ und es wird also

$$\sphericalangle FPP' = \zeta_0 \quad \text{und} \quad \sphericalangle F'P'P = 180^0 - z.$$

Ferner ist

$$\sphericalangle FPO = \alpha, \quad \sphericalangle FP'O = \alpha', \quad PO = 90^0 - \delta, \quad P'O = 90^0 - \delta',$$
$$PP' = \Theta, \quad \sphericalangle OPP' = \alpha + \zeta_0, \quad \sphericalangle PP'O = 360^0 - \alpha' - 180^0 + z$$
$$= 180^0 - (\alpha' - z).$$

Das Dreieck $PP'O$ gibt also:

$$(17)\quad \begin{cases} \cos\delta' \sin(\alpha' - z) = \cos\delta \sin(\alpha + \zeta_0) \\ \cos\delta' \cos(\alpha' - z) = \cos\delta \cos(\alpha + \zeta_0)\cos\Theta - \sin\delta \sin\Theta \\ \sin\delta' = \cos\delta\cos(\alpha + \zeta_0)\sin\Theta + \sin\delta\cos\Theta. \end{cases}$$

Da ζ_0, Θ, z nach dem früheren bekannt sind, lassen sich hieraus α' und δ' berechnen. Handelt es sich um dem Pol nahe Sterne, so wird man auch kaum bequemere Formeln aufstellen können, muß dann freilich mit 7- oder 8-stelligen Logarithmen rechnen. Für gewöhnlichere Fälle wird man einfachere Rechnung erzielen, wenn man $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ aus (17) ableitet. Man erhält:

$$\cos\delta' \sin(\alpha' - \alpha - z - \zeta_0) = \cos\delta \sin(\alpha + \zeta_0)\cos(\alpha + \zeta_0)(1 - \cos\Theta)$$
$$+ \sin\delta \sin(\alpha + \zeta_0)\sin\Theta$$

$$\cos\delta' \cos(\alpha' - \alpha - z - \zeta_0) = \cos\delta(\sin(\alpha + \zeta_0)^2 + \cos(\alpha + \zeta_0)^2\cos\Theta)$$
$$- \sin\delta\cos(\alpha + \zeta_0)\sin\Theta$$

und hieraus:

$$\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha - z - \zeta_0) = \frac{\sin(\alpha + \zeta_0)(\cos(\alpha + \zeta_0)(1 - \cos\Theta) + \operatorname{tg}\delta\sin\Theta)}{\sin(\alpha + \zeta_0)^2 + \cos(\alpha + \zeta_0)^2\cos\Theta - \cos(\alpha + \zeta_0)\operatorname{tg}\delta\sin\Theta}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\cos(\alpha + \zeta_0)(1 - \cos\Theta) + \operatorname{tg}\delta\sin\Theta = \sin\Theta(\operatorname{tg}\delta + \cos(\alpha + \zeta_0)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta) = p,$$

so folgt:

$$(18)\qquad \operatorname{tg}(\alpha' - \alpha - z - \zeta_0) = \frac{p \sin(\alpha + \zeta_0)}{1 - p\cos(\alpha + \zeta_0)}.$$

Ferner erhält man nach den Napierschen Analogien:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha' + \alpha + \zeta_0 - z)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha - \zeta_0 - z)} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta.$$

Diese Formeln sind noch völlig streng und reichen in allen Fällen aus; für kleinere Zeiträume und dem Pol nicht zu nahe Sterne benutzt man unter Vernachlässigung von Größen zweiter Ordnung folgende leicht daraus ableitbaren:

$$(19)\qquad \begin{cases} p_0 = \sin\Theta \operatorname{tg}\delta \\ \operatorname{tg}\varDelta\alpha = \dfrac{p_0 \sin(\alpha + \zeta_0)}{1 - p_0\cos(\alpha + \zeta_0)} \\ \alpha' - \alpha = \varDelta\alpha + z + \zeta_0 \\ \delta' - \delta = \Theta\cos(\alpha + \zeta_0 + \tfrac{1}{2}\varDelta\alpha)\sec\tfrac{1}{2}\varDelta\alpha. \end{cases}$$

10. Entwickelung nach Potenzen der Zeit. In der täglichen astronomischen Praxis, wo man fast ausnahmslos nur mit Übertragungen auf kleine Zeiträume (im Maximum rund 100 Jahre) zu tun hat, genügt ein viel einfacheres Verfahren, als das trigonometrische, nämlich das der Entwickelung von $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ nach Potenzen der Zeit, wobei man aber über die dritte Potenz niemals hinausgeht und selbst diese nur ausnahmsweise berücksichtigt; geht dies, wie bei Polsternen nicht an, so ist das trigonometrische Verfahren bequemer als der Ausbau der Reihenentwicklung. Das genannte Verfahren beruht auf der Annahme, daß die Zeit und die entsprechenden Änderungen des Pols und der Koordinaten als Differentiale aufgefaßt werden dürfen, deren zweite Potenzen zu vernachlässigen sind. Es gelingt dann die Geschwindigkeiten und ihre Änderungen von α und δ durch die Geschwindigkeiten der Polbewegung auszudrücken, also die Koeffizienten $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\delta}{dt}, \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \frac{d^2\delta}{dt^2}$ der Taylorschen Entwicklung durch die früher entwickelten Geschwindigkeiten m, n darzustellen, so daß man sich der Entwicklungen

$$(20)\qquad \begin{cases} \alpha' - \alpha = \dfrac{d\alpha}{dt}t + \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}t^2 + \cdots \\ \delta' - \delta = \dfrac{d\delta}{dt}t + \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2\delta}{dt^2}t^2 + \cdots \end{cases}$$

bedienen kann.

In der Tat stellt n die Geschwindigkeit des Poles P dar, senkrecht zu PN, man kann also setzen

$$\Theta = n\,dt$$

Ferner reduziert sich die Hilfsgröße

$$p = \sin\Theta(\operatorname{tg}\delta + \cos(\alpha + \zeta_0)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta),$$

da ζ_0 und Θ Differentiale darstellen, auf

$$p = \Theta\operatorname{tg}\delta = n\operatorname{tg}\delta\cdot dt$$

und aus

$$\operatorname{tg}((\alpha' - \alpha) - (z + \zeta_0)) = \frac{p\sin(\alpha + \zeta_0)}{1 - p\cos(\alpha + \zeta_0)}$$

wird:

$$(\alpha' - \alpha) - (z + \zeta_0) = p\sin\alpha = n\operatorname{tg}\delta\sin\alpha\cdot dt.$$

$z + \zeta_0$ ist, wie Fig. 237 unmittelbar zeigt, der Gesamtbetrag der allgemeinen Präzession in Rektaszension, deren Geschwindigkeit wir früher mit m bezeichnet haben; folglich

$$\zeta_0 + z = m dt$$

und daher

$$\alpha' - \alpha = (m + n\operatorname{tg}\delta\sin\alpha)dt.$$

Endlich wird aus der Formel für $\delta' - \delta$

$$\delta' - \delta = \Theta\cos\alpha = n\cos\alpha\cdot dt.$$

Wir haben also:

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} = m + n\operatorname{tg}\delta\sin\alpha \\ \dfrac{d\delta}{dt} = n\cos\alpha. \end{cases}$$

Die nochmalige Differentiation gibt:

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = \dfrac{dm}{dt} + \operatorname{tg}\delta\sin\alpha\dfrac{dn}{dt} + n\operatorname{tg}\delta\cos\alpha\dfrac{d\alpha}{dt} + n\sin\alpha\sec\delta^2\dfrac{d\delta}{dt} \\ \dfrac{d^2\delta}{dt^2} = \cos\alpha\dfrac{dn}{dt} - n\sin\alpha\cdot\dfrac{d\alpha}{dt}. \end{cases}$$

Die dritten Differentialquotienten werden bereits sehr kompliziert und ihre Verwendung ist nicht zu empfehlen. Wir werden nachher ein Verfahren angeben, wie sie berücksichtigt werden können.

Um die Überführung von (21) und (22) in Zahlen zu zeigen, nehmen wir als Ausgangsepoche 1900 und als Zeiteinheit das tropische Jahrhundert. Durch Interpolation erhält man aus der Tabelle S. 503

$$m = 4608''.50 = 307^s.234$$
$$n = 2004''.68 = 133^s.646$$

$$\frac{dm}{dt} = +2''.79 = +0^s.186$$

$$\frac{dn}{dt} = -0''.85 = -0^s.057$$

und folglich, wenn wir bei den Rektaszensionen die Zeitsekunde einführen:

$$(23)\quad 1900\begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} = 307^s.234 + 133^s.646 \operatorname{tg}\delta \sin\alpha \\ \dfrac{d\delta}{dt} = 2004''.68 \cos\alpha \\ \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = 0^s.317 - [6.6289_{-10}]\dfrac{d\alpha}{dt} + [7.9876_{-10}]\cos\alpha \operatorname{tg}\delta \dfrac{d\alpha}{dt} \\ \qquad\qquad + [6.8115_{-10}]\sin\alpha \sec\delta^2 \dfrac{d\delta}{dt} \\ \dfrac{d^2\delta}{dt^2} = -[6.6289_{-10}]\dfrac{d\delta}{dt} - [9.1637_{-10}]\sin\alpha \dfrac{d\alpha}{dt}. \end{cases}$$

Die Zahlen in [ ] sind Logarithmen.

In den Sternkatalogen finden sich diese Größen bereits berechnet vor, allerdings meist bezogen auf das Jahr als Zeiteinheit, nicht wie hier auf das Jahrhundert. Es ist dort gegeben die einjährige Präzession, dann unter dem Namen „Variatio saecularis" die hundertjährige Änderung derselben; beide sind also der hundertste Teil der in (23) aufgestellten Größen. Während man mit den Größen (23) nach den Formeln (20) zu rechnen hat und die Zeit in Einheiten des Jahrhunderts ansetzen muß, muß man mit einjähriger Präzession und „Variatio saecularis" nach

$$(24)\qquad \alpha' - \alpha = t\left(\text{Präz.} + \frac{1}{2}\,\frac{t}{100}\,\text{Var. saec.}\right)$$

rechnen.

Ist das dritte Glied unmerklich, so kann man (20) in der Form:

$$(25)\qquad \alpha' - \alpha = t\left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{1}{2}\,t\,\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right),\quad \delta' - \delta = t\left(\frac{d\delta}{dt} + \frac{1}{2}\,t\,\frac{d^2\delta}{dt^2}\right)$$

schreiben und hat dann folgende Hilfsmittel zur Erleichterung der Rechnung. Offenbar stellen die Klammern die Präzessionen, gültig für $T + \frac{1}{2}t$ dar. Rechnet man diese also direkt unter Benutzung von Näherungswerten von α und δ für $T + \frac{1}{2}t$, so kann man einfach nach

$$(26)\qquad \alpha' - \alpha = t\cdot\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{T+\frac{1}{2}t},\qquad \delta' - \delta = t\cdot\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_{T+\frac{1}{2}t}$$

rechnen. Man kann auch $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ für beide Epochen T und $T + t$

rechnen und aus ihnen das Mittel nehmen; den zweiten Gliedern ist dann ebenfalls Rechnung getragen.

Sind die dritten Glieder merklich, so empfiehlt es sich im allgemeinen, die trigonometrische Methode zu wählen. Man kann aber auch von folgenden Formeln Gebrauch machen, die, wie man leicht ableitet, bis auf Glieder dritter Ordnung inkl. genau sind:

$$\alpha' - \alpha = \frac{1}{2}\, t \left(\frac{d\alpha}{dt} + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)'\right) + \frac{t^2}{12}\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)'\right) \tag{27}$$

oder

$$\alpha' - \alpha = \frac{1}{6}\, t\left(\frac{d\alpha}{dt} + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)' + 4\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)''\right). \tag{28}$$

Hierin bezeichnen $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)'$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)'$ die für $T + t$ gültigen Größen, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)''$ die für $T + \frac{1}{2}t$ gültige.

§ 92. Nutation.

11. Wie oben bereits auseinandergesetzt, unterscheidet die Theorie in der Bewegung der Pole von Äquator und Ekliptik Glieder säkularer und Glieder periodischer Natur; erstere hängen lediglich von den Elementen der Sonnen- und Mondbahn bzw. von den Elementen der Planetenbahnen ab und können in Reihen nach den Potenzen der Zeit entwickelt werden (Präzession), letztere hängen vom Ort von Sonne, Mond und Planeten in ihrer Bahn ab und haben daher als Periode die Umlaufszeiten dieser Körper oder ein Vielfaches derselben; die periodischen Bewegungen des Poles des Äquators faßt man unter dem Namen Nutation zusammen; es treten zwar auch beim Pol der Ekliptik periodische Bewegungen auf (von den Störungen der Planeten herrührend), allein diese sind sehr klein und werden nur als Breitenstörungen der Erde berücksichtigt, in die Nutation werden sie nicht mit einbezogen.

Zu den Nutationsgliedern tritt nun als das weitaus bedeutendste eines, welches nicht vom Ort des Mondes in seiner Bahn abhängt, sondern von einer großen periodischen Bewegung der Mondbahn selbst; diese Bewegung geht aus einer ähnlichen Ursache wie die Präzession hervor und besteht in der Umdrehung des Poles der Mondbahn um den Pol der Ekliptik oder in dem Rückwärtsschreiten des Knotens der Mondbahn auf der Ekliptik; diese Bewegung vollzieht sich durch den ganzen Umkreis in $18^2/_3$ Jahren und das entsprechende Glied der Nutation hat daher als Argument die Länge des Mondknotens mit der genannten Periode.

Um an der Hand der Fig. 238 ein Bild von der Entstehung und Wirkung dieses Hauptgliedes der Nutation zu geben, sei N der Pol der Ekliptik, M der Pol der Mondbahn, der mit dem Radius 5°.2 (Neigung der Mondbahn) einen kleinen Kreis um N in $18^2/_3$ Jahren beschreibt. Der Pol des Äquators P vollzieht dann nach den früheren Auseinandersetzungen die Präzessionsbewegung PP_0, senkrecht auf NP, und unter dem Einfluß der Mondbahn einen Weg PP_1, senkrecht auf MP; die resultierende Bewegung führt also den wahren Pol nach P'. Während nun die Bewegung von M sich abspielt, wird PP_1 und somit auch P' bald auf der einen, bald auf der andern Seite von PP_0 erscheinen und der Punkt P' eine Sinuskurve beschreiben, beziehungsweise bezogen auf den Punkt P_0 eine nahe kreisförmige Kurve — die Nutationsbewegung. An der Präzessionsbewegung PP_0 ist außer der Sonnenbahn auch die Mondbahn beteiligt, da N auch Zentrum der Bewegung der Mondbahn ist.

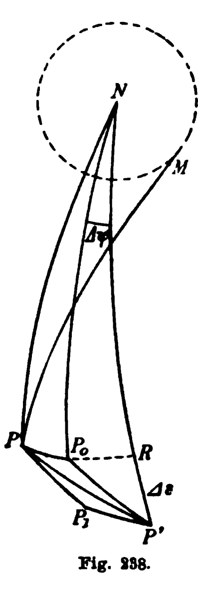


Fig. 238.

P_0 ist für jede Zeit der mittlere Ort des Poles, P' der wahre; der Unterschied zwischen beiden P_0P' — die Nutation — wird in zwei Komponenten P_0R und RP' zerlegt, die man erhält, wenn man von P_0 das Lot P_0R auf NP' fällt. Die Bedeutung dieser Komponenten ist leicht anzugeben; da nämlich P_0R wegen der Kleinheit des Winkels $P_0NR = \Delta\psi$ (immer kleiner als 20″) auch senkrecht auf NP_0 steht, ist

$$P_0R = \sin\varepsilon \cdot \Delta\psi$$

und $\Delta\psi$ stellt die Änderung der Länge des Poles P_0 infolge der Nutation dar; ferner ist $P'R = \Delta\varepsilon =$ der Änderung der Schiefe der Ekliptik. Die Nutation wird also am einfachsten durch die beiden Komponenten $\Delta\psi$ und $\Delta\varepsilon$, die Nutation in Länge und Schiefe beschrieben.

Die Lage der Ekliptik bleibt durch die Nutation ganz unberührt; infolgedessen ist die Nutation in Breite gleich Null und die Nutation in Länge hat für alle Gestirne den Betrag $\Delta\psi$.

Die Zahlenausdrücke für die hauptsächlichsten Nutationsglieder sind folgende:

Nutation in Schiefe:

$$\Delta\varepsilon = +\,9''.21 \cos \Omega - 0''.09 \cos 2\Omega$$
$$+\,0.55 \cos 2\odot + 0.09 \cos 2☽.$$

(29) Nutation in Länge:

$$\Delta\psi = -17''.23 \sin ☊ + 0''.21 \sin 2 ☊$$
$$- 1.26 \sin 2 ☉ - 0''.20 \sin 2 ☽$$
$$+ 0.13 \sin(☉ - \Gamma) + 0''.07 \sin(☽ - \Gamma').$$

Die oben besprochenen größten Glieder sind die ersten, von der Länge des Mondknotens ☊ abhängigen. Die folgenden hängen von der Sonnenlänge ☉, der Mondlänge ☽ und den wahren Anomalien ☉ $- \Gamma$ und ☽ $- \Gamma'$ von Sonne und Mond ab.

12. Der Einfluß der Nutation auf die Rektaszension und Deklination der Gestirne wird am einfachsten durch Differentialformeln erhalten. Da $\Delta\beta = 0$ und $\Delta\lambda = \Delta\psi$, so folgt:

$$\Delta\alpha = \frac{d\alpha}{d\lambda}\Delta\psi + \frac{d\alpha}{d\varepsilon}\Delta\varepsilon \tag{30}$$
$$\Delta\delta = \frac{d\delta}{d\lambda}\Delta\psi + \frac{d\delta}{d\varepsilon}\Delta\varepsilon.$$

Die hierin auftretenden Differentialquotienten erhält man leicht durch Differenziation der Formeln (14) (Seite 479):

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = \cos\varepsilon + \operatorname{tg}\delta \sin\alpha \sin\varepsilon \qquad \frac{d\alpha}{d\varepsilon} = -\operatorname{tg}\delta\cos\alpha \tag{31}$$
$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \cos\alpha \sin\varepsilon \qquad \frac{d\delta}{d\varepsilon} = \sin\alpha.$$

Der Faktor von cos ☊ im Ausdrucke von $\Delta\varepsilon$, nämlich $9''.21$ heißt die **Nutationskonstante** und muß aus Beobachtung von Gestirnsörtern durch eine $18^2/_3$jährige Periode ermittelt werden. Durch ihn lassen sich, wie die Theorie zeigt, die übrigen Koeffizienten in $\Delta\varepsilon$ und $\Delta\psi$ ausdrücken.

13. Zur bequemen **Berechnung** der Nutationsausdrücke werden nach **Bessel** in den astronomischen Jahrbüchern Einrichtungen getroffen, die wir kurz auseinandersetzen wollen.

Ein wahrer Ort wird in den mittleren für dasselbe Datum verwandelt, indem man den Betrag der Nutation von ihm abzieht; solche auf verschiedene mittlere Systeme bezogene Örter würde man nicht einer und derselben Untersuchung zugrunde legen können; man verbindet daher mit der Befreiung eines Ortes von der Nutation die Reduktion auf ein mittleres für alle Orte gleiches System und wählt hierzu das des Anfanges des tropischen Jahres. Auf diese Weise gelingt es einfach, alle in demselben Jahr angestellten Beobachtungen

auf ein Koordinatensystem zu beziehen (Reduktion auf den Jahresanfang). Liegen die Beobachtungen in verschiedenen Jahren, so reduziert man sie zuerst auf den betreffenden Jahresanfang und bringt dann alle durch bloße Anbringung der Präzession auf dasselbe mittlere System, nämlich das feste der ganzen Untersuchung zugrunde gelegte. Zu dieser letzteren Operation bedarf es keiner besonderen Einrichtungen, da die Präzessionsformeln einfach genug sind.

Hat man einen mittleren auf den Jahresanfang bezogenen Ort in einen wahren für ein bestimmtes Datum umzuwandeln, so bringt man ihn zuerst durch die Präzession auf den Jahresanfang des betreffenden Datums und dann durch Anbringung der Nutation und der Präzession auf das wahre System des Datums (Reduktion auf den wahren Ort). Offenbar sind die Reduktion auf den Jahresanfang und die Reduktion auf den wahren Ort absolut einander gleich und haben entgegengesetztes Vorzeichen. Wir wollen, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, das Vorzeichen in den nachfolgenden Formeln so wählen, daß es der Reduktion auf den wahren Ort entspricht, wie dies auch in den Jahrbüchern üblich ist.

Wenn mit τ die Zeit bezeichnet wird, vom Anfang des tropischen Jahres bis zum Datum, ausgedrückt in Teilen des tropischen Jahres, dann wird die Reduktion vom mittleren Ort α, δ auf den wahren Ort α', δ' nach Formel (21), (30), (31):

$$\alpha' - \alpha = (m + n \sin\alpha \operatorname{tg}\delta)\,\tau + (\cos\varepsilon + \sin\alpha \operatorname{tg}\delta \sin\varepsilon)\,\Delta\psi - \cos\alpha \operatorname{tg}\delta \cdot \Delta\varepsilon$$

$$\delta' - \delta = n \cos\alpha \cdot \tau + \cos\alpha \sin\varepsilon \cdot \Delta\psi + \sin\alpha \cdot \Delta\varepsilon,$$

oder, da (Seite 502)

$$m = p\cos\varepsilon - \lambda \qquad p = \text{Lunisolarpräzession in Länge}$$
$$n = p\sin\varepsilon \qquad \lambda = \text{Planetenpräzession in Rektasz.}$$

$$\alpha' - \alpha = (m + n \sin\alpha \operatorname{tg}\delta)\left(\tau + \frac{\Delta\psi}{p}\right) + \lambda\,\frac{\Delta\psi}{p} - \cos\alpha \operatorname{tg}\delta \cdot \Delta\varepsilon$$

$$\delta' - \delta = n\cos\alpha\left(\tau + \frac{\Delta\psi}{p}\right) + \sin\alpha \cdot \Delta\varepsilon.$$

Setzt man jetzt die nur vom Datum abhängigen Größen:

$$\tau + \frac{\Delta\psi}{p} = A$$
$$(32) \qquad -\Delta\varepsilon = B$$
$$\lambda\,\frac{\Delta\psi}{p} = E$$

und die vom betreffenden Gestirn abhängigen Größen

$$(33)\qquad \begin{array}{r|l} m + n \sin\alpha \operatorname{tg}\delta = a & n\cos\alpha = a' \\ \cos\alpha \operatorname{tg}\delta = b & -\sin\alpha = b', \end{array}$$

so wird:

$$(34)\qquad \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= Aa + Bb + E \\ \delta' - \delta &= Aa' + Bb'. \end{aligned}$$

Die vom Sternort unabhängigen Größen ABE, (Besselsche Reduktionsgrößen) werden von den astronomischen Jahrbüchern von Tag zu Tag mitgeteilt; die nur vom Sternort und den Konstanten m, n abhängigen Größen $aa'bb'$ (Besselsche Konstante) können für einen und denselben Fixstern längere Zeit (mindestens ein Jahr) als konstant angenommen werden. Die Formeln (34) gewähren also ein bequemes Mittel zur Ausführung der Reduktionsrechnungen.

14. Hat man nur vereinzelte Örter eines Sternes zu reduzieren, dann empfiehlt es sich nicht, für ihn die Konstanten (33) zu berechnen, sondern man schlägt zweckmäßiger folgendes Verfahren ein. Es seien P und N (Fig. 239) die mittleren Pole von Äquator und Ekliptik für den Jahresanfang, P' und N' die wahren Pole für das Datum, α, δ die mittleren, α', δ' die wahren Koordinaten eines Sternes O; dann ist

$$\sphericalangle PNP' = p\tau + \Delta\psi$$

$$\sphericalangle NP'N' = a \quad (= \text{Planetenpräzession})$$

und die Hauptkreise PF senkrecht PN, und $P'F'$ senkrecht $P'N'$ führen zum mittleren bzw. wahren Frühlingspunkt F bzw. F', so daß

$$\sphericalangle FPO = \alpha \quad \sphericalangle F'P'O = \alpha'.$$

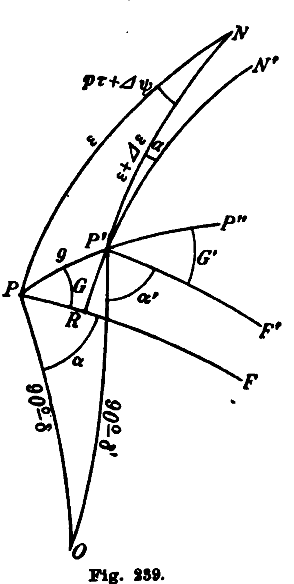


Fig. 239.

Nennt man nun den Bogen

$$PP' = g, \ \sphericalangle FPP' = G \quad \text{und} \quad F'P'P'' = G'$$

und R den Schnittpunkt von PF mit $N'P'$, so wird in Dreieck $PP'R$

$$(35)\qquad \begin{aligned} PR &= g\cos G = (p\tau + \Delta\psi)\sin\varepsilon = \left(\tau + \frac{\Delta\psi}{p}\right) p \sin\varepsilon = An \\ P'R &= g\sin G = -\Delta\varepsilon = B \end{aligned}$$

und in Dreieck $PP'N$ (worin $\sphericalangle PP'N = 180^0 - (90^0 - G' + a) = 90^0 + G' - a$)

$$\cos\varepsilon\sin(p\tau+\varDelta\psi)=-\cos G\sin(G'-a)+\sin G\cos(G'-a)\cos g$$

oder da g stets $< 30''$

$$(p\tau+\varDelta\psi)\cos\varepsilon=(G-G'+a)$$

oder:

$$\left(\tau+\frac{\varDelta\psi}{p}\right)p\cos\varepsilon=A(m+\lambda)=G-G'+a$$

a ist die Planetenpräzession in Rektazension für die Zeit vom Jahresanfang bis zum Datum, deren Geschwindigkeit λ ist, folglich ist

$$a=+\lambda\tau$$

und daher

$$(36)\qquad f=G-G'=Am+\lambda(A-\tau)=Am+\lambda\frac{\varDelta\psi}{p}=Am+E,$$

oder

$$G'=G-f.$$

Mittelst der durch die Formeln (35) und (36) zu berechnenden Größen G, g, f ergibt sich aus Dreieck $PP'O$:

$$(37)\qquad \begin{aligned}\cos\delta'\sin(\alpha'+G')&=\cos\delta\sin(\alpha+G)\\ \cos\delta'\cos(\alpha'+G')&=\cos g\cos\delta\cos(\alpha+G)-\sin g\sin\delta\\ \sin\delta'&=\sin g\cos\delta\cos(\alpha+G)+\cos g\sin\delta,\end{aligned}$$

wofür man in den meisten Fällen durch dieselbe Analyse, wie sie auf Seite 509 durchgeführt ist, substituieren kann:

$$(38)\qquad \begin{aligned}\alpha'-\alpha&=G-G'+g\,\mathrm{tg}\,\delta\sin(\alpha+G)=f+g\,\mathrm{tg}\,\delta\sin(\alpha+G)\\ \delta'-\delta&=g\cos(\alpha+G).\end{aligned}$$

Man kann diese Formeln auch direkt aus den früheren ableiten, indem man diese zunächst durch Substitution von (32) so schreibt:

$$\begin{aligned}\alpha'-\alpha&=(mA+E)+\mathrm{tg}\,\delta\,(nA\sin\alpha+B\cos\alpha)\\ \delta'-\delta&=nA\cos\alpha-B\sin\alpha\end{aligned}$$

und dann

$$\begin{aligned}f&=mA+E\\ g\cos G&=nA\\ g\sin G&=B\end{aligned}$$

darin einträgt; man erfährt dann aber nicht die geometrische Bedeutung der Größen G, g, f und erhält auch nicht die strengen Formeln (37). Wir wollen diese letzteren noch in folgender Form schreiben, die stets ausreicht, da $g < 30''$:

$$q = \sin g \operatorname{tg} \delta = \frac{g''}{206\,264.8} \operatorname{tg} \delta$$

$$\text{(39)} \qquad \operatorname{tg} \nu = \frac{q \sin(\alpha + G)}{1 - q \cos(\alpha + G)}$$

$$\alpha' - \alpha = \nu + f$$

$$\delta' - \delta = g \cos(\alpha + G + \tfrac{1}{2}\nu) \sec \tfrac{1}{2}\nu .$$

Die Größen G, g, f werden ebenfalls in den Jahrbüchern mitgeteilt.

§ 93. Aberration.

15. Wir haben in § 91 und 92 Änderungen der Koordinaten der Gestirne kennen gelernt, die von den Bewegungen der Koordinatensysteme herrühren; im gegenwärtigen Paragraphen werden Koordinatenänderungen zur Sprache gebracht, die ebenfalls nicht in den Bewegungen der Gestirne ihre Ursache haben, sondern in der für uns notwendigen Beobachtungsweise derselben. Der Umstand nämlich, daß die beobachteten Lichtwellen, die von den leuchtenden oder lichtreflektierenden Himmelskörpern ausgehen, Zeit gebrauchen, um bis zur Erde zu gelangen, bringt in Verbindung mit den Bewegungen der Erde scheinbare Änderungen in den Visierrichtungen hervor, die man berücksichtigen muß, wenn man die wahren Gestirnsörter zu kennen wünscht. Man faßt diese scheinbaren Koordinatenänderungen unter dem Namen Aberration zusammen. Unsere Aufgabe ist, den direkt gemessenen „scheinbaren" Ort (α apparens, δ app.) von dem Einfluß der Aberration zu befreien, um den „wahren" Ort (α vera, δ vera) zu erlangen.

Man kann leicht einen fundamentalen Satz nachweisen, der gestattet in sehr einfacher Weise allen Wirkungen der Aberration Rechnung zu tragen; nur der Umstand, daß es nicht möglich ist, ihn immer zur Anwendung zu bringen, zwingt uns die Erscheinung in zwei zu zerlegen, die die unpassenden Namen „Fixsternaberration" und „Planetenaberration" haben. Der genannte Hauptsatz soll uns zuerst beschäftigen.

16. Man muß zwei Dinge beachten: 1. Wenn ein Lichtstrahl zur Zeit T von einem Gestirn P ausgeht und zur Zeit t beim Beobachter auf der Erde anlangt, so gehört der gemessene Ort zur Zeit T, die um $t - T$ vor der Beobachtungszeit t liegt, und zu dem Ort der Erde, den diese zur Zeit t eingenommen hat. Hat also P während der „Aberrationszeit" $t - T$ eine merkbare geozentrische Bewegung ausgeführt, so muß diese zum Ort P hinzugefügt werden, um



den Ort für die Zeit t gesehen von der Erde zur Zeit t zu erhalten. Man bezeichnet dieses Phänomen als „Planetenaberration“, obwohl es natürlich auch bei den Fixsternen eintritt, nur daß es bei diesen nicht berücksichtigt werden kann oder braucht. 2. Wenn während der Zeit $t' - t$, die der Lichtstrahl Pa braucht, um die Länge l der Visierlinie vom Objektiv a bis zum Okular b zu durchlaufen, die Erde und mit ihr die Visierlinie von a nach a' rückt, dann würde bei einer in die Richtung aP eingestellten Visierlinie der Lichtstrahl nach b' treffen, während die Okularmarke bereits bis b'' gelangt ist, d. h. das Objekt wäre um die Strecke $b'b''$ bzw. den Winkel $b'a'b''$ außer der Visierlinie; um es in die Visierlinie zu bringen, muß diese um den Winkel $b''a'b' = a'b'a$, den sogenannten „Aberrationswinkel“, in der Bewegungsrichtung der Erde vorgerichtet werden. Ist also das Gestirn tatsächlich anvisiert, so wird durch die Kreise des Instrumentes die Richtung $b'a' - ba$ gemessen, während die wahre Richtung des Lichtstrahles ab' ist. Der Aberrationswinkel γ, um den sich die scheinbare und die wahre Richtung unterscheiden, hängt offenbar vom Verhältnis der Linien aa' und $a'b'$ ab, von denen die erstere von der Erde, die letztere vom Licht mit geradliniger gleichförmiger Geschwindigkeit in derselben Zeit $t' - t$ beschrieben wird, also vom Verhältnis der Erdgeschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit. Diese scheinbare Verschiebung der Visierlinie bezeichnet man als Fixsternaberration, obwohl sie natürlich auch bei den Planeten eintritt.

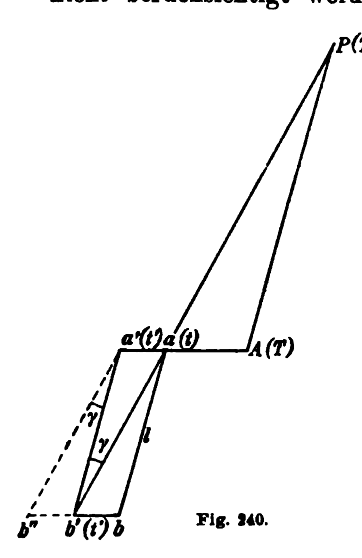


Fig. 240.

Machen wir jetzt die Annahme, daß die Aberrationszeit $t - T$ so kurz ist, daß der Ort der Erde für die Zeit T in der rückwärtigen Verlängerung von aa' in A liegt, so stellt PA die wahre Richtung nach dem Objekt P zur Zeit T dar; ferner werden die Strecken Aa und Pa einerseits, aa' und ab' andererseits in gleichen Zeiten mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen, die einen vom Licht, die anderen von der Erde, also wird

$$\frac{Aa}{aa'} = \frac{Pa}{ab'}$$

und daher PA parallel zu $a'b'$ oder ab. Folglich haben wir den Satz:

Der scheinbare Ort für die Zeit t ist identisch mit dem wahren Ort für die Zeit $T = t - (t - T)$.

Um aus gemessenen scheinbaren Örtern wahre zu erhalten, braucht man also nur die Beobachtungszeit um die Aberrationszeit zu verkürzen; für diese reduzierte Zeit sind die Örter wahre.

Die Anwendung dieses Satzes setzt jedoch zweierlei voraus: 1. daß die Aberrationszeit so kurz ist, daß Aa als gerade Linie betrachtet werden darf; 2. daß die Entfernung PA bekannt ist, aus der die Aberrationszeit berechnet werden muß.

Was den ersten Punkt anlangt, so kann man ihn für die Aberration, welche aus der Bewegung der Erde um die Sonne hervorgeht, für alle Körper innerhalb der Grenzen des Sonnensystems als erfüllt ansehen; denn auch noch für die Aberrationszeit des Neptun, die im Maximum 4.3 Stunden beträgt, bleibt der Einfluß der Krümmung der Erdbahn unter $0''.03$, also unter der Grenze der unvermeidlichen Beobachtungsfehler. Dagegen kann der Satz auf die Fixsterne keine Anwendung finden, denn bei diesen handelt es sich um Aberrationszeiten von Jahren, während welcher die Erdbewegung nicht als geradlinig angesehen werden kann.

Auch die zweite Bedingung ist bei Fixsternen im allgemeinen nicht erfüllt; für diese ist also obiger Satz unbrauchbar. Für die Körper des Sonnensystems ist die Entfernung entweder bekannt, dann gibt der Satz das bequemste Mittel, einen gemessenen scheinbaren Ort in einen wahren zu verwandeln oder umgekehrt; oder sie ist nicht bekannt, dann muß man sich die Wirkung der Aberration in zwei Teile zerlegt denken: einen ersten, die Fixsternaberration, den man berechnen kann und der die gemessene scheinbare Richtung $b'a'$ in $b'a$ überzuführen gestattet und der also die wahre Richtung von der Erde zur Zeit t nach dem Ort des Gestirnes zur Zeit T kennen lehrt und einen zweiten, der so lange unbekannt bleibt, bis die Entfernung ermittelt ist, die Planetenaberration.

Da die Fixsterne ihren Ort an der Sphäre nur sehr wenig ändern, ihr Ort für T also als identisch mit dem Ort für t angenommen werden kann, so fällt wegen ihrer großen Entfernung die Richtung PA mit der Richtung Pab' zusammen und man kann somit die Richtung $b'a$ als die wahre für die Zeit T betrachten, die man allerdings in den seltensten Fällen kennt und daher durch t ersetzt; solange man den Unterschied zwischen t und T als konstant ansehen kann, hat dies auch für die Untersuchung der lateralen Eigenbewegung der Fixsterne keine Folgen; da der Unterschied zwischen t und T für verschiedene Fixsterne aber jedenfalls sehr verschiedene Werte annehmen kann, so muß man im Auge behalten, daß der Anblick des Fixsternhimmels kein synoptischer ist. Für die Fixsterne ist man also gezwungen, als einzige Wirkung der Aberration das Vorstellen der Visierlinie infolge der Bewegung der Erde anzunehmen.



Der oben bewiesene Hauptsatz überhebt uns also nicht der Notwendigkeit die Erscheinung, die aus der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes folgt, in zwei gesonderte zu zerlegen: die Fixsternaberration, die aus den Bewegungen der Erde folgt, und die Planetenaberation, die daraus hervorgeht, daß zur Beobachtungszeit der eingelaufenen Wellen der bewegte Körper einen anderen Ort im Raume einnimmt als zur Zeit, wo die Wellen von ihm ausgingen.

17. Fixsternaberration. Nach den obigen Darlegungen besteht die Fixsternaberration in dem Unterschied der Richtungen ba und $b'a$, in denen der Punkt a von den beiden Stellen b und b' aus gesehen wird, welche die Erde am Anfang und am Ende der Zeit $t'-t$ einnimmt, die das Licht braucht, um die Länge des Fernrohrs l zu durchlaufen, und zwar stellt $b'a$ die wahre, ba die scheinbare Richtung der Strahlen dar. Um diese beiden Richtungen zu fixieren, legen wir durch b' als Anfangspunkt ein vorläufig beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem und bestimmen sie durch die in der XY-Ebene von der X-Achse aus gemessenen Winkel α und α' der Projektionen von $b'a$ und ba auf die XY-Ebene und durch die Winkel δ und δ', welche die Richtungen $b'a$ und ba mit diesen Projektionen bilden; dann stellen

$$\varDelta\alpha = \alpha' - \alpha, \quad \varDelta\delta = \delta' - \delta$$

den Betrag der Fixsternaberration vor in dem Sinne, daß dieser zum wahren Ort zu addieren ist, um den scheinbaren zu erhalten. Um die $\varDelta\alpha$, $\varDelta\delta$ durch die Geschwindigkeiten der Erde und des Lichtes auszudrücken, können wir, da es sich um kleine Verschiebungen handelt, mit Differentialen rechnen. Die Formeln für die Koordinaten von a

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= l\cos\delta\cos\alpha \\ y &= l\cos\delta\sin\alpha \\ z &= l\sin\delta \end{aligned}$$

geben differenziert:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \varDelta x &= -l\cos\delta\sin\alpha\cdot\varDelta\alpha - l\sin\delta\cos\alpha\cdot\varDelta\delta + \cos\delta\cos\alpha\cdot\varDelta l \\ \varDelta y &= +l\cos\delta\cos\alpha\cdot\varDelta\alpha - l\sin\delta\sin\alpha\cdot\varDelta\delta + \cos\delta\sin\alpha\cdot\varDelta l \\ \varDelta z &= l\cos\delta\cdot\varDelta\delta + \sin\delta\cdot\varDelta l \end{aligned}$$

und hieraus findet man:

$$\varDelta\alpha = -\frac{\sin\alpha}{l\cos\delta}\varDelta x + \frac{\cos\alpha}{l\cos\delta}\varDelta y$$

$$(3)\qquad \Delta\delta = -\frac{\cos\alpha\sin\delta}{l}\Delta x - \frac{\sin\alpha\sin\delta}{l}\Delta y + \frac{\cos\delta}{l}\Delta z$$
$$\Delta l = \cos\alpha\cos\delta\cdot\Delta x - \sin\alpha\cos\delta\cdot\Delta y + \sin\delta\cdot\Delta z.$$

Diese Beziehungen zwischen den Änderungen der rechtwinkligen und polaren Koordinaten eines Punktes bilden die Grundlage vieler Theorien. Im vorliegenden Fall verschieben wir den Anfangspunkt des Koordinatensystems von b' nach b um die Beträge $-\Delta x$, $-\Delta y$, $-\Delta z$ und erhalten durch die Formeln (3) die entsprechenden Änderungen der Polarkoordinaten. Nennt man $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ die Komponenten der Geschwindigkeit der Erde und μ die Geschwindigkeit des Lichtes, so wird

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}(t'-t) \quad \Delta y = \frac{dy}{dt}(t'-t) \quad \Delta z = \frac{dz}{dt}(t'-t)$$
$$l = \mu(t'-t)$$

und daher:

$$(4)\qquad \begin{aligned}\Delta\alpha &= -\frac{\sin\alpha}{\mu\cos\delta}\frac{dx}{dt} + \frac{\cos\alpha}{\mu\cos\delta}\frac{dy}{dt}\\ \Delta\delta &= -\frac{\cos\alpha\sin\delta}{\mu}\frac{dx}{dt} - \frac{\sin\alpha\sin\delta}{\mu}\frac{dy}{dt} + \frac{\cos\delta}{\mu}\frac{dz}{dt}.\end{aligned}$$

Dies sind die Hauptformeln, aus denen sich durch Spezialisierung des Koordinatensystems und der Bewegung der Erde alle besonderen ableiten lassen. Wir betrachten zwei Koordinatensysteme, das der Ekliptik und das des Äquators, und zwei Bewegungen der Erde, die translatorische um die Sonne oder die jährliche, und die rotatorische um ihre Achse oder die tägliche Bewegung.

18. Jährliche Aberration in Länge und Breite. An Stelle von α und δ treten Länge und Breite λ und β. Die Bewegung der Erde um die Sonne bezogen auf die Ekliptik ist durch

$$x = -R\cos\odot$$
$$y = -R\sin\odot$$
$$z = 0$$

gegeben, wenn R die Entfernung der Erde von der Sonne und $180^0 + \odot$ die Länge der Erde, also $\odot$ die Länge der Sonne bedeuten; daraus folgt:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dR}{dt}\cos\odot + R\sin\odot\frac{d\odot}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dR}{dt}\sin\odot - R\cos\odot\frac{d\odot}{dt}$$
$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

Die hierin auftretenden Koordinaten und Differentialquotienten müssen der Theorie der elliptischen Bewegung entnommen werden (siehe § 107).

Es sei $a = 1$ die große Halbachse, φ der Exzentrizitätswinkel, Γ die Länge des Perigäums der Sonnenbahn, v und M die wahre und mittlere Anomalie, dann wird:

$$\odot = v + \Gamma \qquad \frac{d\odot}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \sin v \frac{dM}{dt} \qquad \frac{d\odot}{dt} = \frac{\cos\varphi}{R^2} \frac{dM}{dt}$$

und somit

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos\varphi}\left(-\sin\varphi \sin v \cos\odot + \frac{\cos\varphi^2}{R} \sin\odot\right)\frac{dM}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\cos\varphi}\left(\sin\varphi \sin v \sin\odot + \frac{\cos\varphi^2}{R} \cos\odot\right)\frac{dM}{dt}.$$

Wird die Ellipsengleichung

$$\frac{\cos\varphi^2}{R} = 1 + \sin\varphi \cos v$$

und $\odot - v = \Gamma$ beachtet, so folgt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos\varphi}(\sin\varphi \sin\Gamma + \sin\odot)\frac{dM}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\cos\varphi}(\sin\varphi \cos\Gamma + \cos\odot)\frac{dM}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

Die Einführung dieser Ausdrücke in die Hauptgleichungen führt nach kurzer Reduktion auf

$$\lambda' - \lambda = -\frac{\sec\beta}{\mu\cos\varphi}(\cos(\lambda - \odot) + \sin\varphi \cos(\lambda - \Gamma))\frac{dM}{dt}$$

$$\beta' - \beta = \frac{\sin\beta}{\mu\cos\varphi}(\sin(\lambda - \odot) + \sin\varphi \sin(\lambda - \Gamma))\frac{dM}{dt}$$

Wird als Zeiteinheit der mittlere Sonnentag eingeführt, so stellt $\frac{dM}{dt}$ die mittlere tägliche Bewegung der Sonne dar; ihr Zahlenwert ist $3548''.19283$; ferner ist $\varphi = 0^0\, 57'\, 35''.3$. Die Geschwindigkeit des Lichtes kann durch astronomische Beobachtungen bestimmt werden: es durchläuft die astronomische Längeneinheit in $498^s.5 = 0.00577$ Tagen.

Der in einem Tag zurückgelegte Weg oder μ ist also gleich $\frac{1}{0.00577}$ astronomische Einheiten. Mit diesen Zahlen wird

$$A'' = \frac{1}{\mu \cos \varphi} \frac{dM}{dt} = 20''.47.$$

Man nennt dies die Aberrationskonstante; sie kann auch direkt durch Beobachtungen ermittelt werden und bietet dann einen Weg, die Lichtgeschwindigkeit zu ermitteln. Die Formeln für die jährliche Aberration in Länge und Breite werden jetzt:

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= -(20''.47 \cos(\lambda - \odot) + 0''.343 \cos(\lambda - \Gamma)) \sec \beta \\ \beta' - \beta &= (20''.47 \sin(\lambda - \odot) + 0''.343 \sin(\lambda - \Gamma)) \sin \beta \\ \Gamma &= 279^\circ 30' \quad \text{für} \quad 1800 \\ &= 281\ 13 \quad\ \text{„} \quad 1900 \\ &= 282\ 56 \quad\ \text{„} \quad 2000. \end{aligned} \tag{5}$$

Für die Fixsterne sind die zweiten Glieder konstant und sind in den aus den mittleren Örtern der Fixsternkataloge abgeleiteten Längen und Breiten schon enthalten; für sie wird also die Reduktion auf den scheinbaren Ort durch

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= -\,20''.47 \cos(\lambda - \odot) \sec \beta \\ \beta' - \beta &= +\,20.47 \ \sin(\lambda - \odot) \sin \beta \end{aligned}$$

gefunden. Für die Sonne wird $\lambda = \odot$ und $\beta = 0$ und daher die Aberration:

$$\begin{aligned} (\lambda' - \lambda)_\odot &= -\,20''.47 - 0''.343 \cos(\odot - \Gamma) \\ (\beta' - \beta)_\odot &= 0\,. \end{aligned}$$

19. Jährliche Aberration in Rektaszension und Deklination. Wählt man den Äquator als Grundebene, so werden die α und δ der Hauptformeln Rektaszension und Deklination des Gestirnes. Die Koordinaten der Erde werden, wenn wie vorher die Länge der Sonne mit $\odot$ und die Schiefe der Ekliptik mit ε bezeichnet wird

$$\begin{aligned} x &= -R \cos \odot \\ y &= -R \sin \odot \cos \varepsilon \\ z &= -R \sin \odot \sin \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Da man ε als konstant betrachten kann, so lassen sich die Geschwindigkeiten sofort aus den oben angegebenen ableiten:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos\varphi}(\sin\varphi\sin\Gamma + \sin\odot)\frac{dM}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi}(\sin\varphi\cos\Gamma + \cos\odot)\frac{dM}{dt}$$
$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varphi}(\sin\varphi\cos\Gamma + \cos\odot)\frac{dM}{dt}$$

und die Eintragung in die Hauptformeln führt auf:

$$(6)\quad \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -20''.47\ (\sin\alpha\sin\odot + \cos\alpha\cos\odot\cos\varepsilon)\sec\delta \\ &\quad [-\ 0''.343\,(\sin\alpha\sin\Gamma + \cos\alpha\cos\Gamma\cos\varepsilon)\sec\delta] \\ \delta' - \delta &= +20''.47\ (\sin\alpha\sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon)\cos\odot \\ &\quad -20''.47\ \cos\alpha\sin\delta\sin\odot \\ &\quad [+\ 0''.343\,(\sin\alpha\sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon)\cos\Gamma \\ &\quad -0''.343\,\cos\alpha\sin\delta\sin\Gamma]. \end{aligned}$$

Die in die zweiten Zeilen gesetzten von den Sonnenlängen unabhängigen Glieder [...] sind für jeden Fixstern konstant und in dem mittleren Ort der Fixsternkatologe bereits enthalten. Bei der Reduktion eines solchen mittleren Ortes auf den scheinbaren sind diese Glieder also wegzulassen.

20. Zur leichteren Berechnung der Formeln (6) setzt man, ähnlich wie bei Reduktion vom mittleren auf den wahren Ort

$$(7)\quad \begin{aligned} C &= -20''.47\cos\odot\cos\varepsilon \\ D &= -20\ .47\sin\odot \\ c &= \cos\alpha\sec\delta \\ d &= \sin\alpha\sec\delta \\ c' &= \operatorname{tg}\varepsilon\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta \\ d' &= \cos\alpha\sin\delta \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} h\sin H &= -20''.47\cos\odot\cos\varepsilon \\ h\cos H &= -20\ .47\sin\odot \\ i &= -20\ .47\cos\odot\sin\varepsilon \end{aligned}$$

und erhält dann

$$(8)\quad \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= c\,C + d\,D = h\sin(H+\alpha)\sec\delta \\ \delta' - \delta &= c'C + d'D = h\cos(H+\alpha)\sin\delta + i\cos\delta\,. \end{aligned}$$

Man kann von der einen oder der anderen Form Gebrauch machen; in der Regel benutzt man für Fixsterne, wo die c, d, ... für längere Zeit als konstant angenommen werden dürfen, die Form $cC + dD, \ldots$; für Wandelgestirne zieht man dagegen die andere Form vor, weil man dann der Berechnung von c, d, ... für jeden Ort überhoben ist. Die vom Gestirnsort unabhängigen, aber mit der Zeit veränderlichen Größen C, D, bzw. H, h, i werden für jeden Tag des Jahres gleichwie die Größen für die Präzession und Nutation A, B, g, G für jeden Tag des Jahres in den astronomischen Jahrbüchern mitgeteilt.

21. Tägliche Aberration in Rektaszension und Deklination. Diese wird hervorgerufen durch die Drehung der Erde um ihre Achse; in dem Koordinatensystem, dessen Z-Achse mit dieser Rotationsachse der Erde zusammenfällt, dessen XY-Ebene also im Erdäquator liegt, legen wir die X-Achse noch durch den Frühlingspunkt; dann werden die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Erdoberfläche, der um ϱ vom Erdmittelpunkt entfernt ist, dessen geozentrische Breite φ ist, und der momentan die Sternzeit θ zählt:

$$x = \varrho \cos\varphi \cos\theta$$
$$y = \varrho \cos\varphi \sin\theta$$
$$z = \varrho \sin\varphi,$$

denn θ ist der Stundenwinkel des Frühlingspunktes. Man hat also:

$$\frac{dx}{dt} = -\varrho \cos\varphi \sin\theta \frac{d\theta}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = +\varrho \cos\varphi \cos\theta \frac{d\theta}{dt}$$
$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

$\frac{d\theta}{dt}$ ist die Winkelgeschwindigkeit der Erde, die in der von uns oben eingeführten Zeiteinheit, dem mittleren Sonnentag auszudrücken ist. Da in einem Sterntage die Bewegung $360 \times 60 \times 60$ Bogensekunden beträgt und ein mittl. Tag = 1.002 737 909 Sterntage ist, so ist

$$\frac{d\theta}{dt} = 360 \times 60 \times 60 \times 1.002\,737\,909 \text{ Bogensekunden.}$$

Der Radius ϱ der Erde, die hier als Kugel angenommen werden kann, ist in astronomischen Einheiten auszudrücken. Da dieser Radius in der Entfernung 1 unter den Winkel 8″.80 (Sonnenparallaxe siehe S. 540) gesehen wird, so ist

$$\varrho = \sin 8''.80 = \frac{8''.80}{206264.8}.$$

Trägt man diese Zahlenwerte in obige Ausdrücke für die Geschwindigkeiten ein und diese und den oben abgeleiteten Wert von μ in die Hauptformeln (1) ein, so kommt nach leichter Reduktion

$$\alpha' - \alpha =$$

$$\left(\frac{8.80}{206\,264.8}\,1\,296\,000 \times 1.002\,7379 \times 0.005\,770\right)'' \cos\varphi \cos(\theta - \alpha) \sec\delta$$

$$\delta' - \delta =$$

$$\left(\frac{8.80}{206\,264.8}\,1\,296\,000 \times 1.002\,7379 \times 0.005\,770\right)'' \cos\varphi \sin(\theta - \alpha) \sin\delta\,.$$

Somit ergeben sich nach Ausrechnung des Zahlenausdruckes für die tägliche Aberration in α und δ folgende Formeln

$$\text{(9)} \qquad \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= 0''.320 \cos\varphi \cos(\theta - \alpha) \sec\delta \\ \delta' - \delta &= 0''.320 \cos\varphi \sin(\theta - \alpha) \sin\delta\,. \end{aligned}$$

Diese Korrektionen werden, als vom Beobachtungsort abhängig, stets bereits vom Beobachter angebracht; die von ihm mitgeteilten scheinbaren Örter sind also für tägliche Aberration schon korrigiert.

22. Die Aberrationskonstante. Die oben eingeführte Größe

$$A'' = \frac{n \sec\varphi}{\mu},$$

worin n die mittlere tägliche Bewegung der Erde in ihrer Bahn um die Sonne, φ der Exzentrizitätswinkel der Erdbahn, μ die Lichtgeschwindigkeit ausgedrückt in astronomischen Einheiten für den mittleren Sonnentag bedeuten, gehört wegen ihrer Beziehungen zu den wichtigsten Konstanten der Astronomie. Nennen wir a die große Halbachse der Erdbahnellipse (die astronomische Längeneinheit), so gibt die Theorie der elliptischen Bewegung für die momentane Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a^2 n \cos\varphi}{R^2}$$

oder wenn R aus

$$R = \frac{a \cos\varphi^2}{1 + \sin\varphi \cos v}$$

eingetragen wird:

$$\frac{dv}{dt} = n \sec\varphi \left(\frac{1 + \sin\varphi \cos v}{\cos\varphi}\right)^2.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß $n \sec\varphi$ das Mittel aus der größten ($v = 0$) und kleinsten ($v = 180^\circ$) Geschwindigkeit ist, die die Erde in ihrer

Bahn annehmen kann, und daß also die Aberrationskonstante das Verhältnis dieses Mittels der Erdgeschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit darstellt.

Nennt man ϱ den Erdradius am Äquator und $\pi_\odot$ die Äquatorealhorizontalparallaxe der Sonne, so ist

$$\frac{\varrho}{a} = \sin \pi_\odot = \frac{\pi''_\odot}{206\,264.8} \quad \text{oder} \quad a = \frac{\varrho\, 206\,264.8}{\pi''_\odot}.$$

Ferner ist $n = \left(\frac{360 \times 60 \times 60}{365.24220}\right)''$, also linear $n = \frac{a \cdot 3548.193}{206\,264.8}$; mithin $n = \frac{3548''.193 \times \varrho}{\pi''_\odot}$.

ϱ wird auf geodätischem Wege zu 6378.2 km bestimmt; die Lichtgeschwindigkeit kann durch astronomische und physikalische Methoden bestimmt werden. Nennt man sie μ_0, ausgedrückt in Kilometern und pro Sekunde, so wird für den Tag in km:

$$\mu = \mu_0 \times 24 \times 60 \times 60.$$

Folglich besteht die Relation

$$\frac{A''}{206\,264.8} = \frac{3548''.193 \times 6378.20 \times \sec \varphi}{\pi''_\odot\, \mu_0 \times 24 \times 60 \times 60}$$

oder

$$A'' \pi''_\odot \mu_0 = \frac{206\,264.8 \times 3548.193 \times 6378.2 \sec \varphi}{24 \times 60 \times 60}$$

oder

$$A'' \pi''_\odot \mu_0 = 54\,035\,300. \tag{10}$$

Die Zahl rechts ist so sicher bestimmt, daß sie als Konstante gelten kann. Wir haben also in (10) eine Relation, aus der jede der drei Größen A'', π'' und μ_0 bestimmt werden kann, wenn die beiden anderen anderweitig bekannt geworden sind. Am besten ist wohl bis jetzt die Lichtgeschwindigkeit durch physikalische Methoden bekannt: $\mu_0 = 299\,860$ km. Trägt man dies in (10) ein, so wird:

$$A'' \pi''_\odot = 180.20. \tag{11}$$

Hieraus läßt sich (natürlich unter der Voraussetzung, daß die ganze Aberrationstheorie richtig ist) jede der beiden Größen A'' und $\pi''_\odot$ durch die andere bestimmen. Beide können auf mehreren anderen Wegen bestimmt werden, die Aberrationskonstante z. B. aus Verfolgung der scheinbaren Gestirnsörter durch ein Jahr hindurch oder durch Messung der Verschiebung der Linien im Spektrum, die Sonnenparallaxe durch Messung von Planetenparallaxen oder aus gewissen Störungs-

gliedern in der Mond- und Erdtheorie; die Gleichung (11) gibt dann eine ausgezeichnete Kontrolle. Meist aber wird man sie zur Bestimmung der Sonnenparallaxe verwenden, da die übrigen Methoden gegen diese an Genauigkeit zurückstehen, die Aberrationskonstante mehr als doppelt so groß ist, als $\pi_{\odot}$, und mit großer Genauigkeit direkt gemessen werden kann.

23. Die Planetenaberration und ihre Verbindung mit der Fixsternaberration.

Während, wie oben gezeigt, bei den Fixsternen der Unterschied zwischen dem scheinbaren und dem wahren Ort lediglich durch die Fixsternaberration bedingt ist, muß bei den Körpern des Sonnensystems, die sich rasch bewegen, außerdem dem Umstande Rechnung getragen werden, daß der beobachtete Ort nicht der Beobachtungszeit t entspricht, sondern einer Zeit, die um die Aberrationszeit früher liegt, daß dieser Ort aber von dem Ort der Erde zur Zeit t gesehen wird. Die Aberrationszeit (auch Lichtzeit genannt) wird aus

$$\text{Ab.} = 498^{s}.5 \cdot \varDelta$$

gefunden, wobei $\varDelta$ die Entfernung des Gestirnes von der Erde, ausgedrückt in astronomischen Einheiten bedeutet.

Die Planetenaberration zu berücksichtigen gelingt am einfachsten, wenn die Entfernung des betreffenden Himmelskörpers bereits bekannt ist; man braucht dann nur nach dem oben bewiesenen Hauptsatz die Beobachtungszeit um die Aberrationszeit zu verkürzen, dann ist für diese reduzierte Zeit der ungeänderte Ort der wahre gesehen von der Erde zur selben Zeit unter Berücksichtigung beider Arten von Aberration. Man macht hiervon insbesondere Gebrauch bei der Vergleichung von Beobachtungen mit dem Resultate einer Rechnung in Gestalt einer Ephemeride. Gibt nämlich diese wahre Örter, so kann man die beobachteten scheinbaren Örter direkt mit ihr vergleichen, wenn man statt der Beobachtungszeiten die um die Lichtzeiten gekürzten nimmt; denn für diese letzteren sind die scheinbaren Örter die wahren.

Ist die Entfernung nicht bekannt, so erhält man aus einem scheinbaren Ort, gemessen zur Zeit t, einen wahren dadurch, daß man ihn zunächst von der Fixsternaberration befreit; dies ist dann der wahre Ort gehörig zur Zeit t — Ab. und gesehen von dem zur Zeit t gehörigen Erdort. Rechnet man mit solchen Örtern eine Bahn unter Zugrundelegung der zu t gehörigen Erdörter, so wird man, sobald in erster Näherung die Distanzen $\varDelta$ bekannt geworden sind, von den Beobachtungszeiten die Lichtzeiten in Abzug bringen und mit diesen reduzierten Zeiten die Rechnung zu Ende führen; man erhält dann die Bahn unter voller Berücksichtigung der Aberration.

24. Zusammenwirken von Präzession, Nutation und Aberration.

Um den auf den mittleren Äquator und den mittleren Frühlingspunkt eines Jahresanfanges bezogenen Ort eines Fixsternes in einen wahren für ein Datum in diesem Jahr zu verwandeln, hat man ihm die Präzession und Nutation nach den Formeln (34) oder (38) (Seite 517/8) hinzuzufügen; die Überführung dieses wahren Ortes in den scheinbaren wird durch die Formeln (8) (Seite 526) bewirkt. Gewöhnlich werden beide Operationen mitsammen vollzogen, indem man sich zur Überführung eines mittleren Ortes für den Jahresanfang auf den scheinbaren für ein Datum desselben Jahres der Formeln bedient (Red. ad loc. app.)

$$(12)\quad \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= Aa + Bb + Cc + Dd + E \\ &= f + g \sin(G + \alpha) \operatorname{tg} \delta + h \sin(H + \alpha) \sec \delta \\ \delta' - \delta &= Aa' + Bb' + Cc' + Dd' \\ &= g \cos(G + \alpha) + h \cos(H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta . \end{aligned}$$

Bei Berechnung der Ephemeriden von Planeten und Kometen, die zur Vergleichung mit Beobachtungen dienen sollen, läßt man die Aberrationsglieder weg, berechnet also nur den wahren Ort, da die beobachteten scheinbaren Orte für die um die Aberrationszeit gekürzte Beobachtungszeit zu wahren Örtern werden, die also unmittelbar mit der Ephemeride verglichen werden können.

Ist die umgekehrte Aufgabe zu lösen, d. h. ein beobachteter scheinbarer Ort auf den mittleren des Jahresanfanges überzuführen, so hat man den nach (12) berechneten Reduktionsgrößen nur das entgegengesetzte Vorzeichen zu geben (Reduktion auf den Jahresanfang).

§ 94. Die Parallaxe.

25. Wenn die Beobachtungen eines Gestirnes von verschiedenen Orten auf der Erdoberfläche aus angestellt werden, oder wenn der Beobachter durch die Bewegungen der Erde an verschiedene Stellen des Raumes geführt wird, so ändern sich damit die Richtungen nach dem Gestirn umgekehrt proportional seiner Entfernung. Sollen solche Beobachtungen miteinander verglichen werden, so müssen sie von den Einflüssen des speziellen Beobachtungsortes befreit und so reduziert werden, als ob sie von demselben Ort aus angestellt wären. Die hiermit zusammenhängenden Probleme, die man unter dem Namen Parallaxe zusammenfaßt, sollen uns in diesem Paragraphen beschäftigen.

Im allgemeinen versteht man unter Parallaxe den Unterschied

der Richtungen, unter denen ein Gegenstand erscheint, wenn er von zwei verschiedenen Standpunkten aus anvisiert wird. Wird das Gestirn O von A aus in der Richtung AO, von B aus in der Richtung BO gesehen und zieht man AO' parallel BO, so ist der Unterschied der Richtungen gleich dem Winkel OAO', welcher die Parallaxe heißt. Da dieser Winkel gleich AOB ist, kann man Parallaxe auch definieren als den Winkel, unter dem am Gestirn die Verbindungslinie AB der Standpunkte erscheint.

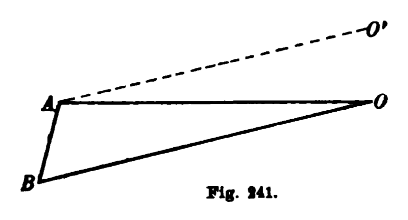


Fig. 241.

Dieser Winkel wird offenbar um so kleiner, je größer die Entfernung des Gestirnes im Verhältnis zur Verschiebung des Standpunktes ist, und er kann also unter Hinzunahme gewisser Festsetzungen als direktes Maß der Entfernung dienen. Da in der Astronomie direkte Entfernungsmessungen unmöglich sind, sondern immer Winkelmessungen an deren Stelle treten, ist es üblich, auch Entfernungen durch Winkel, eben die Parallaxen, auszudrücken.

26. Wir müssen unterscheiden zwischen Parallaxen, die aus der Bewegung der Erde um die Sonne hervorgehen, und solchen, die durch die Rotationsbewegung der Erde und die Lage des Beobachtungsortes auf der Erdoberfläche bedingt sind. Erstere sind für Körper des Sonnensystems sehr groß und dienen direkt zur Entfernungsmessung, d. h. zur Bahnbestimmung; die Parallaxe ist dann der Unterschied zwischen dem heliozentrischen und dem geozentrischen Ort und wird durch die bereits behandelten Formeln (Seite 487) dargestellt. Für die Mehrzahl der Fixsterne ist diese sogenannte jährliche Parallaxe verschwindend klein; für eine kleine Anzahl aber ist sie bestimmt worden und die Theorie hierfür wird uns unten beschäftigen. Die zweite Art von Parallaxe, die tägliche, ist für alle Fixsterne verschwindend klein, für die Körper des Sonnensystems aber bedingt sie eine bei jeder Beobachtung anzubringende Korrektion, die man als Parallaxe im engeren Sinne bezeichnet. Um nämlich Beobachtungen dieser Gestirne, die von verschiedenen Punkten der Erdoberfläche aus oder von demselben Ort aber zu verschiedenen Phasen der Rotation vorgenommen werden, miteinander vergleichen zu können, ist man übereingekommen, sie so zu reduzieren, als ob sie alle von einem bestimmten Punkt aus, dem Erdmittelpunkt, angestellt wären. Hier also ist Parallaxe identisch mit der Reduktion auf den geozentrischen Ort. Da hierbei die Erde nicht als Kugel vorausgesetzt werden darf, sind einige Entwicklungen über das Erdellipsoid vorauszuschicken.

27. Die Oberflächenform der Erde kann man sich durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Achse entstanden denken. Die große und die kleine Halbachse der erzeugenden Ellipse haben nach Bessel folgende Längen:

$$a = 6377.397 \text{ km}$$
$$b = 6356.079 \text{ km}.$$

Die Zahl

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{299.2}$$

nennt man die Abplattung; sie steht mit der Exzentrizität

$$e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

in der Beziehung

$$e = \sqrt{1-(1-\alpha)^2} = \sqrt{2\alpha-\alpha^2}$$

oder umgekehrt

$$\alpha = 1 - \sqrt{1-e^2}.$$

Die kleine Achse fällt mit der Rotationsachse der Erde zusammen, auf der die Ebene des Erdäquators senkrecht steht. Ein in einem Punkt der Erdoberfläche zu dieser errichtetes Lot schneidet die Rotationsachse und bildet mit ihr eine Ebene, welche aus dem Ellipsoid den Meridian des Ortes ausschneidet. Das Lot bildet mit dem Äquator einen Winkel φ (Fig. 242), der die geographische Breite oder die Polhöhe des Ortes genannt wird und durch astronomische Messungen bestimmt werden kann. Die Verbindungsgerade des Mittelpunktes des Ellipsoids mit dem Ort B, $MB = \varrho =$ Radiusvektor, bildet mit dem Äquator einen Winkel φ', welcher verbesserte Polhöhe oder geozentrische Breite heißt. φ' und ϱ werden für die Parallaxenformeln gebraucht und sollen daher durch φ, a, b dargestellt werden.

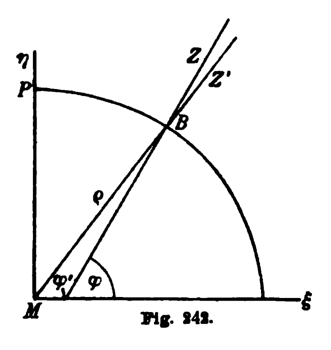


Fig. 242.

Führen wir im Meridianschnitt des Ortes B ein ebenes rechtwinkliges System ein mit dem Anfangspunkt im Mittelpunkt der Erde, der ξ-Achse im Äquator und der η-Achse in der Rotationsachse, dann wird

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Ellipse, aus der durch Differentiation folgt:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{\xi}{\eta} = -\frac{b^2}{a^2}\operatorname{cotg}\varphi';$$

da aber andererseits

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\operatorname{cotg}\varphi,$$

so ergibt sich die Beziehung

$$\frac{b^2}{a^2}\operatorname{cotg}\varphi' = \operatorname{cotg}\varphi$$

oder

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\varphi = (1-\alpha)^2\operatorname{tg}\varphi = (1-e^2)\operatorname{tg}\varphi$$

oder in Zahlen

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\varphi' = [9.9970916_{-10}]\operatorname{tg}\varphi.$$

Ferner folgt aus der Ellipsengleichung:

$$\xi^2 = \frac{a^2}{1+\frac{a^2}{b^2}\frac{\eta^2}{\xi^2}} = \frac{a^2}{1+\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi'}\operatorname{tg}\varphi'^2},$$

woraus:

$$\xi = \frac{a}{\sqrt{1+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varphi'}},$$

also

$$(2) \qquad \varrho = \xi\sec\varphi' = a\sqrt{\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'\cos(\varphi'-\varphi)}}.$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) kann man φ' und ϱ einfach genug berechnen; man kann aber auch Reihenentwicklungen für $\varphi'-\varphi$ und ϱ ableiten und Tabellen aufstellen, aus denen man diese Größen unmittelbar entnehmen kann. (Siehe z. B. *Albrecht,* Hilfstafeln zur geographischen Ortsbestimmung.)

Gewöhnlich wird ϱ angegeben, indem man a als Einheit einführt. Das Verhältnis dieser Einheit zur allgemeinen astronomischen Längeneinheit, der großen Halbachse der Erdbahn, ist gegeben durch $\sin\pi_\odot$, wenn mit $\pi_\odot = 8''.80$ die mittlere Äquatorialhorizontalparallaxe der Sonne bezeichnet wird, d. h. der Winkel, unter welchem vom Mittelpunkt der Sonne aus der Halbmesser des Erdäquators erscheint, wenn die Sonne in ihrer mittleren Entfernung von der Erde sich im Horizont eines Punktes des Erdäquators befindet. Folglich stellt $\varrho\sin\pi_\odot$ die Entfernung des Beobachtungsortes vom Erdmittelpunkte in astronomischen Einheiten dar.

28. Tägliche Parallaxe. Reduktion auf den Erdmittelpunkt. Wird das Gestirn O vom Beobachtungsort B aus in der Richtung BO beobachtet, vom Erdmittelpunkt M in der Richtung MO, so ist der Unterschied der beiden Richtungen oder die Paral-

laxe gleich dem Winkel OMO' oder BOM. Wird die Verbindungslinie des Erdmittelpunktes mit B nach dem Himmel zu verlängert bis Z' und werden die Winkel der vorerwähnten Richtungen mit MZ' mit bzw. ζ' und ζ bezeichnet, so ist die parallaktische Verschiebung gleich $\zeta' - \zeta$; ferner ist ersichtlich, daß diese Verschiebung in der Ebene $Z'MO$ des Dreiecks BMO stattfindet, so daß die drei Richtungen MZ', MO, MO' einer Ebene angehören und ihre Projektionen an die Sphäre, die wir auch mit Z', O, O' bezeichnen wollen,

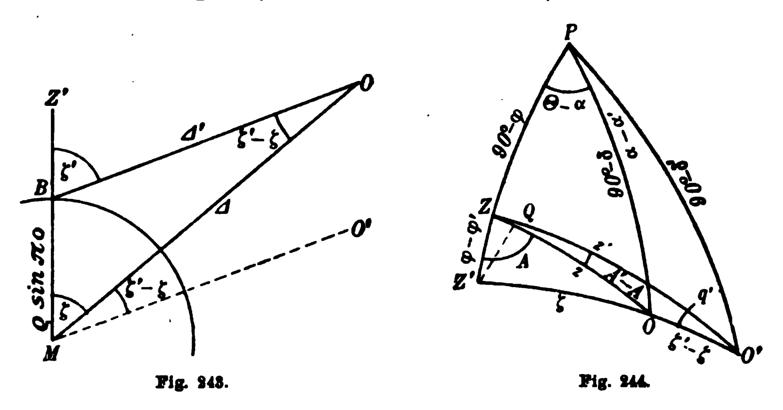


Fig. 243. Fig. 244.

einem Hauptkreis (Fig. 244). Man erkennt daraus sofort, daß wenn das wahre Zenit Z von B mit Z' zusammenfiele, d. h. wenn die Erde sphärisch wäre, die einzige Wirkung der Parallaxe in einer Vergrößerung der Zenitdistanz bestehen würde. Tatsächlich weicht Z von Z' um den Winkel $\varphi - \varphi'$ ab, so daß die Wirkungen der Parallaxe auf die Koordinaten des Zenitalsystems andere werden, wie wir nun untersuchen wollen.

Der Hauptkreis durch Z und Z' ist der Meridian des Ortes; $Z'ZO$ und $Z'ZO'$ sind also das geozentrische und das scheinbare Azimut des anvisierten Objektes, die wir mit A und A' bezeichnen wollen; ebenso seien die Zenitdistanzen von O und O' z und z'. Die Wirkung der Parallaxe auf die Koordinaten ist dann $A' - A$ und $z' - z$ und diese Differenzen sind nun zu bestimmen. Das Dreieck ZOO', in dem wir den Winkel bei O' mit η' bezeichnen, gibt, da $OO' = \zeta' - \zeta$ ist:

$$\sin z \sin (A' - A) = \sin \eta' \sin (\zeta' - \zeta)$$
$$\sin z \cos (A' - A) = \sin z' \cos (\zeta' - \zeta) - \cos z' \sin (\zeta' - \zeta) \cos \eta'$$
$$\cos z = \cos z' \cos (\zeta' - \zeta) + \sin z' \sin (\zeta' - \zeta) \cos \eta',$$

woraus durch einen leicht ersichtlichen Prozeß:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \sin z \sin(A'-A) &= \sin(\zeta'-\zeta)\sin\eta' \\ \sin(z'-z) &= \sin(\zeta'-\zeta)\cos\eta' - 2\sin z\cos z'\sin\tfrac{1}{2}(A'-A)^2, \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf:

$$\sin z = \frac{\sin\eta'}{\sin(A'-A)}\sin(\zeta'-\zeta)$$

$$\begin{aligned} \sin z \sin(A'-A) &= \sin(\zeta'-\zeta)\sin\eta' \\ \sin(z'-z) &= \sin(\zeta'-\zeta)(\cos\eta' - \cos z'\sin\eta'\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A'-A)). \end{aligned}$$

Nennt man die geozentrische Entfernung des Gestirnes in astronomischen Einheiten $MO = \Delta$, so folgt aus Fig. 243

$$\sin(\zeta'-\zeta) = \frac{\varrho\sin\pi_\odot}{\Delta}\sin\zeta';$$

ferner gibt das Dreieck $ZZ'O$

$$\begin{aligned} \sin\zeta'\sin\eta' &= \sin A'\sin(\varphi-\varphi') \\ \sin\zeta'\cos\eta' &= \sin z'\cos(\varphi-\varphi') - \cos z'\sin(\varphi-\varphi')\cos A', \end{aligned}$$

also wird aus obigen Formeln:

$$(4)\qquad \sin z\sin(A'-A) = \frac{\varrho\sin\pi_\odot}{\Delta}\sin(\varphi-\varphi')\sin A'$$

$$\sin(z'-z) = \frac{\varrho\sin\pi_\odot}{\Delta}\left(\sin z'\cos(\varphi-\varphi') - \cos z'\sin(\varphi-\varphi')\frac{\cos\frac{1}{2}(A'+A)}{\cos\frac{1}{2}(A'-A)}\right).$$

Diese Formeln sind völlig streng; man braucht aber selbst bei dem uns nächsten Himmelskörper, dem Monde, nicht in dieser Strenge von ihnen Anwendung zu machen, sondern man kann den Faktor

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A'+A)}{\cos\frac{1}{2}(A'-A)} = \cos A' + \sin A'\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A'-A)$$

darin unbedenklich durch $\cos A'$ ersetzen, es sei denn, daß der Mond einmal in nächster Nähe des Zenits beobachtet würde. Hiervon abgesehen wird aus (4)

$$(5)\qquad \begin{aligned} \sin z\sin(A'-A) &= \frac{\varrho\sin\pi_\odot}{\Delta}\sin(\varphi-\varphi')\sin A' \\ \sin(z'-z) &= \frac{\varrho\sin\pi_\odot}{\Delta}(\sin z'\cos(\varphi-\varphi') - \cos z'\sin(\varphi-\varphi')\cos A'). \end{aligned}$$

Fällt man von Z' das Lot $Z'Q = n$ auf ZO' und nennt $ZQ = N$, so wird

$$(6)\quad \begin{cases} \sin n = \sin(\varphi - \varphi') \sin A' \\ \cos n \sin N = \sin(\varphi - \varphi') \cos A' \\ \cos n \cos N = \cos(\varphi - \varphi') \end{cases}$$

und daher aus den Formeln (5)

$$(7)\quad \begin{cases} \sin z \sin(A' - A) = \dfrac{\varrho \sin \pi_{\odot}}{\Delta} \sin n \\ \sin(z' - z) = \dfrac{\varrho \sin \pi_{\odot}}{\Delta} \cos n \sin(z' - N). \end{cases}$$

Für n und N wird man sich auf Sternwarten eine kleine Tafel berechnen, worauf die Berechnung von (7) sich sehr einfach gestaltet. Für andere Himmelskörper als den Mond ist die Parallaxe so klein, daß man nach

$$(8)\quad \begin{cases} A' - A = \dfrac{\varrho \cdot 8''.80}{\Delta} \dfrac{\sin n}{\sin z} \\ z' - z = \dfrac{\varrho \cdot 8''.80}{\Delta} \cos n \sin(z' - N) \end{cases}$$

rechnen darf. Für diese ist es auch gleichgültig, ob man A' oder A benutzt, wogegen für den Mond die Formeln (5) einer kleinen Umformung bedürfen, wenn man nicht A' und z', sondern A und z kennt. Setzt man $A' = A + (A' - A)$, und $z' = z + (z' - z)$ und entwickelt so kommt, wenn man jetzt n und N mit dem Argument A statt A' nach (6) rechnet,

$$(9)\quad \begin{aligned} \operatorname{tg}(A' - A) &= \frac{\dfrac{\varrho \sin \pi_{\odot}}{\Delta \sin z} \sin n}{1 - \dfrac{\varrho \sin \pi_{\odot}}{\Delta \sin z} \cos n \sin N} \\ \operatorname{tg}(z' - z) &= \frac{\dfrac{\varrho \sin \pi_{\odot}}{\Delta} \cos n \sin(z - N)}{1 - \dfrac{\varrho \sin \pi_{\odot}}{\Delta} \cos n \cos(z - N)}. \end{aligned}$$

29. Tägliche Parallaxe in Rektaszension und Deklination. Um die tägliche Parallaxe für die Koordinaten des Äquatorialsystems zu erhalten, brauchen wir nur statt des Punktes Z den Rotationspol P (Fig. 244), der auch im Meridian liegt, ins Auge zu fassen. Wird mit Θ die Sternzeit der Beobachtung bezeichnet und mit q' der „parallaktische Hilfswinkel" $Z'O'P$, so treten an Stelle von

	z	z'	A	A'	η'	$\varphi - \varphi'$
die Größen	$90° - \delta$	$90° - \delta'$	$\Theta - \alpha$	$\Theta - \alpha'$	q'	$90° - \varphi'$

und die strengen Formeln (3) geben unmittelbar:

$$\cos\delta \sin(\alpha - \alpha') = \sin(\zeta' - \zeta) \sin q'$$
$$\sin(\delta - \delta') = \sin(\zeta' - \zeta) \cos q' - 2 \cos\delta \sin\delta' \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \alpha')^2.$$

Bei allen Himmelskörpern mit Ausnahme des Mondes kann das letzte Glied außer Betracht bleiben und man erhält dann

$$\cos\delta \sin(\alpha - \alpha') = \frac{\varrho \sin \pi_\odot}{\varDelta} \sin\zeta' \sin q' = \frac{\varrho \sin \pi_\odot}{\varDelta} \cos\varphi' \sin(\Theta - \alpha')$$

$$(10) \qquad \sin(\delta - \delta') = \frac{\varrho \sin \pi_\odot}{\varDelta} \sin\zeta' \cos q'$$
$$= \frac{\varrho \sin \pi_\odot}{\varDelta} (\cos\delta' \sin\varphi' - \sin\delta' \cos\varphi' \cos(\Theta - \alpha')).$$

Zur leichteren Berechnung dieser ungemein häufig gebrauchten Formeln sind auf Sternwarten verschiedene Methoden im Gebrauch, z. B. folgende. Fällt man das Lot $Z'Q' = m$ auf PO' und nennt $PQ' = M$, so wird:

$$\begin{array}{rl|rl}
\sin m &= \cos\varphi' \sin(\Theta - \alpha') & \sin\zeta' \sin q' &= \sin m \\
\cos m \sin M &= \cos\varphi' \cos(\Theta - \alpha') & \sin\zeta' \cos q' &= \cos m \cos(\delta' + M) \\
\cos m \cos M &= \sin\varphi' & \cos\zeta' &= \cos m \sin(\delta' + M)
\end{array}$$

und daher

$$\cos\delta(\alpha - \alpha')'' = \frac{\varrho \pi''_\odot}{\varDelta} \sin m$$
$$(11) \qquad (\delta - \delta')'' = \frac{\varrho \pi''_\odot}{\varDelta} \cos m \cos(\delta' + M),$$

worin die Größen $\varrho\pi''_\odot \sin m$, $\varrho\pi''_\odot \cos m$, M einer kleinen Tafel mit dem Argument des Stundenwinkels $\Theta - \alpha'$ entnommen werden können.

Für den Mond ergeben die gleichfalls strengen Formeln (4)

$$\cos\delta \sin(\alpha - \alpha') = \frac{\varrho \sin \pi_\odot}{\varDelta} \cos\varphi' \sin(\Theta - \alpha')$$

$$\sin(\delta - \delta') = \frac{\varrho \sin \pi_\odot}{\varDelta} \left(\cos\delta' \sin\varphi' - \sin\delta' \cos\varphi' \frac{\cos(\Theta - \frac{1}{2}(\alpha + \alpha'))}{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')}\right).$$

Um diese bequemer zu gestalten, setzt man

$$\operatorname{cotg}\gamma = \operatorname{cotg}\varphi' \frac{\cos(\Theta - \frac{1}{2}(\alpha + \alpha'))}{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')}$$

und erhält dann:

$$\begin{aligned} \cos\delta\sin(\alpha-\alpha') &= \frac{\varrho\sin\pi_\odot}{\Delta}\cos\varphi'\sin(\Theta-\alpha') \\ \sin(\delta-\delta') &= \frac{-\varrho\sin\pi_\odot}{\Delta}\sin\varphi'\frac{\sin(\delta'-\gamma)}{\sin\gamma}. \end{aligned} \tag{12}$$

Stehen nicht α' und δ' zur Verfügung, sondern α und δ, so verfährt man wie oben und erhält:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha-\alpha') &= \frac{\frac{\varrho\sin\pi_\odot}{\Delta\cos\delta}\cos\varphi'\sin(\Theta-\alpha)}{1-\frac{\varrho\sin\pi_\odot}{\Delta\cos\delta}\cos\varphi'\cos(\Theta-\alpha)} \\ \operatorname{tg}(\delta-\delta') &= -\frac{\frac{\varrho\sin\pi_\odot}{\Delta}\sin\varphi'\frac{\sin(\delta-\gamma)}{\sin\gamma}}{1-\frac{\varrho\sin\pi_\odot}{\Delta}\sin\varphi'\frac{\cos(\delta-\gamma)}{\sin\gamma}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Wird die Entfernung des Gestirnes vom Beobachtungsort $BO = \Delta'$ gebraucht, so berechnet man es am einfachsten aus:

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{\sin\zeta}{\sin\zeta'} = \frac{\sin(\Theta-\alpha)\cos\delta}{\sin(\Theta-\alpha')\cos\delta'}. \tag{14}$$

Mit Benutzung des oben eingeführten Hilfswinkels γ findet man auch:

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{\sin(\delta-\gamma)}{\sin(\delta'-\gamma)}. \tag{15}$$

30. Die Sonnenparallaxe. Aus Fig. 243 ersehen wir, wenn wir die Parallaxe eines Gestirnes $\zeta'-\zeta$ mit p bezeichnen, daß

$$\sin p = \frac{\varrho\sin\pi_\odot}{\Delta}\sin\zeta'. \tag{16}$$

Das Maximum dieses Wertes tritt für $\zeta' = 90^0$, also im Horizont ein; wir nennen daher p' definiert durch

$$\sin p' = \frac{\varrho\sin\pi_\odot}{\Delta} \tag{17}$$

die Horizontalparallaxe des Gestirnes. ϱ ist in Einheiten des Erdäquators auszudrücken und hat in eine Reihe nach Potenzen der Abplattung entwickelt mit überall ausreichender Genauigkeit den Wert:

$$\varrho = 1 - \alpha\sin\varphi'^2. \tag{18}$$

Der Maximalwert von $\sin p'$ tritt also ein für $\varphi' = 0$, d. h. am Äqua-

tor; bezeichnen wir ihn mit $\sin p_0$, so wird

(19) $$\sin p_0 = \frac{\sin \pi_\odot}{\Delta}$$

man nennt dies die Äquatorialhorizontalparallaxe. Nach ihrer Einführung wird

(20) $$\sin p = (1 - \alpha \sin \varphi'^2) \sin p_0 \sin \zeta.$$

Vermöge der Formel (19) tritt der Winkel p_0 an Stelle der Entfernung Δ und vermöge (20) kann die Parallaxe für beliebige Beobachtungsorte berechnet werden. Man gibt für die Planeten häufig, für Sonne und Mond fast ausschließlich die Parallaxe statt der Entfernung an.

Für die Sonne wird

$$\sin p_0 = \frac{\sin \pi_\odot}{R},$$

wenn mit R der Radiusvektor der nahezu elliptischen Sonnenbahn bezeichnet wird. Wird die große Halbachse derselben als astronomische Längeneinheit eingeführt, so wird

$$\frac{1}{R} = 1 + e \cos v_\odot \qquad e = \text{Exzentrizität der Sonnenbahn}$$

und daher

$$\sin p_0 = \sin \pi_\odot (1 + e \cos v_\odot).$$

Daraus ist ersichtlich, daß $\pi_\odot$ die Äquatorialhorizontalparallaxe der Sonne für die Entfernung 1 vorstellt, also direkt die astronomische Längeneinheit definiert, wie oben bereits ausgesprochen wurde. Auf der Vergleichung mit dieser Einheit beruht alle Entfernungsmessung in der Astronomie, sie in irdischem Maß auszudrücken ist also das fundamentalste Problem für die astronomische Messung. Die Dimensionen des Erdkörpers können und müssen dabei als bekannt vorausgesetzt werden.

Zur direkten geometrischen Bestimmung der Parallaxe stehen für die Sonne wie für jeden Körper des Sonnensystems zwei Methoden zur Verfügung, je nachdem man die zu messende parallaktische Verschiebung durch Änderung des Beobachtungsortes auf der Erdoberfläche oder durch die Drehung der Erde herbeiführt. Den auf die Sonne angewandten Formeln (10) können die günstigsten Bedingungen und die Berechnungsmethoden entnommen werden. Ändert man den Ort in geographischer Länge, so werden gleichzeitige Rektaszensionsmessungen, ändert man ihn in Breite, so werden gleichzeitige Deklinationsmessungen zum Ziel führen. Benutzt man die Drehung der Erde,

dann geben Rektaszensionsmessungen, ausgeführt am selben Orte zu möglichst verschiedenen Stundenwinkeln das beste Resultat. An der Sonne selbst können nun solche Messungen mit der nötigen Schärfe nicht ausgeführt werden, einerseits wegen des unscharfen Sonnenrandes, andererseits weil mit der Sonne gleichzeitig benachbarte Fixsterne, also sichere Anhaltspunkte für die Messung nicht sichtbar sind. Man bestimmt daher direkt die Parallaxen anderer Körper des Sonnensystems durch die angegebenen Methoden, und zwar zweckmäßig solcher, welche der Erde möglichst nahe kommen, also eine große Parallaxe haben. Da alle Entfernungen im Sonnensystem — mit Ausnahme des Erdmondes — durch das dritte Keplersche Gesetz miteinander zusammenhängen und die Umlaufszeiten als streng bekannt angenommen werden dürfen, so läßt sich aus der gemessenen Parallaxe eines Planeten sofort die Sonnenparallaxe ableiten. Als solche Planeten sind geeignet die Venus — insbesondere bei ihren Vorübergängen vor der Sonnenscheibe —, der Mars und die nächsten kleinen Planeten, besonders Eros.

31. Den Zusammenhang der Sonnenparallaxe mit der Aberrationskonstante haben wir bereits oben besprochen und darin ein wertvolles Mittel erkannt, die erstere zu bestimmen. Dabei wird die Kenntnis der Lichtgeschwindigkeit als durch physikalische Methoden gegeben vorausgesetzt; man kann diese aber auch durch eine astronomische Methode bestimmen, jene Methode, durch die überhaupt zuerst die endliche Geschwindigkeit des Lichtes durch *Römer* entdeckt wurde. Wenn die Verfinsterungen der Jupitertrabanten von zwei Stellen der Erdbahn aus beobachtet werden, die nahe um den Durchmesser der Erdbahn voneinander entfernt sind, so werden sich die Zeiten des Eintrittes dieser Phänomene um den Betrag unterscheiden, den das Licht zum Durchlaufen des Durchmessers der Erdbahn gebraucht. Die Hälfte dieses Betrages heißt Lichtzeit $= L$. Ihr Produkt mit der Lichtgeschwindigkeit μ gibt die astronomische Längeneinheit, die $= \frac{\varrho_0}{\sin \pi_\odot}$ anzusetzen ist. Die Beziehung zwischen Lichtzeit, Lichtgeschwindigkeit, Radius des Erdäquators ϱ_0 und Sonnenparallaxe wird also:

$$L\mu = \frac{\varrho_0}{\sin \pi_\odot}$$

und gestattet die Bestimmung von μ oder $\pi_\odot$, wenn L und ϱ_0 als bekannt angenommen werden. Leider ist weder die Theorie der Jupitertrabanten noch die Methode der Beobachtung ihrer Verfinsterungen bereits soweit ausgebildet, als daß die Messung von L mit dem jetzt erforderlichen Grad von Genauigkeit erfolgen könnte.

32. Außer den geometrischen und physikalischen Methoden der Bestimmung der Sonnenparallaxe hat man noch solche, welche in den Eigenschaften und Wirkungen der Gravitation ihre Grundlage haben. Da diese umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung wirkt, kann aus der Wirkung auf die Entfernung geschlossen werden. Im vorliegenden Fall sind die in Betracht kommenden Körper Mond, Sonne und Erde; deren gegenseitige Anziehung wird durch die Mechanik des Himmels untersucht und gibt durch die Vergleichung mit der Beobachtung Beziehungen für die Sonnenparallaxe.

a) Die „parallaktische Ungleichheit" in der Mondbewegung ist eines von den vielen Störungsgliedern, welche durch die Sonne in der Bewegung des Mondes um die Erde hervorgebracht werden. Ohne auf die strenge analytische Ableitung hier einzugehen, können wir doch einen allgemeinen Begriff von der Entstehung des Gliedes geben. Nehmen wir an, wir hätten die Mondtheorie im allgemeinen mit einem mittleren Wert der störenden Kraft der Sonne durchgeführt, dann ist der wahre Wert zur Zeit der Konjunktion (Neumond) größer, zur Zeit der Opposition (Vollmond) kleiner als der mittlere; infolge dessen wird von Vollmond zum Neumond eine Beschleunigung, vom Neumond zum Vollmond eine Verzögerung gegen die mittlere Bewegung hervorgerufen. In den Syzygien selbst wird der Einfluß auf die Länge Null sein. Das Maximum wird in den Quadraturen eintreten und zwar das positive Maximum der zur mittleren Bewegung hinzuzufügenden Ungleichheit im letzten Viertel, das negative im ersten Viertel. Es liegt auf der Hand, daß die Ungleichheit wesentlich vom Verhältnis der Sonnenentfernung zur Mondentfernung, d. h. vom Verhältnis der Sonnen- zur Mondparallaxe abhängt. Der analytische Ausdruck ist

$$J = \frac{-f}{\sin 1''} \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{\sin \pi_{\odot}}{\sin \pi_{☽}} \frac{1}{1-\frac{1}{8}\nu^2} \sin (☽ - \odot),$$

worin f eine bekannte Funktion der Elemente der Sonnen- und Mondbahn, ν das Verhältnis der mittleren Bewegungen, μ die Mondmasse in Einheiten der Erdmasse, $\pi_{\odot}$ und $\pi_{☽}$ Sonnen- und Mondparallaxe, $\odot$ und $☽$ die mittleren Längen von Sonne und Mond sind. Die Zahlenwerte

$$f = 0.2412, \quad 1 : \mu = 81.7, \quad \pi_{☽} = 3422''.7$$

werden durch anderweitige Beobachtungen mit voller Sicherheit geliefert, so daß obiger Ausdruck die Beziehung gibt:

$$J = -14.1827 \pi''_{\odot} \sin (☽ - \odot).$$

J kann nun direkt durch Beobachtung des Mondes in den Quadra-

turen bestimmt werden, wir haben in der Gleichung also ein vortreffliches Mittel, $\pi_\odot$ abzuleiten. Der Zahlenwert von J ist rund 125″. Leider sind Beobachtungen des Mondes in den Quadraturen mit besonderen Schwierigkeiten und Unsicherheiten verknüpft, so daß die theoretische Güte der Methode etwas beeinträchtigt wird.

b) Die „Mondgleichung" in der Erdbewegung. Die Erde bewegt sich um den Schwerpunkt des Systems Erde-Mond in einer Bahn, deren Radiusvektor zum genannten Schwerpunkt nach der Definition des Schwerpunkts gegeben ist durch

$$s = r \cdot \frac{\mu}{1+\mu},$$

wenn r die Entfernung des Mondes von der Erde und μ die Mondmasse in Einheit der Erdmasse ist. Diese Strecke projiziert auf die Achse senkrecht zur Richtung nach der Sonne und in der Ekliptik gibt

$$r \frac{\mu}{1+\mu} \cos\beta_☽ \sin(\lambda_☽ - \lambda_\odot),$$

wo $\lambda_☽$ und $\beta_☽$ Länge und Breite des Mondes, $\lambda_\odot$ die Länge der Sonne sind. Im Winkel von der Sonne aus gesehen, deren Entfernung vom Schwerpunkt r' sei, wird sie

$$\frac{r}{r'} \frac{\mu}{1+\mu} \cos\beta_☽ \sin(\lambda_☽ - \lambda_\odot)$$

oder

$$\Delta\lambda = \left[\frac{\pi''_\odot}{\sin\pi_☽} \frac{\mu}{1+\mu}\right] \cos\beta_☽ \sin(\lambda_☽ - \lambda_\odot).$$

Der Faktor $[\ldots] = L$ heißt der Koeffizient der Mondgleichung; man kann ihn bestimmen, indem man Sonnenbeobachtungen zu den Zeiten seines Maximaleinflusses, also bei $\lambda_☽ - \lambda_\odot = \pm 90^0$ (Mondquadraturen), miteinander vergleicht. Sein numerischer Betrag ist zu 6″.45 bestimmt worden und gibt also die Beziehung zwischen der Sonnenparallaxe und der Mondmasse:

$$\pi_\odot \frac{\mu}{1+\mu} = 6''.45 \sin\pi_☽ = 0''.1064.$$

Man kann nun zwar die Mondmasse anderweitig bestimmen (durch die Theorie der Lunisolarpräzession und der Nutation) und erhielte so ein Mittel, $\pi_\odot$ aus der abgeleiteten Beziehung abzuleiten; man sieht aber leicht, daß dieser Wert schon theoretisch wenig Vertrauen verdient, daß man also zweckmäßiger aus der Gleichung die Mondmasse ableitet; man findet sie mit $\pi = 8''.80$ zu 1 : 81.7.

c) Beziehung zwischen der Sonnenparallaxe und der Erdmasse. Vergleicht man die Anziehung, welche die Masse der Erde auf einen Punkt ihrer Oberfläche ausübt, mit jener, die sie auf die Sonne ausübt, so muß sich eine Beziehung zwischen der Erdmasse und der Sonnenparallaxe ergeben. Wir betrachten zuerst die Anziehung der Erde auf eine Masse an ihrer Oberfläche. Wäre die Erde eine aus homogenen Schichten zusammengesetzte Kugel, so würde ihre Anziehung dieselbe sein wie die, wenn wir die gesamte Erdmasse in ihrem Mittelpunkt konzentriert denken. Da die Erde ein abgeplattetes Sphäroid ist, so gilt dies nicht, wohl aber wird durch die Mechanik des Himmels nachgewiesen, daß Punkte des Parallels φ', bestimmt durch $\sin \varphi'^2 = \frac{1}{3}$, immer so angezogen werden, als ob die Erdmasse im Zentrum vereinigt wäre. Ist ϱ' der zu diesem Parallel gehörige Radiusvektor, so wird die Anziehung G' der Masse der Erde m auf die Masseneinheit an ihrer Oberfläche im Parallel φ' gegeben durch

$$G' = k^2 \frac{m}{\varrho'^2} \tag{1}$$

wo k^2 die Attraktionskonstante oder die Anziehung zweier Massen 1 in der Einheit der Entfernung ist.

Die Schwere g kann mittels des Sekundenpendels gemessen werden. *Helmert* hat durch Vereinigung aller bisherigen Pendelmessungen gefunden

$$g = 9\,\text{m}.7800\,(1 + 0.005310 \sin \varphi^2),$$

also für $\varphi = \varphi'$

$$g' = 9\,\text{m}.79731,$$

wobei als Längeneinheit das Meter, als Zeiteinheit die Sekunde mittlerer Sonnenzeit zugrunde gelegt ist.

Von der Schwere ist die Wirkung der Zentrifugalkraft in Abzug zu bringen, um die Anziehung zu erhalten. Die Zentrifugalkraft in der Breite φ ist

$$-\frac{4\pi^2\varrho_0}{86164^2}\cos \varphi^2,$$

wo $\varrho_0 = 6377397$ m der Radius des Erdäquators und 86164 die Anzahl der Sekunden mittlerer Zeit in einem Sterntag ist; für die Breite φ' wird dies -0.02256, so daß

$$G' = g' + 0.02256 = 9\,\text{m}.81987.$$

Für ϱ' erhält man

$$\varrho' = 6370291\ \text{m},$$

so daß in (1) außer k^2 nur m unbestimmt bleibt.

Die Anziehung des Systems Erde + Mond $= m + \frac{1}{81.7} m$ auf die Sonne wird uns geboten durch das dritte Keplersche Gesetz:

$$k^2 \left(1 + m + \frac{1}{81.7} m\right) = n^2 a^3. \tag{2}$$

Hierin ist 1 die Sonnenmasse, n die mittlere Bewegung der Erde in der Zeiteinheit (Sekunde), a die halbe große Achse der Erdbahn ausgedrückt in Metern. Nun ist nach der Definition der Sonnenparallaxe $\pi_\odot$

$$\sin \pi_\odot = \pi_\odot \sin 1'' = \frac{\varrho_0}{a},$$

also

$$a = \frac{\varrho_0}{\pi_\odot \sin 1''} = \frac{6\,377\,397}{\pi_\odot \sin 1''};$$

ferner ist n, in Sekunden verwandelt:

$$\frac{n}{\sin 1''} = \frac{360 \times 60 \times 60}{365.2564 \times 86400} = 0''.041\,067\,05;$$

es bleibt in (2) also außer k^2 und m nur $\pi_\odot$ unbestimmt.

Dividiert man jetzt die Gleichungen (1) und (2) durcheinander, so kommt:

$$\frac{1}{a^3} = \frac{m}{1 + m + \frac{1}{81.7} m} \frac{n^2}{\varrho'^2} \frac{1}{G'},$$

oder wenn m^2 vernachlässigt wird

$$\pi_\odot^3 = m \frac{n^2}{G'} \frac{\varrho_0^3}{\varrho'^2} \left(\frac{1}{\sin 1''}\right)^3,$$

oder

$$\pi_\odot = \sqrt[3]{m}\, \sqrt[3]{B},$$

wo

$$B = \left(\frac{n}{\sin 1''}\right)^2 \frac{\varrho_0^3}{G' \varrho'^2} \frac{1}{\sin 1''}.$$

B ist eine völlig bekannte Größe und kann mittelst der bereits angegebenen Zahlenwerte berechnet werden; man erhält dann in

$$\pi_\odot = 609''.50 \sqrt[3]{m} \tag{3}$$

die gesuchte Beziehung zwischen Sonnenparallaxe und Erdmasse. Da der Koeffizient 690''.50 mit überwiegender Sicherheit bestimmt ist und kaum 0.''01 fehlerhaft sein kann, erkennt man die große Bedeutung dieser Gleichung für die Bestimmung von $\pi_\odot$, vorausgesetzt, daß ein guter Wert der Erdmasse vorliegt. Die Erdmasse kann aus den

Säkularstörungen abgeleitet werden, welche sie auf die nächstgelegenen Planeten Venus, Mars und Eros ausübt; auf dem gegenwärtigen Stand der Astronomie, d. h. solange man erst über eine etwa 150 Jahre ausgedehnte Reihe genauer Beobachtungen verfügt und solange gewisse Mißstimmungen in der Theorie der vier inneren Planeten nicht beseitigt sind, ist jedoch eine einwandfreie Bestimmung der Erdmasse noch nicht möglich und man wird daher die Gleichung (3) zu ihrer Ermittelung benutzen. In längstens 100 Jahren aber wird man im stande sein, m zu bestimmen, und dann wird (3) das beste und dann wohl einzig benutzte Mittel zur Berechnung der Sonnenparallaxe abgeben.

33. Die Parallaxe der Fixsterne. Wie oben bereits hervorgehoben, ist bei den Fixsternen wegen ihrer großen Entfernung die jährliche Parallaxe sehr klein, während die Reduktion auf den Erdmittelpunkt gänzlich unmerkbar ist. Die jährliche Parallaxe ist so klein, daß es erst für eine ganz kleine Anzahl der allernächsten Fixsterne gelungen ist, einen oft noch recht unsicheren Betrag dafür aus den Messungen abzuleiten. Die analytische Behandlung der Erscheinung könnte natürlich ebenso vorgenommen werden, wie oben für die tägliche Parallaxe; wir wollen aber einen etwas anderen Weg einschlagen, der auch dort gangbar gewesen wäre.

Nennt man $\lambda\beta\Delta$ die heliozentrischen und $\lambda'\beta'\Delta'$ die geozentrischen Ekliptikalkoordinaten eines Fixsternes, $\odot$ und R Länge und Radiusvektor der Sonne von der Erde aus gesehen, so hat man, wie wir allgemein schon früher sahen,

$$\begin{aligned}\Delta'\cos\beta'\cos\lambda' &= \Delta\cos\beta\cos\lambda + R\cos\odot\\ \Delta'\cos\beta'\sin\lambda' &= \Delta\cos\beta\sin\lambda + R\sin\odot\\ \Delta'\sin\beta' &= \Delta\sin\beta,\end{aligned}$$

oder nach leichten Umformungen und Beachtung, daß $\lambda'-\lambda$ und $\beta-\beta'$ sehr kleine Winkel sind ($< 1''$):

$$\lambda'-\lambda = -\frac{R}{\Delta'}\sin(\lambda-\odot)\sec\beta'\cdot 206264.8$$

$$\beta'-\beta = -\frac{R}{\Delta}\cos(\lambda-\odot)\sin\beta'\ 206264.8.$$

R kann man hier als unveränderlich und gleich der astronomischen Einheit annehmen; wird weiter $1:\Delta' = \sin\pi_*$ gesetzt, so wird aus den Formeln:

$$\lambda'-\lambda = -\pi_*\sin(\lambda-\odot)\sec\beta'$$

$$\beta'-\beta = -\pi_*\cos(\lambda-\odot)\sin\beta'.$$

π_* ist die Parallaxe des Fixsternes; ihr Einfluß auf die Koordinaten Länge und Breite ist durch die Formeln gegeben und man erkennt daraus 1. daß das Maximum der Einwirkung in Länge stattfindet für die Zeiten, wo die Sonne um einen Quadranten dem Stern folgt oder vorausgeht; 2. daß das Maximum der Einwirkung in Breite stattfindet, wenn $\lambda - \odot = \pm 180^0$ ist; 3. daß die Wirkung in Breite in der Ekliptik verschwindet und daß sowohl in Breite als in Länge die parallaktische Verschiebung mit der Entfernung von der Ekliptik wächst. Man zeigt leicht, daß der Fixstern infolge der Parallaxe im Laufe eines Jahres eine kleine Ellipse am Himmel beschreibt mit den Halbachsen π_* und $\pi_* \sin\beta'$.

Es ist von Interesse, die Wirkung der Parallaxe mit der der Aberration zu vergleichen; wir haben für letztere S. 525 erhalten

$$\lambda' - \lambda = - 20''.47 \cos(\lambda - \odot) \sec\beta$$
$$\beta' - \beta = + 20.47 \sin(\lambda - \odot) \sin\beta$$

und sehen daraus, daß die Maxima der Aberration gegen die der Parallaxe gerade um einen Quadranten verschoben sind. Die kleine Ellipse, die der Stern infolge der Aberration in einem Jahr beschreibt, erfährt also durch die Parallaxe eine allerdings in den meisten Fällen verschwindende Formveränderung.

Parallaxen von Fixsternen können wegen ihrer Kleinheit direkt kaum gemessen werden. Erfolge werden nur erzielt durch Mikrometermessungen von Differenzen der Parallaxen zweier oder mehrerer benachbarter Sterne.

§ 95. Refraktion.

34. Die von den Gestirnen kommenden Lichtstrahlen gehen, bevor sie in unser Auge gelangen, durch die Lufthülle der Erde und werden in dieser gebrochen; das Auge faßt die Richtung des gebrochenen Strahles auf, deren Abweichung von der ursprünglichen eine Funktion der Richtung selbst und des Zustandes der Atmosphäre ist; es ist daher erforderlich, die ursprüngliche Richtung herzustellen, da nur diese unabhängig von den Zufälligkeiten des Beobachtungsortes ist und mit anderweitigen Beobachtungen verbunden werden kann. Den Unterschied zwischen dem beobachteten, gebrochenen Strahl und dem wahren nennt man Refraktion. Nimmt man an, daß die Erde sphärisch und die Atmosphäre in konzentrischen Kugelschalen geordnet sei, so zwar, daß innerhalb der beliebig dünn anzunehmenden Schalen gleiche Dichtigkeit ist und die Dichtigkeit von oben nach unten stetig zunimmt, so zeigt die Anwendung der Brechungsgesetze sofort, daß

die Brechung die Richtung des Strahles nur in seiner Vertikalebene ändert, daß die Refraktion also nur die Zenitdistanzen beeinflußt, nicht aber die Azimute; ferner wird wegen der nach unten zunehmenden Dichtigkeit der Weg des Strahles eine Kurve sein, die ihre hohle Seite der Erde zuwendet; die Tangenten an die Kurve am Eintritt in die Atmosphäre und am Auge geben die Richtungen des wahren und des gebrochenen Strahles; der gebrochene Strahl hat die kleinere Zenitdistanz; die Refraktion hebt also die Gestirne höher; ihr Betrag muß von den beobachteten Höhen abgezogen werden, um die wahren Höhen zu erhalten.

35. Behufs Berechnung der Refraktion betrachten wir den Lichtstrahl an der Grenze N zweier Schichten, denen die Brechungsindizes (bezogen auf den luftleeren Raum) μ und $\mu + d\mu$ zukommen. Der Einfallswinkel des Strahles, d. h. sein Winkel mit der Richtung nach dem Zenit von N sei i, der Brechungswinkel mit derselben Normalen sei $i - di$; dann ist nach dem Brechungsgesetz:

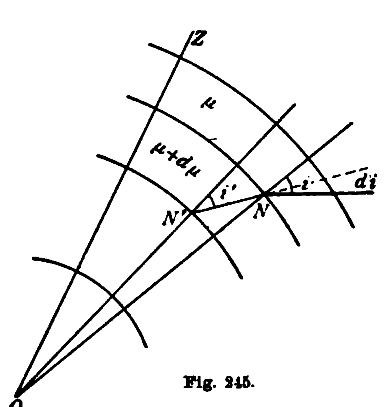


Fig. 245.

$$\frac{\sin i}{\sin(i - di)} = \frac{\mu + d\mu}{\mu}, \tag{1}$$

woraus

$$di = \frac{d\mu}{\mu} \operatorname{tg} i. \tag{2}$$

Der Einfallswinkel an der nächsten Grenzfläche N' vom Radius $r - dr$ sei i', dann gibt das Dreieck ONN' (O ist der Erdmittelpunkt)

$$\frac{r - dr}{r} = \frac{\sin(i - di)}{\sin i'}, \tag{3}$$

oder mit (1) multipliziert:

$$\frac{r - dr}{r} = \frac{\mu}{\mu + d\mu} \frac{\sin i}{\sin i'}.$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form:

$$(r - dr)(\mu + d\mu) \sin i' = r\mu \sin i, \tag{4}$$

so erkennt man, daß $r\mu \sin i$ durch alle Schichten der Atmosphäre hindurch einen unveränderlichen Wert hat; dieser Wert läßt sich für die Schicht, die unmittelbar an der Erdoberfläche liegt, sofort angeben; ist a der Erdradius, μ_0 der Brechungsindex der untersten Luftschicht,

z der letzte Einfallswinkel, d. h. die beobachtete Zenitdistanz, so wird er $a\mu_0 \sin z$ und man hat also:

$$r\mu \sin i = a\mu_0 \sin z. \tag{5}$$

Entnimmt man hieraus

$$\operatorname{tg} i = \frac{\sin i}{\sqrt{1 - \sin i^2}} = \frac{\sin z}{\sqrt{\left(\frac{r\mu}{a\mu_0}\right)^2 - \sin z^2}}$$

und substituiert dies in (2), so wird

$$di = \frac{d\mu}{\mu} \frac{\sin z}{\sqrt{\left(\frac{r\mu}{a\mu_0}\right)^2 - \sin z^2}}. \tag{6}$$

Werden alle diese Brechungen von der Grenze der Atmosphäre, wo $\mu = 1$, bis zur Erdoberfläche, wo $\mu = \mu_0$, summiert, so ergibt sich die Gesamtrichtungsänderung des Lichtstrahles oder die Refraktion:

$$R = \int_1^{\mu_0} \frac{\sin z}{\sqrt{\left(\frac{r\mu}{a\mu_0}\right)^2 - \sin z^2}} \frac{d\mu}{\mu}. \tag{7}$$

Hierin sind z, μ_0, a als gegebene konstante Größen, μ und r als Variable zu betrachten; die Hauptschwierigkeit der Integration liegt in der Aufstellung einer Funktion zwischen μ und r, da der ständige Wechsel der Zustände der Atmosphäre und die schwierige Zugänglichkeit ihrer oberen Schichten das Studium des Gesetzes zwischen diesen beiden Größen, wenn ein solches überhaupt existiert, sehr erschweren. Man muß eine Hypothese machen, aber der Ort, wo dies am zweckmäßigsten geschieht, hängt von der Leichtigkeit der darauffolgenden Analyse und die Art hängt von der schließlichen Prüfung an wirklich beobachteten Refraktionen ab. Glücklicherweise liegen die Verhältnisse so, daß für alle Zenitdistanzen, welche für genaue astronomische Messungen in Betracht kommen, d. h. für $z < 80^0$ der Einfluß der genannten Hypothese ein recht geringer ist. Man überzeugt sich hiervon am schnellsten durch eine genäherte Integration. Setzt man $\frac{a}{r} = 1 - s$, so läßt sich (7) so schreiben:

$$R = \int_1^{\mu_0} \frac{\sin z \cdot (1 - s)}{\sqrt{\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 - 1 + \cos z^2 + \sin z^2 (2s - s^2)}} \frac{d\mu}{\mu}. \tag{8}$$

Da nun der Brechungsindex der Luftschichten nur zwischen 1 und 1.0003 schwankt, so wird $\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 - 1$ immer sehr klein sein; und da ferner $a = 6366$ km und r auch für die höchsten noch brechenden Schichten um höchstens 60 km größer ist, so wird auch s sehr klein. Kann man diese kleinen Größen also gegen $\cos z^2$ vernachlässigen, was dann der Fall sein wird, wenn $\cos z$ nicht selbst klein ist, so nimmt (8) die einfache Form an:

$$(R) = \int_1^{\mu_0} \operatorname{tg} z \cdot \frac{d\mu}{\mu} = \log \mu_0 \operatorname{tg} z. \tag{9}$$

Daraus ersieht man, daß für nicht zu große Zenitdistanzen die Refraktion lediglich von μ_0, d. h. vom Zustand der Atmosphäre an der Erdoberfläche, nicht aber von den höheren Luftschichten abhängig ist. Außerdem erkennt man, daß im wesentlichen die Refraktion mit der Tangente der Zenitdistanz wächst.

36. Um zu einer strengen Integration von (8) den Weg zu bahnen, wird man zuerst die physikalische Tatsache heranziehen, daß die „brechende Kraft" des Mediums $\mu^2 - 1$ proportional der Dichtigkeit ϱ ist, d. h. daß

$$\mu^2 = 1 + 2c\varrho \tag{10}$$

und entsprechend

$$\mu_0^2 = 1 + 2c\varrho_0$$

gesetzt werden darf, wo $2c$ eine aus den Beobachtungen zu bestimmende Konstante ist, deren Zahlenwert für atmosphärische Luft rund 0.000587 ist. Führt man statt ϱ gleich die bequemere Variable w ein, die durch

$$w = 1 - \frac{\varrho}{\varrho_0} \tag{11}$$

definiert ist und setzt die auftretende Konstante

$$\alpha = \frac{c\varrho_0}{1 + 2c\varrho_0}, \tag{12}$$

so wird

$$\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 - 1 = -2\alpha w$$

und

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{\alpha\, dw}{1 - 2\alpha w}$$

und daher folgt aus (8) nach kleiner Umgestaltung

$$(13)\qquad R = \int_0^1 \frac{\alpha(1-s)\,dw}{(1-2\alpha w)^{\frac{3}{2}}\left(\operatorname{cotg} z^2 + \frac{2s - s^2 - 2\alpha w}{1-2\alpha w}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

— ein Ausdruck, der noch völlig streng ist, aber ohne Einbuße an Genauigkeit nicht unwesentlich vereinfacht werden kann. Beachtet man nämlich die Zahlenwerte der auftretenden Größen: α für die Maximaldichtigkeit der Luft $= 0.00029$, s für die höchste brechende Luftschicht $= 0.009$, so erkennt man, daß Glieder von höherer als der zweiten Ordnung dieser Größen für das Resultat nicht in Betracht kommen können. Man wird also setzen dürfen:

$$\alpha(1-s)\,(1-2\alpha w)^{-\frac{3}{2}} = \alpha\,(1 - s + 3\alpha w)$$

und

$$\begin{aligned}(2s - s^2 - 2\alpha w)\,(1-2\alpha w)^{-1} &= 2(s - \alpha w) - s^2 + 4\alpha s w - 4\alpha^2 w^2 \\ &= 2(s-\alpha w) - (s - 2\alpha w)^2\end{aligned}$$

und damit den auch für die schärfste Theorie noch ausreichenden Ausdruck erhalten:

$$(14)\qquad R = \int_0^1 \frac{\alpha(1 - s + 3\alpha w)\,dw}{\sqrt{\operatorname{cotg} z^2 + 2(s-\alpha w) - (s - 2\alpha w)^2}},$$

oder wenn noch $\operatorname{tg} z$ herausgezogen und α durch Multiplikation mit 206264.″8 in Sekunden verwandelt wird:

$$(15)\qquad R = \alpha'' \operatorname{tg} z \int_0^1 \frac{(1 - s + 3\alpha w)\,dw}{\sqrt{1 + (2(s-\alpha w) - (s-2\alpha w)^2)\operatorname{tg} z^2}}.$$

37. Von dieser letzteren Form ausgehend, kann man sofort eine Entwicklung nach den ungeraden Potenzen von $\operatorname{tg} z$ erhalten, wenn $z < 80^0$ ist. Für $z > 80^0$ entbehrt diese Entwicklung der Konvergenz; man muß dann unter dem Integralzeichen von (14) nach den Potenzen der sehr kleinen Größe $(s - 2\alpha w)^2$ entwickeln und erhält dann bereits durch das erste Glied einen Wert, der für $z = 90^0$ nur etwa 1″ vom genauen Wert abweicht.

Wir entwickeln zuerst (15); setzt man vorübergehend

$$1 - s + 3\alpha w = \lambda$$
$$s - \alpha w - \tfrac{1}{2}(s - 2\alpha w)^2 = \nu,$$

so wird zunächst

$$R = \alpha'' \operatorname{tg} z \int_0^1 \frac{\lambda\, dw}{\sqrt{1 + 2\nu \operatorname{tg} z^2}}$$

und dann:

$$R = \alpha'' \operatorname{tg} z \int_0^1 \lambda \left(1 - \nu \operatorname{tg} z^2 + \frac{1.3}{1.2}\nu^2 \operatorname{tg} z^4 - \frac{1.3.5}{1.2.3}\nu^3 \operatorname{tg} z^6 + \cdots\right) dw.$$

Man erhält also folgende Entwicklung

$$R = A_0 \operatorname{tg} z - A_1 \operatorname{tg} z^3 + A_2 \operatorname{tg} z^5 - A_3 \operatorname{tg} z^7 + \cdots, \tag{16}$$

worin die A folgende Werte haben:

$$A_0 = \alpha'' \int_0^1 (1 - s + 3\alpha w)\, dw$$

$$A_1 = \alpha'' \int_0^1 (1 - s + 3\alpha w)\,(s - \alpha w - \tfrac{1}{2}(s - 2\alpha w)^2)\, dw \tag{17}$$

$$A_2 = \tfrac{3}{2}\alpha'' \int_0^1 (1 - s + 3\alpha w)\,(s - \alpha w - \tfrac{1}{2}(s - 2\alpha w)^2)^2\, dw.$$

. . . .

38. Ehe diese Integrale ausgewertet werden können, muß der Zusammenhang zwischen den Variabeln $s = 1 - \frac{a}{r}$ und $w = 1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}$, d. h. also zwischen der Höhe in der Atmosphäre und der Dichtigkeit untersucht werden.

Wir bezeichnen für einen bestimmten Punkt der Atmosphäre in der Entfernung r vom Erdmittelpunkt mit

ϱ die Dichtigkeit,
p den Druck,
t die Temperatur

und versehen diese Größen an der Erdoberfläche $r = a$ mit dem Index 0; wir nennen ferner

$$m = 0.003663 = \frac{1}{273}$$

den Ausdehnungskoeffizienten der Luft für 1° C. Dann gibt das Gay Lussac-Mariottesche Gesetz

$$\frac{p}{\varrho(1+mt)} = \frac{p_0}{\varrho_0(1+mt_0)}$$

oder

(18) $$p = \frac{1+mt}{1+mt_0} p_0(1-w) = \left(1 - \frac{t_0 - t}{\frac{1}{m} + t_0}\right)(1-w)p_0.$$

Der Gleichgewichtszustand der Atmosphäre erfordert ferner, daß die einer Änderung von r um dr entsprechende Änderung dp von p dem Gewicht der Luftsäule von der Höhe dr entgegengesetzt gleich sei; dieses ist aber

$$\frac{a^2}{r^2} g_0 \varrho\, dr,$$

wenn mit g_0 die Schwere in der Entfernung a vom Mittelpunkt, also an der Erdoberfläche bezeichnet wird. Man hat also die weitere Gleichung

$$dp = -\frac{a^2}{r^2} g_0 \varrho\, dr,$$

die wegen

$$r = \frac{a}{1-s}, \quad dr = \frac{a\,ds}{(1-s)^2}, \quad \frac{\varrho}{\varrho_0} = 1 - w$$

in folgende übergeht

(19) $$dp = -a g_0 \varrho_0 (1-w)\, ds.$$

Ein Gesetz, welches die Temperatur t in Beziehung setzt zu einer der Größen ϱ, p, s ist nicht bekannt und es ist nach den neueren Ergebnissen der Ballonfahrten auch höchst zweifelhaft, daß ein solches existiert; hypothetisch die Temperaturänderung proportional der Dichtigkeitsänderung zu setzen (Ivory, Oppolzer, Radau), hat sich bis jetzt am besten bewährt und soll daher hier eingeführt werden. Aus

$$t_0 - t = C(\varrho_0 - \varrho)$$

folgt dann nach (18)

$$p = \left(1 - \frac{C\varrho_0}{\frac{1}{m} + t_0}\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\right)(1-w)p_0$$

oder wenn

(20) $$\frac{C\varrho_0}{\frac{1}{m} + t_0} = \frac{mC\varrho_0}{1 + mt_0} = f$$

gesetzt wird:

(21) $$p = (1 - fw)(1-w)p_0.$$

Diese Relation können wir nun mit (19) verbinden und erhalten

dann die gesuchte Beziehung zwischen s und w. Die Differentiation von (21) gibt:

$$dp = -((1-f) + 2f(1-w))p_0 dw,$$

also

$$ag_0\varrho_0(1-w)ds = ((1-f) + 2f(1-w))p_0 dw$$

oder

$$\frac{ag_0\varrho_0}{p_0} ds = \frac{1-f}{1-w} dw + 2f dw.$$

Die Integration ergibt:

$$\frac{ag_0\varrho_0}{p_0} s = 2fw - (1-f)\log(1-w), \tag{22}$$

da am Beobachtungsort s und w gleichzeitig verschwinden. In der Beziehung (22) ist f eine Konstante, die aus Beobachtungen ermittelt werden muß; der Wert $f = 0.20$ befindet sich sowohl mit den Temperaturbeobachtungen in der freien Atmosphäre, als mit den beobachteten Refraktionen in gutem Einklang. Der Faktor $\frac{p_0}{\varrho_0 g_0}$ ist einer einfachen Deutung fähig. Eine Luftsäule von gleichmäßiger Dichtigkeit ϱ_0 und unter der gleichen Schwere g_0 habe die Höhe l_0, um denselben Druck p_0 auszuüben, wie die wirkliche Luftsäule, dann ist

$$l_0\varrho_0 g_0 = p_0,$$

also:

$$l_0 = \frac{p_0}{\varrho_0 g_0}.$$

Wir führen gleichzeitig im Interesse der auszuführenden Integrationen (17) statt w eine andere Variable x ein:

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = 1 - w = e^{-x},$$

dann schreibt sich (22)

$$\frac{a}{l_0} s = 2f(1-e^{-x}) + (1-f)x, \tag{22a}$$

welches die anzuwendende Relation zwischen der Höhe und der Dichte ist.

39. Um nun auf die Integrale (17) zurückzugehen[1]), konstatieren wir zuerst, daß der erste und größte Koeffizient der Reihenentwicklung (16) von jeder Hypothese über die Konstitution der Atmosphäre unabhängig ist; in der Tat ist, wenn man (22a) einträgt

1) Wir folgen hier der ausgebildetsten Theorie der Refraktion, der von *Radau* (Annales de l'Obs. de Paris, t. 19).

(23) $$A_0 = \alpha'' \int_0^1 (1 - s + 3\alpha w)\, dw = \alpha'' \left(1 + \frac{3}{2}\alpha - \frac{l_0}{a}\right);$$

ebenso findet man, wenn man in A_1 die sehr kleinen quadratischen Glieder wegläßt

$$A_1 = \alpha'' \int_0^1 (s - \alpha w) dw = \alpha'' \left(\frac{l_0}{a} - \frac{1}{2}\alpha\right),$$

oder noch genauer

(24) $$A_1 = A_0 \left(\frac{l_0}{a} - \frac{1}{2}\alpha\right)\cdot$$

Ersetzt man also in Formel (15) α'' durch A_0 und schreibt

(25) $$R = A_0 \operatorname{tg} z \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{1 + 2(s - \alpha w) \operatorname{tg} z^2}} = A_0 \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{\operatorname{cotg} z^2 + 2(s - \alpha w)}},$$

so muß diese einfache Formel, da sie in den ersten Gliedern streng ist, von hoher Genauigkeit sein; in der Tat weicht sie auch im Horizont nur um etwa 1″ von dem strengen Wert ab; bis 80° Zenitdistanz kann sie als völlig streng gelten.

Wir bleiben bei den strengen Werten (17), setzen

$$s - \alpha w = u = \frac{l_0}{a}(2f(1 - e^{-x}) + (1 - f)x) - \alpha(1 - e^{-x})$$

oder unter Einführung der Konstanten

(26) $$h = \frac{(1-f)l_0}{a}, \quad k = \frac{2f - \frac{\alpha a}{l_0}}{1 - f}:$$

$$\frac{u}{h} = x + k(1 - e^{-x})$$

und haben dann allgemein zu behandeln:

(27) $$A_n = \frac{1.3.5.\dots(2n-1)}{1.2.\dots n}\alpha'' \int_0^1 (1 - u + 2\alpha w)(u - \tfrac{1}{2}(u - \alpha w)^2)^n dw.$$

Wie ersichtlich, treten hierin die Integrale

$$\int_0^1 u^n dw \quad \text{und} \quad \int_0^1 u^n w\, dw$$

auf, deren Werte zuerst zu ermitteln sind. Es wird mit (26)

(28) $$U_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 u^n dw = \frac{h^n}{n!}\int_0^\infty (x + k(1 - e^{-x}))^n e^{-x} dx$$

oder entwickelt

(29) $$\frac{1}{h^n} U_n = \beta_n^{(0)} + \beta_n^{(1)} k + \frac{1}{2!}\beta_n^{(2)} k^2 + \cdots \frac{1}{i!}\beta_n^{(i)} k^i + \cdots \frac{1}{n!}\beta_n^{(n)} k^n,$$

worin gesetzt ist:

$$\beta_n^{(0)} = \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

$$\beta_n^{(1)} = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty x^{n-1}(1 - e^{-x}) e^{-x} dx$$

. . . .

$$\beta_n^{(i)} = \frac{1}{(n-i)!}\int_0^\infty x^{n-i}(1 - e^{-x})^i e^{-x} dx$$

. . . .

$$\beta_n^{(n)} = \int_0^\infty (1 - e^{-x})^n e^{-x} dx.$$

Diese Integrale können leicht berechnet werden; setzt man

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx = \Gamma(n),$$

so erhält man durch parzielle Integration

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n),$$

also da $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Damit ergibt sich durch Entwicklung von $(1 - e^{-x})$

$$\beta_n^{(0)} = \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \frac{1}{n!}\Gamma(n+1) = 1$$

. . . .

(30) $$\beta_n^{(i)} = 1 - \frac{i}{2^{n-i+1}} + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}\,\frac{1}{3^{n-i+1}} - \cdots + (-1)^i \frac{1}{(i+1)^{n-i+1}}$$

. . . .

$$\beta_n^{(n)} = \frac{1}{n+1}.$$

Mit diesen Koeffizienten lassen sich die Funktionen U_n nach (29) berechnen. Was die zweiten Integrale $\int_0^1 u^n w dw$ anlangt, so sind diese in A_n durchweg mit dem kleinen α multipliziert, werden also mit geringerer Genauigkeit gebraucht. Nach (26) wird

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 u^n w dw = \frac{h^n}{n!}\int_0^1 (x + kw)^n w dw$$
$$= h^n\left(\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n w dw + \frac{k}{(n-1)!}\int_0^1 x^{n-1} w^2 dw + \cdots\right).$$

Da aber nach (29)

$$\frac{1}{(n-i)!}\int_0^1 x^{n-i} w^i dw = \beta_n^{(i)}$$

ist, so folgt:

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 u^n w dw = h^n(\beta_{n+1}^{(1)} + \beta_{n+1}^{(2)} k + \cdots)$$

oder, wenn die mit k multiplizierten Glieder hier vernachlässigt werden und infolgedessen nach (29) und (30) $h^n = U_n$ genommen wird:

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 u^n w dw = U_n \beta_{n+1}^{(1)}. \tag{31}$$

Wird nun im Ausdruck (27) von A_n entwickelt und beschränkt man sich dabei auf die völlig ausreichenden Glieder:

$$(1 - u + 2\alpha w)(u - \tfrac{1}{2}(u - \alpha w)^2)^n = u^n - \tfrac{1}{2}(n+2)u^{n+1} + (n+2)\alpha u^n w - \cdots,$$

so ergibt sich unter Berücksichtigung von (28) und (31)

$$A_n = 1.3.5.\ldots(2n-1)\alpha''\left(U_n - \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)U_{n+1} + (n+2)\alpha\beta_{n+1}^{(1)} U_n\right). \tag{32}$$

Im speziellen hat man, wenn für $n = 0$, $U_0 = 1$ und $1.3.5\ldots(2n-1) = 1$ gesetzt wird,

$$A_0 = \alpha''(1 - U_1 + \alpha)$$

oder, da sich $U_1 = \frac{l_0}{a} - \frac{\alpha}{2}$ findet,

$$A_0 = \alpha''\left(1 + \frac{3}{2}\alpha - \frac{l_0}{a}\right), \tag{33}$$

wie oben bereits konstatiert wurde. Ferner wird:

$$A_1 = \alpha''(U_1 - 3U_2 + 3\alpha\beta_2^{(1)}U_1)$$

oder wenn man die quadratischen Glieder wegläßt

$$A_1 = \alpha'' U_1 = \alpha''\left(\frac{l_0}{a} - \frac{\alpha}{2}\right). \tag{34}$$

40. Es wird hier am Platze sein, einige Zahlenwerte anzugeben. Für eine Dichtigkeit der Luft, welche bei dem Barometerstande 760 mm (bei 0° Quecksilbertemperatur, in Seehöhe unter 45° Breite), dem Wasserdampfdruck 6 mm und der Temperatur 0° C stattfindet, ist durch astronomische Beobachtungen bestimmt worden:

$$\alpha'' = 60''.15, \quad \text{also } \alpha = 0.0002916.$$

Für dieselben Verhältnisse und mit $a = 6366$ km findet sich:

$$\frac{l_0}{a} = \frac{7.993}{6366} = 0.0012555$$

und aus der Diskussion von Temperaturbeobachtungen in verschiedenen Luftschichten durchschnittlich

$$f = 0.2.$$

Damit wird:

$$h = (1-f)\frac{l_0}{a} = 0.0010044, \qquad k = \frac{2f - \alpha\frac{a}{l_0}}{1-f} = 0.2095.$$

Die β-Koeffizienten sind reine Zahlenwerte und können folgender Tabelle entnommen werden:

n	$\beta_n^{(1)}$	$\frac{1}{2}\beta_n^{(2)}$	$\frac{1}{6}\beta_n^{(3)}$	$\frac{1}{24}\beta_n^{(4)}$	$\frac{1}{120}\beta_n^{(5)}$
1	0.5	0.	0	0	0
2	0.75	0.16667	0	0	0
3	0.875	0.30556	0.04167	0	0
4	0.9375	0.39352	0.08681	0.0083	0
5	0.96875	0.44367	0.12008	0.0190	0.0014

Es folgen dann, nach (29) berechnet, die Werte der Funktionen U_n:

$$\begin{aligned}
\log U_1 &= 7.04523_{-10}\\
\text{„}\ U_2 &= 4.07004_{-10}\\
\text{„}\ U_3 &= 1.0840_{-10}\\
U_4 &= 8.092_{-20}\\
U_5 &= 5.097_{-20}
\end{aligned}$$

und endlich die $A_\varkappa$ nach (32), die wir gleich in die Formel (16) einsetzen, womit diese wird:

$$(35)\qquad R = 60''.101 \operatorname{tg} z - 0''.06658 \operatorname{tg} z^3 + 0''.0002109 \operatorname{tg} z^5 - 0''.00000109 \operatorname{tg} z^7.$$

41. Wie bereits erwähnt, wird diese Entwicklung für $z > 80^0$ unbequem und für $z > 84^0$ unbrauchbar. Man muß dann den Ausdruck (14), den wir jetzt unter Einführung von

$$u = s - \alpha w$$

folgendermaßen schreiben

$$(36)\qquad R = \int_0^1 \frac{\alpha(1 - u + 2\alpha w)\,dw}{\sqrt{\operatorname{cotg} z^2 + 2u - (u - \alpha w)^2}}$$

einer anderen Behandlung unterziehen. Entwickelt man nach Potenzen der kleinen Größe $(u - \alpha w)^2$, so kommt:

$$(37)\quad R = \alpha'' \int_0^1 \frac{(1 - u + 2\alpha w)\,dw}{\sqrt{\operatorname{cotg} z^2 + 2u}} + \frac{1}{2}\,\alpha'' \int_0^1 \frac{(1 - u + 2\alpha w)(u - \alpha w)^2}{(\sqrt{\operatorname{cotg} z^2 + 2u})^3} + \cdots.$$

Für das erste Glied erhält man nach dem Mittelwertsatz:

$$(38)\quad \alpha'' \int_0^1 (1 - u + 2\alpha w)\,dw \cdot \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{\operatorname{cotg} z^2 + 2u}} = A_0 \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{\operatorname{cotg} z^2 + 2u}},$$

wie wir schon in Gleichung (25) konstatiert haben. A_0 ist durch (23) gegeben, so daß nur das Integral zu behandeln bleibt.

Wir führen darin wieder die durch $1 - w = e^{-x}$ definierte Variable x und für u den entsprechenden Ausdruck (26), nämlich

$$\frac{a}{l_0}\,u = 2f(1 - e^{-x}) + (1 - f)\,x - \frac{a}{l_0}\,\alpha(1 - e^{-x})$$

ein und schreiben letzteren, indem wir

$$\frac{a}{l_0}\,\alpha = \varepsilon$$

setzen und mit λ eine vorläufig beliebige Zahl bezeichnen:

$$\frac{a}{l_0}\,u = (2f - \varepsilon)(1 - e^{-x}) + (1 - f)\,x$$
$$= (1 - f + \lambda(2f - \varepsilon))\,x - (2f - \varepsilon)(\lambda x - 1 + e^{-x}).$$

Wird weiter zur Abkürzung gesetzt:

$$\frac{a}{l_0}\frac{1}{1-f+\lambda(2f-\varepsilon)}=2\gamma^2$$

(39)
$$\frac{2f-\varepsilon}{1-f+\lambda(2f-\varepsilon)}=k$$

$$k(\lambda x-1+e^{-x})=\varphi(x),$$

so nimmt u die Gestalt an:

$$2\gamma^2 u = x-\varphi(x)$$

und aus dem Integral (38) wird:

$$A_0\gamma\int_0^\infty\frac{e^{-x}dx}{\sqrt{\gamma^2\operatorname{cotg} z^2+x-\varphi(x)}}=A_0\gamma\int_0^\infty\frac{e^{-x}dx}{\sqrt{Z^2+x-\varphi(x)}},$$

wenn

$$\gamma\operatorname{cotg} z = Z$$

gesetzt wird. Nennt man v eine neue Variable, die mit x in der Verbindung steht

$$v = x-\varphi(x),$$

so wird nach einem bekannten Satz von Lagrange:

$$e^{-x}\frac{dx}{dv}=e^{-v}+\frac{d(e^{-v}\varphi(v))}{dv}+\frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2(e^{-v}\varphi(v)^2)}{dv^2}+\cdots.$$

Hiermit kann die neue Variable in obigem Integral eingeführt werden, nachdem mit $\varphi(v)=k(\lambda v-1+e^{-v})$ die vorgeschriebenen Differentiationen ausgeführt worden sind:

(40)
$$A_0\gamma\int_0^\infty\frac{e^{-v}}{\sqrt{Z^2+v}}\{1+k(1+\lambda-\lambda v-2e^{-v})$$
$$+k^2(\tfrac{1}{2}+2\lambda+\lambda^2-\lambda v-2\lambda^2 v+\tfrac{1}{2}\lambda^2v^2-4(1+\lambda)e^{-v}$$
$$+4\lambda v e^{-v}+\tfrac{9}{2}e^{-2v})+\cdots\}dv.$$

Der ganze Ausdruck ist, wie ersichtlich, aus lauter Integralen von der Form

$$\int_0^\infty\frac{v^i e^{-nv}}{\sqrt{Z^2+v}}dv$$

zusammengesetzt, auf deren Theorie und Berechnung hier nicht eingegangen werden kann. Es genügt der Hinweis, daß sie alle mittels der vielfach auftretenden Transzendenten

(41)
$$\psi(Z)=e^{Z^2}\int_Z^\infty e^{-v^2}dv=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty\frac{e^{-v}dv}{\sqrt{Z^2+v}}$$

berechnet werden können, für die ausführliche Tafeln vorliegen (z. B. *Radau*, Annales de l'Observatoire de Paris, t. XVIII).

Die Berechnung von (38) ist jetzt durchführbar, wenn noch über den willkürlichen Parameter λ eine Verfügung getroffen ist. Der Wert $\lambda = \frac{1}{2}$ empfiehlt sich besonders, weil dann nach (39) die Größe γ und infolgedessen auch Z von f, also von der Konstitution der Atmosphäre, unabhängig wird.

Die sehr kleinen weiteren Glieder in (37) führen auf dieselben Integrale (41), wie hier nicht weiter auseinandergesetzt werden soll.

42. Die gebotenen Hilfsmittel setzen uns in den Stand, für jede Zenitdistanz den Betrag der Refraktion zu berechnen; diese gilt nach den Formeln für den bestimmten Luftzustand, der der Dichtigkeit ϱ_0, also der Temperatur t_0 und dem Druck p_0 entspricht. Es würde zu mühsam sein, für jeden einzelnen Fall die Rechnung mit den ständig wechselnden meteorologischen Zuständen der Luft durchzuführen und man hat daher „Refraktionstafeln" entworfen, denen folgende Einrichtung gegeben ist. Für einen bestimmten Normalzustand der Atmosphäre, etwa der Temperatur $t_0 = 0^\circ$ C, dem Barometerstande 760 mm (unter Seehöhe, 45° Breite, 0° C Quecksilbertemperatur) und dem Wasserdampfdruck 6 mm entsprechend, wird für alle Zenitdistanzen in angemessenen Intervallen eine Tabelle der „mittleren Refraktionen" gerechnet. Die Korrektionen, die hieran anzubringen sind, um die Refraktionen für eine andere Temperatur und einen andern Barometerstand zu erhalten, sind verhältnismäßig klein und können mittels der Differentialquotienten der Refraktion nach der Temperatur und nach dem Luftdruck berechnet werden; man hat dann

$$R = R_0 + \frac{\partial R}{\partial t}(t - t_0) + \frac{\partial R}{\partial B}(B - B_0).$$

Die Differentialquotienten werden ebenfalls mit dem Argument der Zenitdistanz tabuliert. Ihre Berechnung geschieht entweder nach analytischen Formeln oder einfacher und sicherer empirisch, indem man für verschiedene äquidistante Barometerstände und Temperaturen die Refraktionen rechnet und daraus die Änderungen für 1° C Temperatur und 1 mm Barometerstand ableitet.

Auf die verschiedenen Formen, die man den Refraktionstafeln gegeben hat, kann hier nicht eingegangen werden; sie müssen vor dem Gebrauch in den betreffenden Tafeln nachgesehen werden. Als die besten und bequemsten Tafeln gelten die Radauschen (Annales de l'Obs. de Paris, t. XIX) und die de Ballschen (Leipzig 1906).

Vierzehnter Abschnitt.

Astronomische Messungen.

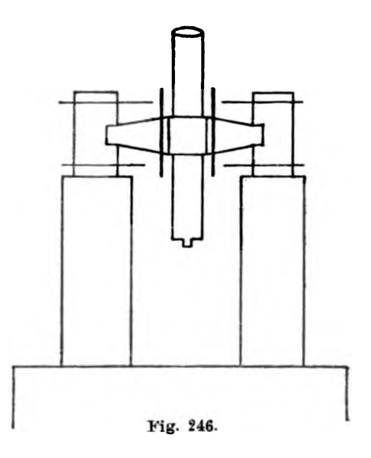
§ 96. Absolute und relative Messungen.

1. Die auf dem System des Horizontes beruhenden Koordinaten der Gestirne sind vom Beobachtungsort abhängig und daher nicht geeignet, bei Untersuchungen über die Bewegungen der Gestirne zu dienen, da hier Beobachtungen verschiedener Sternwarten vereinigt werden müssen; andererseits haben diese Koordinaten für die praktische Ausführung der Messungen den großen Vorteil, daß die entsprechenden Instrumente nach der Richtung der Schwere gebaut werden können, also besondere Stabilität besitzen. Die Koordinaten des Äquators sind vom Beobachtungsort unabhängig, können im allgemeinen aber nur mit Instrumenten gemessen werden, deren Achsen gegen die Richtung der Schwere geneigt sind, also der nötigen Stabilität entbehren; diesem Nachteil stehen die Vorzüge gegenüber, die dem Beobachter aus der Beziehung des Systems zur täglichen Drehung der Erde entspringen und die so weit überwiegen, daß das Äquatorealsystem zum eigentlichen Fundamentalsystem der messenden Astronomie gewählt werden muß. Gleichwohl braucht man für absolute Messungen der Äquatorealkoordinaten die Sicherheit der Aufstellung, die nur das Horizontalsystem gewähren kann, und muß daher eine Beobachtungsmethode wählen, welche die Vorteile beider Systeme vereinigt und von ihren Mängeln frei ist. Dies gelingt in folgender Weise.

Das vollständige astronomische Instrument hat zwei aufeinander senkrechte Drehungsachsen: die eine ist in die Hauptachse des Koordinatensystems gestellt und durch die Drehung um sie wird die eine Koordinate gemessen; dies ist die Vertikalachse im System des Horizontes und die Polarachse im System des Äquators; die andere, an der die Visierlinie befestigt ist, liegt dann parallel der Hauptebene des Systems (Horizont bzw. Äquator) und durch die Drehung um sie wird die zweite Koordinate gemessen; dies ist die Horizontalachse beim Instrument des Horizonts (Altazimut oder Universalinstrument) und die Deklinationsachse beim Instrument des Äquators (Äquatoreal). Wenn man nun die beiden Instrumente in eine solche Lage bringt, daß die zweiten Achsen senkrecht stehen auf der Ebene, die durch

die beiden Hauptachsen bestimmt ist, also auf der Ebene des Meridians, so ist in dieser Lage die Horizontalachse zugleich Deklinationsachse und umgekehrt, und man kann also durch Messung von Höhen Deklinationen bestimmen bzw. aus bekannten Deklinationen die Höhen ableiten. Die in dieser Weise aufgestellten Instrumente können aber auch zur Bestimmung von Rektaszensionen dienen, wenn man die Polarachse des Äquatoreals durch die dazu parallele Rotationsachse der Erde ersetzt und durch die Erde selbst die Drehung ausführen läßt, die zur Bestimmung dieser Koordinate zu machen ist. Zur Messung dieser Drehung dient dann nicht ein geteilter Kreis, sondern die Uhr und die Einstellung des Gestirnes vollzieht sich dann ohne Zutun des Beobachters, der nur die Zeit seines „Durchganges", zu registrieren hat.

Das durch diese Überlegung entstehende Instrument ist der Meridiankreis, das einzige Instrument, das in der heutigen Astronomie zur Messung von absoluten Koordinaten benutzt wird. Man kann es sich auch in seine beiden Hauptbestandteile zerlegt denken, das Durchgangsinstrument, das nur zur Messung von Rektaszensionen dient, und den Vertikalkreis im Meridian, der die Deklinationen der Gestirne mißt. Der Bau ist sehr einfach. Auf zwei sorgfältig fundierten Pfeilern liegt in der Ost-Westrichtung eine horizontale Drehungsachse, an der senkrecht die Visierlinie und parallel dazu der geteilte Kreis angebracht sind. Visierlinie und Kreis bewegen sich somit im Meridian; die Drehung vom Äquator zum Gestirn, die an mit den Pfeilern fest verbundenen Mikroskopen abgelesen werden kann, gibt die Deklination und der an der Uhr beobachtete Durchgang durch die Visierlinie die Rektaszension.


Fig. 246.

2. Es ist nun näher zu zeigen, in welcher Weise die beiden Äquatorkoordinaten gewonnen werden, da doch weder der Äquator noch der Frühlingspunkt, von denen aus sie gerechnet werden, direkt am Himmel gegeben sind. Wir wollen dabei ein ideales, fehlerfreies Instrument voraussetzen und erst in den folgenden Paragraphen zeigen, wie die an wirklichen, stets mit Fehlern behafteten Instrumenten angestellten Beobachtungen vom Einfluß der Fehler befreit werden können.

Da der Frühlingspunkt als Schnittpunkt des Äquators mit der

Sonnenbahn definiert ist, bleibt als einziges Mittel zu seiner unabhängigen Bestimmung die Beobachtung des Punktes und des Momentes, in welchen die Deklination der Sonne den Wert Null annimmt. Da dies nur durch fortgesetzte Deklinationsmessungen der Sonne geschehen kann, sind diese in erster Linie zu besprechen. Der einzige Weg, auf dem der Äquator bestimmt werden kann, ist die Ermittlung der Kreisablesung, die der Richtung der Visierlinie nach dem Pol entspricht, durch das arithmetische Mittel der Kreisablesungen, die der oberen und unteren Kulmination desselben Fixsternes entsprechen, wobei dessen geringe Ortsänderungen infolge Präzession, Refraktion usf. durch Rechnung berücksichtigt werden können. Bestimmt man gleichzeitig die Ablesung für die Richtung der Visierlinie nach dem Zenit, so erhält man neben der Polhöhe des Beobachtungsortes, die für unseren vorliegenden Zweck gleichgültig ist, die Möglichkeit, die stets vorhandenen Veränderungen des Instrumentes und damit des Polpunktes unter Kontrolle zu halten, da der Zenitpunkt zu jeder Zeit und mit größter Schärfe bestimmt werden kann. Ist man einmal in den Besitz der Polhöhe gelangt, dann genügt zur Bestimmung des Polpunktes natürlich die Ablesung des Zenitpunktes. Ist der Polpunkt bestimmt, so gibt die Differenz der Ablesungen für ihn und für die kulminierende Sonne die Deklination der letzteren. Sei nun (Fig. 247) ♈ der Frühlingspunkt, ε die Schiefe der Ekliptik, $\alpha_\odot$, $\delta_\odot$, $\lambda_\odot$ Rektaszension, Deklination und Länge der Sonne, so gibt das Dreieck

Fig. 247.

$$(1)\qquad \begin{aligned} \sin\lambda_\odot \sin\varepsilon &= \sin\delta_\odot \\ \sin\lambda_\odot \cos\varepsilon &= \cos\delta_\odot \sin\alpha_\odot \\ \cos\lambda_\odot &= \cos\delta_\odot \cos\alpha_\odot . \end{aligned}$$

Man ersieht daraus, daß in den Solstitien ($\lambda_\odot = 90^0$ und 270^0) die Schiefe der Ekliptik gleich $\delta_\odot$ bzw. $-\delta_\odot$ wird, also bestimmt werden kann; wir werden sie im folgenden als bekannt voraussetzen. Dann folgt weiter:

$$(2)\qquad \operatorname{tg}\varepsilon \sin\alpha_\odot = \operatorname{tg}\delta_\odot ,$$

es kann also aus der gemessenen Deklination die Rektaszension abgeleitet werden, und zwar mit um so größerer Sicherheit, je kleiner $\delta_\odot$ ist, also am besten in der Nähe der Äquinoktion. Wird nun gleichzeitig die Durchgangszeit der Sonne $U_\odot$ durch den Meridian an einer Uhr beobachtet, deren Korrektion gegen wahre Sternzeit $\varDelta U$ sei, so ist, da die Sternzeit des Meridiandurchganges gleich ist der Rektaszension des Gestirnes (S. 490)

$$U_\odot + \varDelta U = \alpha_\odot ,$$

woraus $\varDelta U$ bestimmt werden kann. Wird nun weiter die Durchgangszeit U_* eines Fixsternes beobachtet, so wird dessen Rektaszension

$$\alpha_* = U_* + \varDelta U.$$

Ist auf diese Weise die Rektaszension eines Fixsternes, oder besser noch einer Reihe von Fixsternen, den sogenannten Fundamentalsternen, bestimmt, so ergibt unabhängig von der Sonne, jede Durchgangsbeobachtung eines solchen die Uhrkorrektion und mit dieser können nun die Rektaszensionen beliebig vieler weiterer Gestirne ermittelt werden.

Es ist noch zu besprechen, in welcher Weise die Einstellung der Visierlinie in den Meridian unabhängig von der Kenntnis von Gestirnskoordinaten bewerkstelligt wird. Es sei dabei wieder das Instrument selbst als fehlerfrei vorausgesetzt, d. h. die Visierlinie stehe genau senkrecht auf der Drehungsachse und diese liege genau horizontal; die erstere Bedingung kann durch Umlegen des Instrumentes in seinen Lagern und Anvisieren eines irdischen Objektes in beiden Stellungen, die letztere durch die Libelle erfüllt werden. Es ist ferner erforderlich eine genau gehende Uhr, d. h. eine solche, die einen vollen Umlauf in derselben Zeit vollendet, wie die Erde ihre Rotation; dies läßt sich ohne Kenntnis von Gestirnskoordinaten kontrollieren, wenn man zwei aufeinanderfolgende Durchgänge desselben Sternes durch denselben Vertikalkreis beobachtet. Die Kenntnis des Standes der Uhr ist nicht notwendig. Zur Einstellung der Visierlinie in den Meridian hat man dann folgende einzige Methode. Ein Zirkumpolarstern, am besten der Polarstern selbst, wird in den beiden Punkten beobachtet, in denen sein Parallelkreis den Vertikalkreis des Instrumentes schneidet; wenn er zu den beiden Stücken des Parallelkreises, in die er durch die Punkte zerlegt wird, gleich lange braucht, dann ist der Vertikalkreis der Meridian; anderen Falles muß die Horizontalachse so lange durch Horizontalschrauben, die an den Lagern angebracht sind, verschoben werden, bis Gleichheit eintritt.

3. Die in ihren Grundzügen auseinandergesetzte Methode der direkten oder absoluten Koordinatenbestimmung wird nur auf großen Sternwarten zur ständigen Kontrolle des Frühlingspunktes zur Anwendung gebracht. Die genauen Koordinaten einer beschränkten Anzahl von „Fundamental- oder Zeitsternen“, die durch sie geliefert werden, dienen dann für alle anderen Messungen als Anhaltspunkte und gestatten bei der Rektaszensionsbestimmung die Sonne auszuschalten und gewünschtenfalls auch den Äquatorpunkt des Kreises ohne Beiziehung kombinierter oberer und unterer Kulminationen und ohne Polhöhe zu bestimmen. Solche „relative“ Messungen dienen zur Herstellung der Fixsternkataloge und zur Bestimmung der Koordinaten



der Planeten, soweit sie in Meridiankreisen sichtbar sind. Schwache Objekte, wie Kometen und kleine Planeten, werden schließlich durch Differential(Mikrometer-)messungen an großen Refraktoren an diese „Anhalt- oder Vergleichsterne" der Fixsternkataloge angeschlossen. Bei Differentialmessungen mittels Mikrometer wird vorausgesetzt, daß beide Objekte, deren relative Lage bestimmt werden soll, so nahe beieinander stehen, daß sie gleichzeitig im Gesichtsfeld des Fernrohrs erscheinen. An den Bildern werden durch Fäden, die mit Mikrometerschrauben bewegt werden, die Koordinatendifferenzen direkt oder indirekt gemessen. Sind dann die Koordinaten des einen Gestirnes bekannt, so erhält man durch Hinzufügung der Differenzen die des anderen.

Die Instrumente, an denen die Mikrometer angebracht sind, sind alle im Koordinatensystem des Äquators aufgestellt; sie sind auch mit Kreisen versehen, um Stundenwinkel und Deklination eingestellter Gestirne ablesen zu können; diese Ablesungen können aber wegen der geringen Stabilität des Instrumentes nicht zur genauen Bestimmung der Koordinaten dienen, sondern man gebraucht sie nur zur raschen Auffindung der Objekte am Himmel, wenn deren Rektaszension und Deklination gegeben ist. Mittels der Sternzeit Θ und der Rektaszension α erhält man nämlich sofort den Stundenwinkel

$$t = \Theta - \alpha,$$

der an dem zum Äquator parallelen Stundenkreis eingestellt werden kann. Auf dem dazu senkrechten Deklinationskreis, dessen Polpunkt oder Äquatorpunkt bekannt ist, stellt man die Deklination ein und findet dann im Gesichtsfeld das Objekt vor.

§ 97. Durchgangsbeobachtungen.

4. Kein Instrument kann an sich als fehlerfrei betrachtet werden und ebensowenig genügt seine Aufstellung den theoretischen Forderungen; es muß daher für jedes Instrument eine Theorie entwickelt werden, durch welche der Einfluß seiner Fehler auf die Beobachtungen aufgedeckt und die Möglichkeit einer Korrektion der rohen Beobachtungen geboten wird; ebenso muß gezeigt werden, wie aus den Beobachtungen selbst die Fehler bestimmt oder durch geeignete Anordnungen eliminiert werden können. Wir gehen die verschiedenen Arten von Beobachtungen durch und betrachten zuerst die **Durchgangsbeobachtungen**. Man versteht darunter die Aufzeichnung der Uhrzeiten, in denen das durch die tägliche Drehung der Erde scheinbar bewegte Gestirn über bestimmte durch das Instrument dargebotene

Vertikalkreise hinweggeht. Die instrumentelle Einrichtung ist folgende. Ein Achse liegt horizontal in Lagern und kann in diesen gedreht werden; senkrecht zu ihr ist die Visierlinie — das Fernrohr — befestigt und beschreibt bei der Drehung der Achse den geforderten Vertikalkreis. Die Visierlinie ist durch die Verbindungslinie des Hauptpunktes des Objektives mit dem Schnittpunkt eines Fadenkreuzes in der Fokalebene des Objektives bestimmt; für die Durchgangsbeobachtungen kommt nur der Faden des Fadenkreuzes in Betracht, welcher senkrecht auf der Drehungsachse steht, also bei der Drehung den Vertikalkreis beschreibt. Um bei einem und demselben Durchgang des Gestirnes mehrere Beobachtungen bei ungeänderter Lage des Instrumentes machen zu können, sind in der Regel statt eines Vertikalfadens eine ganze Reihe solcher eingespannt. Nur derjenige von ihnen, für den die durch ihn und den Hauptpunkt des Objektives gelegte Visierebene genau senkrecht auf der horizontalen Drehungsachse steht, beschreibt einen durch das Zenit des Instrumentes gehenden Vertikalkreis; die anderen beschreiben dazu parallele kleine Kreise; die Theorie muß zeigen, in welcher Weise die an ihnen beobachteten Durchgänge verwertet werden können.

5. Um zum fehlerbehafteten Instrument überzugehen, entwerfen wir eine Figur, in welcher wir im Gegensatz zu den bisher gebrauchten die himmlische Sphäre nicht von innen, sondern von außen und vom Zenit aus betrachten: es sei $OSWN$ der Horizont, SN der Meridian, Z das Zenit, P der Nordpol des Beobachtungsortes. Die Drehungsachse des Instrumentes liege nicht genau horizontal, sondern das auf der Westseite gelegene Ende derselben liege um den Winkel i, Neigung genannt, über dem Horizont. Die Achse bis zur Sphäre verlängert treffe den Punkt K, dessen Zenitdistanz ZK also sein wird: $90^0 - i$; sein Azimut sei mit $90^0 - k$ bezeichnet, so daß der Winkel $KZP = 90^0 + k$ wird. Stundenwinkel und Deklination von K seien mit $90^0 - m$ und n bezeichnet, so daß Winkel $ZPK = 90^0 - m$ und Bogen $PK = 90^0 - n$ wird. Ist endlich φ die Polhöhe des Instrumentes, also $ZP = 90^0 - \varphi$, so ergibt das Dreieck

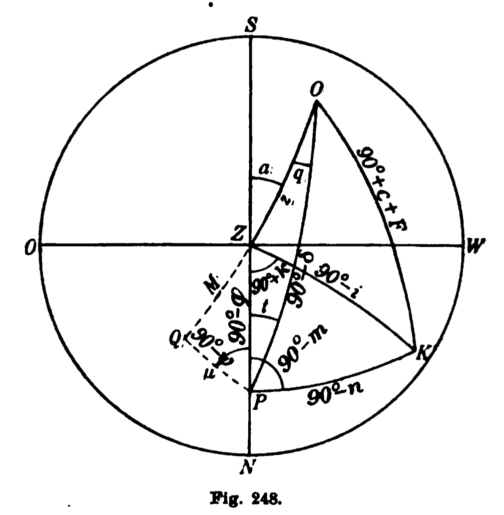


Fig. 248.

ZPK folgende Beziehungen zwischen den bisher eingeführten Größen:

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} \cos n \sin m &= \sin i \cos \varphi + \cos i \sin \varphi \sin k \\ \cos n \cos m &= \cos i \cos k \\ \sin n &= \sin i \sin \varphi - \cos i \cos \varphi \sin k, \end{aligned}$$

aus denen m und n berechnet werden können, wenn i und k bestimmt sind.

Die Visierlinie, bestimmt durch den sogenannten Mittelfaden, schließe mit dem Kreisende der Drehungsachse, das wir zuerst im Westen annehmen, nicht genau einen rechten Winkel ein, sondern den Winkel $90^\circ + c$ (c = Kollimationsfehler); ein Seitenfaden, der vom Mittelfaden um den Bogen F — die Fadendistanz — absteht, wird dann mit der Achse den Winkel $90^\circ + c + F$ bilden. Wird nun die Durchgangszeit U eines Gestirnes O von der Deklination δ an diesem Seitenfaden beobachtet, so entsteht die Aufgabe, daraus den Stundenwinkel t des beobachteten Gestirnes abzuleiten, um mittelst desselben bei bekannter Rektaszension α die Uhrkorrektion oder bei bekannter Uhrkorrektion die Rektaszension bestimmen zu können. Wir nennen noch im Interesse der Ableitung späterer Formeln τ den Stundenwinkel des Gestirnes, wenn es an der idealen genau 90° mit der Drehungsachse bildenden Kollimationslinie des Fernrohrs steht, $\tau - C$ den Stundenwinkel, wenn es am Mittelfaden, und $\tau - C - f = t$, wenn es am Seitenfaden steht; es stellt dann offenbar C die Korrektion des Stundenwinkels für Abweichung des Mittelfadens von der genauen Kollimationslinie und f die Reduktion der Durchgangszeit vom Seitenfaden auf den Mittelfaden dar.

Wird O mit P und K durch größte Kreise verbunden, so ist in dem entstehenden Dreieck PKO

$$PO = 90^\circ - \delta, \quad OK = 90^\circ + c + F$$

$$\text{Winkel } OPK = 90^\circ - (m + t) = 90^\circ - (m + \tau - C - f)$$

und daher:

$$-\sin(c + F) = \sin n \sin \delta + \cos n \cos \delta \sin(m + t)$$

oder

$$\text{(II)} \qquad \sin(m + t) = -\operatorname{tg} n \operatorname{tg} \delta - \sec n \sec \delta \sin(c + F).$$

Diese Formel gibt t, wenn m, n, c und F bekannt sind. Setzt man für t obigen Wert, so kommt:

$$\sin(m + \tau - C - f) = -\operatorname{tg} n \operatorname{tg} \delta - \sec n \sec \delta \sin(c + F).$$

Für $F = 0$ wird $f = 0$, daher gilt auch:

$$\sin(m + \tau - C) = -\operatorname{tg} n \operatorname{tg} \delta - \sec n \sec \delta \sin c.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so erhält man nach einfacher Umwandlung die Formel:

$$\text{(III)} \qquad \sin \tfrac{1}{2} f = \frac{\sec n \sec \delta \cos(c + \frac{1}{2} F) \sin \frac{1}{2} F}{\cos(m + \tau - C - \frac{1}{2} f)},$$

welche die Reduktion vom Seitenfaden auf den Mittelfaden zu berechnen gestattet; da nämlich f stets klein ist, kann man in erster Näherung rechts $f = 0$ setzen und mit dem dann erhaltenen Wert von f die Rechnung nach (III) wiederholen. Außer bei Sternen, die sehr nahe dem Pol stehen, kann man statt (III) folgende einfachere Formel benutzen:

$$\text{(IIIa)} \qquad f = \frac{\sec n \sec \delta \cos(c + \frac{1}{2} F)}{\cos(m + \tau - C - \frac{1}{2} f)} \cdot F.$$

Man kann auch jeden Seitenfaden sofort auf den Moment des Durchgangs durch die ideale Kollimationslinie reduzieren; man muß dann $C + f$ berechnen, was am einfachsten so gelingt: obige Gleichung:

$$\sin(c + F) = -\sin n \sin \delta - \cos n \cos \delta \sin(m + \tau - C - f)$$

gibt auf die ideale Kollimationslinie angewandt:

$$0 = -\sin n \sin \delta - \cos n \cos \delta \sin(m + \tau)$$

und wenn diese beiden Gleichungen voneinander subtrahiert werden:

$$\sin(c + F) = 2 \cos n \cos \delta \sin(m + \tau) \sin^2 \tfrac{1}{2}(C + f) + \cos n \cos \delta \cos(m + \tau) \sin(C + f)$$

oder

$$\text{(IV)} \qquad \sin(C + f) = \frac{\sin(c + F)}{\cos n \cos \delta \cos(m + \tau)} - 2 \operatorname{tg}(m + \tau) \sin^2 \tfrac{1}{2}(C + f).$$

Da $C + f$ stets klein ist, kann das zweite Glied rechts, wenn es etwas merkliches gibt, in zweiter Näherung berücksichtigt werden, nachdem es bei der ersten gleich Null gesetzt wurde. Die Reduktion C des Mittelfadens auf die ideale Kollimationslinie ergibt sich aus (IV), wenn F und daher auch f gleich Null gesetzt wird:

$$\sin C = \frac{\sec n \sec \delta}{\cos(m + \tau)} \sin c - 2 \operatorname{tg}(m + \tau) \sin^2 \tfrac{1}{2} C;$$

da c immer unterhalb weniger Sekunden gehalten wird, kann hiefür stets gesetzt werden:

(V) $$C = \frac{\sec n \sec \delta}{\cos(m+\tau)}\, c.$$

Der in (IV) und (V) gebrauchte Wert von $m + \tau$ folgt aus

(VI) $$\sin(m+\tau) = -\operatorname{tg} n \operatorname{tg} \delta$$
und der Wert von n aus (I):
$$\sin n = \sin i \sin \varphi - \cos i \cos \varphi \sin k,$$

wenn i und k bekannt sind.

6. Wir wollen nun zunächst annehmen, die Größen m, n, c und F seien bekannt, so daß t aus (II) berechnet werden kann. Ist dann U die beobachtete dazu gehörige Ablesung der Uhr, $\varDelta U$ die Korrektion der Uhr gegen Sternzeit, so daß $U + \varDelta U$ die Sternzeit des Durchganges ist, so folgt:

$$U + \varDelta U - \alpha = t = \tau - C - f,$$

woraus die Korrektion der Uhr:

(VII) $$\varDelta U = \alpha - (U - t) = \alpha - (U - \tau + C + f).$$

Der beobachtete Durchgang liefert uns also eine Zeitbestimmung, sobald die Aufstellungskonstanten m und n des Instrumentes und die Größen c und F bekannt sind. Was diese letzteren anlangt, so werden wir später zeigen, wie sie bestimmt werden können und beschränken uns hier auf die Bemerkung, daß man c ohne Mühe sehr klein machen kann und daß auch F ein mäßiger Winkel von höchstens $10'$ ist.

Zur Bestimmung von m und n kann man die Gleichungen (I) heranziehen, wenn i und k bekannt sind; wenn nun auch i durch die Libelle leicht bestimmt werden kann, so ist doch k in der Regel unbekannt, und man muß daher zu einer unabhängigen Bestimmung von m und n die Mittel schaffen. Daß man hiezu die Durchgänge von zwei bekannten Sternen braucht, liegt auf der Hand; um ferner die Formeln möglichst einfach zu gestalten, muß man annehmen, daß die beiden Durchgänge an demselben Faden, am besten am Mittelfaden beobachtet sind. Bezeichnet man alle auf den zweiten Stern bezüglichen Größen mit einem Strich, so hat man zur Bestimmung von m und n die zwei Gleichungen (II)

(a) $$\begin{aligned} \sin(m+t) &= -\operatorname{tg} n \operatorname{tg} \delta - \sec n \sec \delta \sin(c+F) \\ \sin(m+t') &= -\operatorname{tg} n \operatorname{tg} \delta' - \sec n \sec \delta' \sin(c+F), \end{aligned}$$

zu denen, unter der Annahme gleicher Uhrkorrektion für beide Durch-

gänge, hinzutritt:

$$\text{(b)}\qquad \begin{aligned} \Delta U = \alpha - (U - t) = \alpha' - (U' - t') \quad \text{oder} \\ t' - t = (\alpha - U) - (\alpha' - U'). \end{aligned}$$

$t' - t$ ist also eine bekannte Größe, während t und t' selbst natürlich unbekannt sind. Da $m + t' = m + t + (t' - t)$, so lassen sich m und t nicht getrennt bestimmen; man muß also zur Bestimmung von m unter allen Umständen andere Mittel heranziehen und kann sich der Gleichungen (a) nur zur Bestimmung von n bedienen. Unter diesem Gesichtspunkt vollzieht sich die Behandlung der Gleichungen (a) am besten, wenn man berücksichtigt, daß die zweiten Glieder rechter Hand klein sind, daß also die Gleichungen

$$\text{(c)}\qquad \begin{aligned} \sin(m + t) &= -\operatorname{tg} n \operatorname{tg} \delta \\ \sin(m + t') &= -\operatorname{tg} n \operatorname{tg} \delta' \end{aligned}$$

einen Näherungswert von n liefern werden, der sich leicht zum wahren verbessern läßt.

Um aus (c) n abzuleiten, setzen wir:

$$m + t' = m + t + (t' - t)$$

und vereinigen beide Gleichungen durch Addition und Subtraktion:

$$\text{(d)}\qquad \begin{aligned} \operatorname{cotg} n \cdot \sin(m + t + \tfrac{1}{2}(t' - t)) &= -\frac{\sin(\delta' + \delta)}{2\cos\frac{1}{2}(t' - t)\cos\delta\cos\delta'} \\ \operatorname{cotg} n \cdot \cos(m + t + \tfrac{1}{2}(t' - t)) &= -\frac{\sin(\delta' - \delta)}{2\sin\frac{1}{2}(t' - t)\cos\delta\cos\delta'}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt n und $m + t$.

Um nun mit diesem Näherungswert n zum wahren zu gelangen, beachtet man, daß die Gleichungen (c) streng werden, also den wahren Wert von n liefern, sobald man statt t und t' setzt τ und τ' also in (d) statt $\frac{1}{2}(t' - t)$ setzt $\frac{1}{2}(\tau' - \tau)$. Für $\tau - t$ und $\tau' - t'$ lassen sich aber leicht Formeln aufstellen. Man hat nämlich nach (IV) (Seite 569), wenn das zweite Glied übergangen wird:

$$\sin(\tau - t) = \sin(C + f) = \frac{\sin(c + F)}{\cos n \cos\delta \cos(m + \tau)}$$

$$\sin(\tau' - t') = \sin(C' + f') = \frac{\sin(c + F)}{\cos n \cos\delta' \cos(m + \tau')}$$

und muß hier nur noch $m + \tau$ bzw. $m + \tau'$ wegschaffen. Nun ist, wenn in dem Dreieck zwischen dem Pol P, der Achse K und der

Kollimationslinie C der Winkel $90^\circ - w$ bzw. $90^\circ - w'$ an K eingeführt wird, da $KC = 90^\circ$:

$$\cos\delta \sin(m+\tau) = -\sin n \sin w \qquad \cos\delta' \sin(m+\tau') = -\sin n \sin w'$$
$$\cos\delta \cos(m+\tau) = \cos w \qquad \cos\delta' \cos(m+\tau') = \cos w'$$
$$\sin\delta = \cos n \sin w \qquad \sin\delta' = \cos n \sin w'.$$

Wenn man also die Winkel w und w' aus:

(e) $$\sin w = \frac{\sin\delta}{\cos n}, \quad \sin w' = \frac{\sin\delta'}{\cos n}$$

rechnet, so wird

(f) $$\sin(\tau - t) = \frac{\sin(c+F)}{\cos n \cos w}$$
$$\sin(\tau' - t') = \frac{\sin(c+F)}{\cos n \cos w'}$$

und dann

(g) $$\tfrac{1}{2}(\tau' - \tau) = \tfrac{1}{2}(t' - t) + \tfrac{1}{2}(\tau' - t') - \tfrac{1}{2}(\tau - t).$$

Mit diesem Wert an Stelle von $\frac{1}{2}(t' - t)$ rechnet man (d) nochmals durch und erhält dann den strengen Wert von n und $m + \tau$.

Man kann auch folgendermaßen verfahren. Es seien $\bar{m} + t$ und $\bar{n}$ die durch (d) erlangten Näherungswerte; dann wird

$$\sin(t+m) = \sin((t+\bar{m}) + (m-\bar{m}))$$
$$= \sin(t+\bar{m}) + \sin(m-\bar{m})\cos(t+\bar{m})$$

und daher nach (a)

$$-\sin(c+F) = \sin(t+\bar{m})\cos\delta\cos n$$
$$+ \sin(m-\bar{m})\cos(t+\bar{m})\cos\delta\cos n + \sin\delta\sin n$$

$$-\sin(c+F) = \sin(t'+\bar{m})\cos\delta'\cos n$$
$$+ \sin(m-\bar{m})\cos(t'+\bar{m})\cos\delta'\cos n + \sin\delta'\sin n,$$

oder wenn die Hilfswinkel w und w' durch

$$\sin\delta = \cos\bar{n}\sin w \qquad \sin\delta' = \cos\bar{n}\sin w'$$
$$\cos\delta\cos(\bar{m}+t) = \cos w \qquad \cos\delta'\cos(\bar{m}+t') = \cos w'$$
$$\cos\delta\sin(\bar{m}+t) = -\sin\bar{n}\sin w \qquad \cos\delta'\sin(\bar{m}+t') = -\sin\bar{n}\sin w'$$

eingeführt werden:

$$-\sin(c+F) = \sin w\sin(n-\bar{n}) + \sin(m-\bar{m})\cos w\cos n$$
$$-\sin(c+F) = \sin w'\sin(n-\bar{n}) + \sin(m-\bar{m})\cos w'\cos n,$$

woraus:

$$\sin(n - \bar{n}) = -\sin(c + F) \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(w' + w)}{\sin\frac{1}{2}(w' - w)}$$

und schließlich

$$n = \bar{n} + (n - \bar{n}).$$

Da $\bar{m} + t' = \bar{m} + t + (t' - t)$, so kann man w und w' aus:

$$\operatorname{tg} w = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos(\bar{m} + t)\cos\bar{n}}, \qquad \operatorname{tg} w' = \frac{\operatorname{tg}\delta'}{\cos(\bar{m} + t')\cos\bar{n}}$$

bestimmen.

Um m zu bestimmen, leitet man aus (I) durch Elimination von k folgende Gleichung ab:

$$\sin i = \cos n \cos\varphi \sin m + \sin\varphi \sin n$$

woraus

(h) $$\sin m = \frac{\sin i}{\cos n \cos\varphi} - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} n.$$

Zur Bestimmung von m ist also eine Nivellierung der Drehungsachse erforderlich.

Wenn der Uhrstand durch anderweitige Beobachtungen bekannt ist, dann kann man aus der angestellten Durchgangsbeobachtung die Rektaszension des Gestirnes bestimmen:

(1) $$\begin{gathered} \alpha = U + \Delta U - t \\ \sin(m + t) = -\operatorname{tg} n \operatorname{tg}\delta - \sec n \sec\delta \sin(c + F). \end{gathered}$$

Ist der Stundenwinkel t ermittelt, so kann daraus auch das Azimut a des beobachteten Gestirnes im Moment des Durchganges abgeleitet werden; die Formeln (10) (Seite 476) geben mit Rücksicht auf bequemste Rechnung:

(2) $$\operatorname{tg} a = -\frac{\sec\varphi \operatorname{cotg}\delta \sin t}{1 - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{cotg}\delta \cos t}.$$

Wird in denselben Vertikalkreis ein irdisches Objekt eingestellt, oder wird der etwa vorhandene Horizontalkreis des Instrumentes abgelesen, so setzt die Durchgangsbeobachtung (am häufigsten wird hierzu der Polarstern benutzt) in den Stand, das Azimut eines irdischen Objektes bzw. den Nullpunkt für die Azimutzählung zu bestimmen.

7. Wenn das Azimut des Vertikalkreises, welchen der Mittelfaden beschreibt, genau bekannt ist, dann können Durchgangsbeobachtungen eines bekannten Gestirnes zur Bestimmung der Zeit und der Zenitdistanz in folgender Weise berechnet werden, die eine Kenntnis und Bestimmung von m und n nicht voraussetzt. Zunächst wird die



Formel, die wir zur Reduktion vom Seitenfaden auf den Mittelfaden aufgestellt haben (S. 569),

$$f = \frac{F}{\cos n \cos \delta \cos (m + \tau)}$$

(mit Umgehung der Faktoren, die bei Zeitsternen nie etwas ausmachen können), leicht von m und n befreit werden können, wenn wir den parallaktischen Winkel $ZOP = q$ am Gestirn einführen; dieser ergibt sich aus Dreieck ZOP:

$$\sin q = \cos \varphi \sec \delta \sin a \tag{3}$$

und führt in Dreieck POK, worin $\sphericalangle POK = 90^\circ - q$ ist, zur Formel

$$\cos n \cos (m + \tau) = \cos q$$

und somit zu:

$$f = F \sec \delta \sec q. \tag{4}$$

Nennt man t den Stundenwinkel des Gestirnes beim Durchgang durch den Mittelfaden und z seine Zenitdistanz, so gibt das Dreieck POZ:

$$\tag{5} \left\{ \begin{aligned} \sin z \sin a &= \cos \delta \sin t \\ -\sin z \cos a &= \sin \delta \cos \varphi - \cos \delta \sin \varphi \cos t \\ \cos z &= \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t. \end{aligned} \right.$$

Zur bequemeren Berechnung von t und z hieraus fällen wir (Fig. 248) von P das Lot $PQ = \mu$ auf den Vertikalkreis ZO, nennen $ZQ = M$ und $\sphericalangle ZPQ = 90^\circ - \psi$, dann folgt:

$$\begin{aligned} \cos \mu \sin M &= \cos \varphi \cos a & \cos \mu \sin \psi &= \sin \varphi \sin a \\ \cos \mu \cos M &= \sin \varphi & \cos \mu \cos \psi &= \cos a \\ \sin \mu &= \cos \varphi \sin a & \sin \mu &= \cos \varphi \sin a \end{aligned}$$

und dann

$$\begin{aligned} \sin (z + M) &= \cos \delta \cos (t - \psi) \\ \sin \mu \cos (z + M) &= -\cos \delta \sin (t - \psi) \\ \cos \mu \cos (z + M) &= \sin \delta, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \sin (t - \psi) &= -\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \mu \\ \cos (z + M) &= \sec \mu \sin \delta. \end{aligned}$$

Aus t folgt der Uhrstand:

$$\Delta U = t - U + \alpha.$$

Wenn der Stundenwinkel des Gestirnes bei seinem Durchgang durch ein bekanntes Azimut a beobachtet wird, dann lassen sich die Formeln auch so stellen, daß daraus die Polhöhe φ oder die Deklination δ des Sternes hervorgeht, so daß also diese Größen durch Durchgangsbeobachtungen gefunden werden können. In der Tat ergibt der Quotient der beiden ersten Gleichungen (5)

$$\cos t \sin \varphi - \operatorname{tg} \delta \cos \varphi = \operatorname{cotg} a \sin t,$$

also wenn

$$m \sin M = \operatorname{tg} \delta$$

$$m \cos M = \cos$$

gesetzt wird:

$$\sin(\varphi - M) = \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} t \cos M,$$

ferner:

$$\operatorname{tg} \delta = \cos t \operatorname{tg} \varphi - \frac{\operatorname{cotg} a \sin t}{\cos \varphi}.$$

Auf diese Formeln wird später zurückzukommen sein (Nr. 10).

8. Durchgangsbeobachtungen im Meridian. Um zu untersuchen, wie die Durchgangsbeobachtungen am zweckmäßigsten angeordnet werden, um daraus die sichersten Resultate abzuleiten, differenzieren wir die Gleichung

$$\cos t \sin \varphi - \operatorname{tg} \delta \cos \varphi = \operatorname{cotg} a \sin t$$

und erhalten nach Einführung des parallaktischen Winkels q:

$$\cos \delta \cos q\, dt = \sin z\, da + \sin a \cos z\, d\varphi.$$

Nun folgt, wenn man $c = 0$ setzt, aus Dreieck POK (Fig. 248)

$$\cos q = \cos(m + t) \cos n$$

und aus Dreieck ZOK

$$\cos z \sin i + \sin z \cos i \sin(k + a) = 0,$$

also da i stets sehr klein ist,

$$da = -dk - \operatorname{cotg} z\, di.$$

Obige Gleichung läßt sich also so schreiben:

$$\cos \delta \cos(m + t) \cos n\, dt = -\sin z\, dk - \cos z\, di + \sin a \cos z\, d\varphi$$

und zeigt folgendes:

1. Die Bestimmung des Stundenwinkels t, also auch die der Zeit bzw. der Rektaszension, wird um so genauer, je kleiner die Größen δ, $m + t$ und n sind, d. h. für einen gegebenen Stern, je näher die Drehungsachse in die Ost-West-Richtung, also die Visierlinie in den Meridian gebracht ist.

2. Ein Fehler im Azimut der Drehungsachse hat um so geringeren Einfluß auf das Resultat, je näher das Gestirn durch das Zenit geht.

3. Ein Fehler in der Neigung der Drehungsachse hat um so größeren Einfluß auf das Resultat, je näher das Gestirn durch das Zenit geht.

Man wird hierdurch veranlaßt, das Durchgangsinstrument in den Meridian zu stellen; die allgemeinen Formeln der vorigen Nummern erfahren dadurch eine wesentliche Vereinfachung und sollen nun zusammengestellt werden:

Zunächst werden die Größen i und k und daher auch m und n sehr klein und die Beziehungen (1) (S. 568) zwischen denselben lassen sich daher in folgender Weise schreiben:

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} m &= i \cos\varphi + k \sin\varphi \\ n &= i \sin\varphi - k \cos\varphi, \end{aligned}$$

woraus umgekehrt:

$$\begin{aligned} i &= m \cos\varphi + n \sin\varphi \\ k &= m \sin\varphi - n \cos\varphi. \end{aligned}$$

Ferner werden die Formeln für die Reduktion vom Seitenfaden auf den Mittelfaden und vom Mittelfaden auf die Kollimationslinie

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} \sin f &= \sec\delta \cdot \sin F \\ \sin C &= \sec\delta \cdot \sin c \end{aligned}$$

oder für alle Sterne außer den Polsternen ausreichend

$$\text{(B')} \qquad \begin{aligned} f &= F \cdot \sec\delta \\ C &= c \cdot \sec\delta. \end{aligned}$$

Endlich wird auch der Stundenwinkel t klein und die Formel (II) schreibt sich daher so:

$$t = -m - n \operatorname{tg}\delta - c \sec\delta - F \sec\delta;$$

der Stundenwinkel des Gestirnes im Moment des Durchgangs durch den Mittelfaden wird also:

$$T = -m - n \operatorname{tg}\delta - c \sec\delta.$$

Ist U die Uhrzeit des Durchganges durch den Mittelfaden, ΔU die Uhrkorrektion, dann fand der Meridiandurchgang des Gestirnes um die Zeit T früher statt, also zur Uhrzeit $U + m + n \operatorname{tg} \delta + c \sec \delta$ und es ist daher

$$\text{(C)} \qquad U + \Delta U + m + n \operatorname{tg} \delta + c \sec \delta = \alpha,$$

woraus die Rektaszension berechnet wird, wenn die Uhrkorrektion bekannt ist, oder umgekehrt die letztere, wenn α bekannt ist. Die wichtige Formel (C) kann noch anders gestaltet werden. Der aus (A) folgende Wert

$$m = i \sec \varphi - n \operatorname{tg} \varphi$$

in (C) eingetragen gibt:

$$\text{(C')} \qquad U + \Delta U + i \sec \varphi + n (\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \varphi) + c \sec \delta = \alpha,$$

und wenn m und n in (C) durch i und k ersetzt werden:

$$\text{(C'')} \qquad U + \Delta U + i \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + k \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + \frac{c}{\cos \delta} = \alpha.$$

Die drei Formen heißen der Reihe nach die Besselsche, Hansensche und Mayersche.

Es sind noch diejenigen Modifikationen der Formeln (C) anzugeben, welche eintreten, wenn das Instrument „umgelegt“ wird, d. h. wenn die Enden der Drehungsachse die Lager vertauschen. Wir wollen die beiden Lagen mit „Kreis West“ und „Kreis Ost“ bezeichnen. Die bisherigen Formeln gelten ihrer Ableitung nach für Kreis West. In der anderen Lage tritt offenbar der Mittelfaden auf die andere Seite der Kollimationslinie und es tauscht daher c das Zeichen. Wenn wir ferner i und k bzw. m und n in beiden Lagen auf das Westende der Achse beziehen, bleiben die Formeln, was diese Größen anlangt, ungeändert.

Wird das Gestirn in der Nähe seiner unteren Kulmination beobachtet, so reduziert man nicht wie bisher auf den vom Pol nach Süden zu laufenden Teil des Meridianes, sondern auf den gegen Norden zu sich erstreckenden. Für diesen ist die Sternzeit des Durchganges gleich $\alpha + 12^h$ und die Entfernung des Gestirnes vom Äquator nicht δ, sondern $180^0 - \delta$. Man erhält also aus den für die obere Kulmination geltenden Formeln unmittelbar die für die untere Kulmination anzuwendenden, wenn man diese Änderungen anbringt. Wir stellen die Formeln für alle Fälle zusammen:

Besselsche Form.

Obere Kulm.: $U + \Delta U + m + n \operatorname{tg} \delta \pm c \sec \delta = \alpha$ — Kreis West / Kreis Ost

Untere Kulm.: $U + \Delta U + m - n \operatorname{tg} \delta \mp c \sec \delta = \alpha + 12^h$ — Kreis West / Kreis Ost

Mayersche Form:

Obere Kulm.:

$$U + \varDelta U + i\frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos\delta} + k\frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\delta} \pm \frac{c}{\cos\delta} = \alpha \qquad \begin{matrix}\text{Kreis West}\\ \text{Kreis Ost}\end{matrix}$$

Untere Kulm.:

$$U + \varDelta U + i\frac{\cos(\varphi + \delta)}{\cos\delta} + k\frac{\sin(\varphi + \delta)}{\cos\delta} \mp \frac{c}{\cos\delta} = \alpha + 12^h \qquad \begin{matrix}\text{Kreis West}\\ \text{Kreis Ost}\end{matrix}$$

Hansensche Form.

Obere Kulm.:

$$U + \varDelta U + i\sec\varphi + n(\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\varphi) \pm c\sec\delta = \alpha \qquad \begin{matrix}\text{Kreis West}\\ \text{Kreis Ost}\end{matrix}$$

Untere Kulm.:

$$U + \varDelta U + i\sec\varphi - n(\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\varphi) \mp c\sec\delta = \alpha + 12^h \qquad \begin{matrix}\text{Kreis West}\\ \text{Kreis Ost}\end{matrix}$$

9. Das Verfahren, die Aufstellungskonstanten m und n zu bestimmen, ist natürlich im Meridian dasselbe, wie für die allgemeine Lage, nur gestaltet sich die Berechnung viel einfacher, weil man die Durchgänge vermöge der Formeln (B) sofort auf die Kollimationslinie reduzieren kann. Dann wird aber, wenn die korrigierten Durchgangszeiten für die beiden Sterne mit U_0 und U_0' bezeichnet werden:

$$U_0 + \varDelta U + m + n\operatorname{tg}\delta = \alpha$$
$$U_0' + \varDelta U + m \pm n\operatorname{tg}\delta' = \alpha'$$

und daher:

(D)
$$n = \frac{(\alpha' - U_0') - (\alpha - U_0)}{\pm\operatorname{tg}\delta' - \operatorname{tg}\delta} \qquad \begin{matrix}\text{Obere Kulm.}\\ \text{Untere Kulm.}\end{matrix}$$

Um Rektaszensionen zu bestimmen, braucht man nur $\varDelta U + m$ zu kennen, nicht diese beiden Größen getrennt; hierfür findet man aus den Fundamentalsternen

$$\varDelta U + m = \alpha - (U_0 + n\operatorname{tg}\delta).$$

Will man den Uhrstand selbst besitzen, so muß m bestimmt werden, wozu die Formel (h) (S. 573) dient:

(E)
$$m = i\sec\varphi - n\operatorname{tg}\varphi.$$

Bei Benutzung der Mayerschen Form kann man k auch direkt bestimmen, ohne von n Gebrauch zu machen. Sind U_0 und U_0' die für Neigung und Kollimationsfehler korrigierten Durchgangszeiten und K und K' die Azimutfaktoren

$$K = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\delta}, \quad K' = \frac{\sin(\varphi \mp \delta')}{\cos\delta'} \qquad \begin{matrix}\text{Obere Kulm.}\\ \text{Untere Kulm.}\end{matrix}$$

so wird:

$$k = \frac{(\alpha' - U_0') - (\alpha - U_0)}{K' - K}.$$

Die Bestimmung von n sowohl als von k wird am sichersten, wenn die beiden Sterne in Deklination möglichst weit voneinander abstehen; man wird als den einen α', δ' also einen Polstern wählen, als den andern α, δ einen dem Äquator nahen Stern.

Der Kollimationsfehler c wird eliminiert, wenn man Beobachtungen in beiden Lagen des Instrumentes vereinigt; er kann aber auch direkt bestimmt werden 1. durch Anvisieren eines weit entfernten irdischen Objektes oder eines Kollimators oder eines langsam bewegten Sternes in beiden Lagen des Instrumentes, 2. durch Ausmessen der Distanz des Mittelfadens von seinem in einem Quecksilberhorizont gespiegelten Bilde in Verbindung mit Neigungsbestimmung der Horizontalachse.

Die Distanzen F der Seitenfäden vom Mittelfaden werden entweder durch die Schraube oder durch Beobachtung von Durchgängen von Polsternen unter Anwendung der Formel (B) bestimmt.

Es ist noch zu erläutern, in welcher Weise das Durchgangsinstrument in den Meridian eingestellt werden kann. Wir wollen dabei annehmen, daß Gestirnskoordinaten gegeben seien, indem das allgemeine Verfahren bereits früher besprochen ist, daß dagegen die Korrektion der Uhr nur roh bekannt sei. Man berechnet die Uhrzeit, zu der ein langsam bewegtes Gestirn, am besten der Polarstern, den Meridian passiert und stellt ihn zu dieser Zeit auf den Mittelfaden des Instrumentes, indem dieses bei nahe berichtigter Horizontalität der Achse im Azimut bewegt wird. Hierauf sucht man die Korrektion der Uhr, indem man ein im Zenit kulminierendes Gestirn beobachtet; ein Fehler des Azimutes hat dann den geringsten Einfluß. Mit der erlangten genaueren Zeit wiederholt man dann das erste Verfahren an einem zweiten Polstern. Dann wird das Instrument so nahe im Meridian stehen, daß die Berechnung der Durchgänge nach obigen Formeln erfolgen kann.

10. Durchgangsbeobachtungen im ersten Vertikal. Wenn die Durchgangsbeobachtungen nicht die Zeit bzw. die Rektaszensionen der Sterne, sondern die Polhöhe bzw. die Deklinationen ergeben sollen, dann stellt man sie am besten im Vertikalkreis mit dem Azimut 90^0 bzw. 270^0, im sogenannten ersten Vertikal an. In der Tat zeigt die Differentialformel aus dem Dreieck Pol, Zenit, Stern

$$\cos\varphi \sin a \cdot dt = \cos q \cdot d\delta - \cos a \cdot d\varphi,$$

daß für $a = 90^0$ bzw. 270^0, wofür der parallaktische Winkel q seinen Maximalbetrag erreicht, die Bedingungen zur Bestimmung von φ bzw. δ aus t die günstigsten werden.

In den ersten Vertikal eines Beobachtungsortes treten nur Sterne ein, deren Deklinationen zwischen 0^0 und φ^0 liegen, die also zwischen Äquator und Zenit kulminieren. Von diesen haben den größten parallaktischen Winkel diejenigen, die in der Nähe des Zenits kulminieren (δ nahe gleich φ); diese Sterne haben den weiteren Vorteil, daß die Durchgänge durch die beiden Zweige des ersten Vertikals (Ostvertikal $a = 270^0$ und Westvertikal $a = 90^0$) rasch aufeinander folgen, so daß man in der Zwischenzeit das Instrument und die Uhr als unveränderlich betrachten kann, und weiter den, daß die Refraktion den geringsten Einfluß ausübt. Diese Zenitsterne spielen also für die jetzt zu besprechende Methode die Hauptrolle.

Zur Einführung des Instrumentes in den I. Vertikal berechnet man den Stundenwinkel t und daraus die Sternzeit $\alpha \pm t$, zu der ein bekannter Stern in den I. Vertikal tritt, und stellt dann das Instrument so, daß zu dieser Zeit der Vertikalmittelfaden und das Gestirn sich decken. Die Gleichung

$$\cos t \sin \varphi - \operatorname{tg} \delta \cos \varphi = \operatorname{cotg} a \sin t$$

gibt für $a = \pm 90^0$ den genannten Stundenwinkel aus:

$$\text{(I)} \qquad \cos t = \operatorname{cotg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta .$$

Dies ist auch die Hauptgleichung für die Beobachtungen im I. Vertikal überhaupt und gibt Deklination oder Polhöhe, je nachdem das eine oder das andere als bekannt angenommen wird; am zweckmäßigsten ist es, eine der folgenden Umformungen zu benutzen:

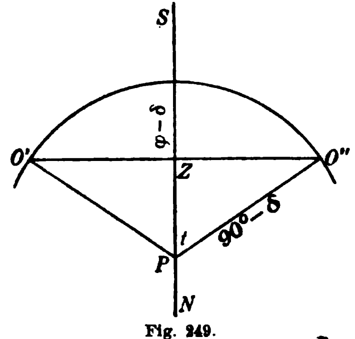


Fig. 249.

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} \sin(\varphi - \delta) &= 2 \sin \varphi \cos \delta \sin \tfrac{1}{2} t^2 \\ \sin(\varphi - \delta) &= \sin(\varphi + \delta) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} t^2 , \end{aligned}$$

da man für die Berechnung der kleinen rechten Seiten stets über genügende Näherungswerte von φ bzw. δ verfügen wird.

Um Zeit und Zenitdistanz der Gestirne bei ihrem Durchgang durch den Ostwestvertikal zu erhalten, d. h. um sie einstellen zu können, entnimmt man dem jetzt rechtwinkligen Dreieck Pol, Zenit, Gestirn:

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} \cos \delta \sin t &= \pm \sin z \quad \begin{matrix} \text{West} \\ \text{Ost} \end{matrix} \\ \cos \delta \cos t &= \cos z \cos \varphi \\ \sin \delta &= \cos z \sin \varphi , \end{aligned}$$

woraus:

$$\cos t = \operatorname{tg}\delta \operatorname{cotg}\varphi \qquad \text{Sternzeit } \theta = \alpha \mp t \quad \begin{matrix}\text{Ost}\\ \text{West}\end{matrix}$$

(III a) oder:

$$\cos z = \sin\delta \operatorname{cosec}\varphi$$

$$\sin z = \operatorname{cosec}\varphi \sqrt{\sin(\varphi-\delta)\sin(\varphi+\delta)}$$

$$\sin t = \pm \frac{\sin z}{\cos\delta}.$$

Um die beobachteten Durchgangszeiten durch einen Seitenfaden des Instrumentes auf die Kollimationslinie reduzieren und dann von den Aufstellungsfehlern befreien zu können, ist es nicht zweckmäßig, die früheren Formeln für das allgemeine Durchgangsinstrument zu spezialisieren, da wir dort Größen eingeführt haben, die beim Übergang auf den Meridian klein werden, während es hier natürlich vorteilhaft ist, Größen zu benutzen, die im Ostwestvertikal von der Ordnung der Differentiale sind. Wir leiten daher die Formeln in Kürze mit den neu einzuführenden Größen ab.

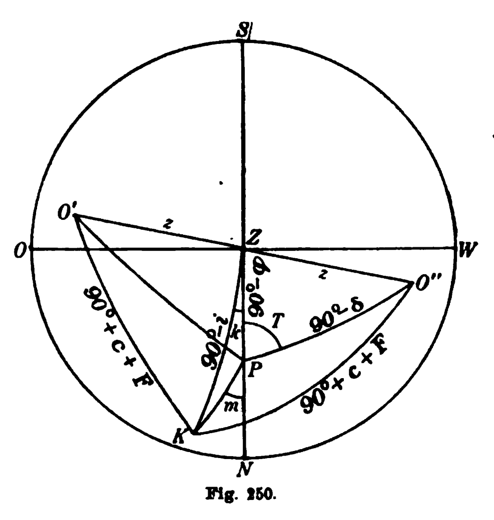


Fig. 250.

Es treffe das Kreisende der Achse, das im Norden angenommen wird, die Sphäre im Punkte K, dessen Azimut vom nördlichen Teil des Meridians aus nach Osten zu gezählt k und dessen Zenitdistanz $90^0 - i$ sei, wo also i die Neigung der Drehungsachse bezogen auf das Nordende ist; Stundenwinkel und Deklination von K seien mit m und n bezeichnet, ersterer wie das Azimut gezählt. Dann gibt das Dreieck ZPK

(IV)

$$\cos n \sin m = \cos i \sin k$$

$$\cos n \cos m = \cos i \cos k \sin\varphi - \sin i \cos\varphi$$

$$\sin n = \cos i \cos k \cos\varphi + \sin i \sin\varphi,$$

oder wenn m, i, k als kleine Größen angenommen werden:

(IV a)

$$m \cos n = k$$

$$\cos n = \sin(\varphi - i) = \sin\varphi - i\cos\varphi$$

$$\sin n = \cos(\varphi - i) = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Ist ferner wieder c der Kollimationsfehler des Mittelfadens bezogen auf das Kreisende und F die Distanz des Seitenfadens vom Mittelfaden, so folgt aus dem Dreieck OPK, wenn mit T der Stundenwinkel des Gestirnes am Seitenfaden bezeichnet wird (T in der gewöhnlichen Weise gezählt, also bei Stern Ost: Winkel $O'PK = T - 180^\circ - m$, und bei Stern West: Winkel $O''PK = 180^\circ - T + m$):

$$-\sin(c+F) = \sin n \sin\delta - \cos n \cos\delta \cos(T-m)$$

oder

$$-c - F = \sin n \sin\delta - \cos n \cos\delta \cos T - m \cos n \cos\delta \sin T.$$

Wird hier (IVa) eingetragen und (III) beachtet, so folgt mit Rücksicht darauf, daß in den kleinen Gliedern $T = t$ gesetzt werden darf:

$$-\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos T = c + F + i \cos z \mp k \sin z \qquad \begin{matrix} * \text{ West} \\ * \text{ Ost.} \end{matrix}$$

Ist nun t wie oben der Stundenwinkel des Sternes im I. Vertikal, so ist nach (I)

$$-\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t = 0,$$

oder wenn dies von der vorigen Gleichung abgezogen wird:

$$+2\sin\varphi \cos\delta \sin\tfrac{1}{2}(T+t) \sin\tfrac{1}{2}(t-T) = c + F + i\cos z \mp k \sin z \qquad \begin{matrix} * \text{ West} \\ * \text{ Ost.} \end{matrix}$$

t und T unterscheiden sich nur um die Instrumentalfehler voneinander; man darf also als Faktor von kleinen Gliedern $\sin\frac{1}{2}(T+t) = \sin t$ und ferner $2\sin\frac{1}{2}(t-T) = t - T$ setzen. Die letzte Gleichung geht dann schließlich mit Beachtung von $\cos\delta \sin t = \pm \sin z$ über in:

$$t = T \pm \frac{i}{\sin\varphi \operatorname{tg} z} - \frac{k}{\sin\varphi} \pm \frac{c+F}{\sin\varphi \sin z}. \qquad \begin{matrix} * \text{ West} \\ * \text{ Ost.} \end{matrix}$$

Ist U die von der Uhr angezeigte Zeit des Durchgangs durch den Seitenfaden, $U + \varDelta U$ die Sternzeit für denselben Moment, ferner θ die Sternzeit des Durchganges durch den I. Vertikal, so folgt, wenn beiderseits α addiert wird:

Kreis Nord.

$$\text{(Va)} \qquad \theta = U + \varDelta U \pm \frac{i}{\sin\varphi \operatorname{tg} z} - \frac{k}{\sin\varphi} \pm \frac{c+F}{\sin\varphi \sin z} \qquad \begin{matrix} * \text{ West} \\ * \text{ Ost.} \end{matrix}$$

Diese Formel gilt, wenn der Kreis im Norden angenommen wird. Wird das Instrument umgelegt, so daß der Kreis nach Süden zu liegen kommt, werden Neigung und Azimut der Achse jedoch nach

wie vor auf das Nordende der Achse bezogen, so bleiben die Glieder in i und k ungeändert; dagegen schließt der Seitenfaden mit dem Nordende der Achse jetzt den Winkel $90^0 - c - F$ ein; das letzte Glied ändert also das Zeichen:

Kreis Süd:

$$(\text{V b}) \qquad \theta = U + \varDelta U \pm \frac{i}{\sin\varphi \operatorname{tg} z} - \frac{k}{\sin\varphi} \mp \frac{c+F}{\sin\varphi \sin z} \qquad \begin{matrix} * \text{ West} \\ * \text{ Ost.} \end{matrix}$$

Ist hierdurch θ ermittelt, so geben mit $t = \theta - \alpha$ die Formeln (I) oder (II) die Polhöhe oder die Deklination des Sternes. Die abgeleiteten Formeln (V) lassen folgende für die praktische Ausführung der Beobachtungen im Ostwestvertikal wichtigen Sätze erkennen.

Der Stundenwinkel t ist auch gleich der halben Differenz der Sternzeiten für die Durchgänge im West- und Ost-Vertikal: $t = \frac{1}{2}(\theta_w - \theta_o)$; bildet man ihn in dieser Weise, so wird das Resultat von der Rektaszension und vom Uhrstand unabhängig; werden beide Durchgänge in derselben Kreislage beobachtet, so wird das Resultat auch vom Azimut der Achse frei, wogegen i, c, F berücksichtigt werden müssen. Legt man zwischen den beiden Durchgängen um, beobachtet also den Ostdurchgang bei Kreis Nord, den Westdurchgang bei Kreis Süd, oder umgekehrt, dann wird das Resultat von k, c und F frei und nur die Neigung muß bekannt sein. Bei langsamer bewegten Sternen kann man, wenn man an einem Seitenfaden beobachtet, während jedes einzelnen Durchganges umlegen. Das arithmetische Mittel aus beiden Lagen wird dann von $c + F$ frei und die Differenz aus dem Ost- und Westdurchgang auch noch vom Azimut k, wogegen die Neigung auch hier bestimmt werden muß.

Hiernach ergeben sich die günstigsten Beobachtungsanordnungen zur Bestimmung von φ oder δ von selbst.

Statt der Gleichungen (V) verwendet man vorteilhafter solche, die den unmittelbaren Einfluß der Instrumentalfehler auf die zu ermittelnden Größen φ oder δ berechnen lassen. Wir geben hierzu auf die strenge Gleichung

$$\sin(c + F) = -\sin n \sin\delta + \cos n \cos\delta \cos(T - m)$$

zurück, entwickeln $\cos(T - m)$ und substituieren (IV):

$$\begin{aligned} \sin(c + F) = & - \cos i \cos k \cos\varphi \sin\delta - \sin i \sin\varphi \sin\delta \\ & + \cos\delta \cos T \cos i \cos k \sin\varphi - \cos\delta \cos T \sin i \cos\varphi \\ & + \cos\delta \sin T \cos i \sin k . \end{aligned}$$

Führt man nun statt der Größen φ und z der Gleichungen (III), die



streng nur für den I. Vertikal gelten, die Hülfsgrößen φ_0 und z_0 ein, die durch

$$\pm \sin z_0 = \cos\delta \sin T$$
$$\cos z_0 \cos\varphi_0 = \cos\delta \cos T$$
$$\cos z_0 \sin\varphi_0 = \sin\delta$$

definiert sind, also für den größten Kreis gelten, in dem der Seitenfaden sich bewegt, so folgt, wenn außerdem $\cos i = \cos k = 1$ gesetzt wird:

$$\sin(c+F) = \cos z_0 \sin(\varphi-\varphi_0) - \cos z_0 \sin i \cos(\varphi-\varphi_0) \pm \sin z_0 \sin k,$$

oder:

$$\text{Kreis Nord:}\quad \operatorname{tg}(\varphi-\varphi_0) = \frac{\sin(c+F)}{\cos z_0 \cos(\varphi-\varphi_0)} + \sin i \mp \frac{\operatorname{tg} z_0 \sin k}{\cos(\varphi-\varphi_0)} \quad \begin{matrix}\text{West}\\ \text{Ost}\end{matrix}$$

und ebenso wie vorhin:

$$\text{Kreis Süd:}\quad \operatorname{tg}(\varphi-\varphi_0) = -\frac{\sin(c+F)}{\cos z_0 \cos(\varphi-\varphi_0)} + \sin i \mp \frac{\operatorname{tg} z_0 \sin k}{\cos(\varphi-\varphi_0)} \quad \begin{matrix}\text{West}\\ \text{Ost.}\end{matrix}$$

Meist wird man mit folgenden Formeln ausreichen:

$$T = \tfrac{1}{2}(U_w - U_o) \qquad \operatorname{tg}\varphi_0 = \operatorname{tg}\delta \sec T$$

$$\text{(VI)}\quad \begin{aligned} &\text{Kreis Nord:}\quad \varphi = \varphi_0 + (c+F)\sec z_0 + i \mp k \operatorname{tg} z_0 \quad \begin{matrix}\text{West}\\ \text{Ost}\end{matrix}\\ &\text{Kreis Süd:}\quad \varphi = \varphi_0 - (c+F)\sec z_0 + i \mp k \operatorname{tg} z_0 \quad \begin{matrix}\text{West}\\ \text{Ost.}\end{matrix}\end{aligned}$$

Eine andere auch zur Bestimmung der Deklinationen geeignete Formel erhält man, wenn man in der letzten Formel für $\sin(c+F)$ den Faktor $\cos(\varphi-\varphi_0)$ von $\sin i$ gleich 1 setzt, $\sin(\varphi-\varphi_0)$ auflöst und dann φ_0 durch seine Definitionsgleichungen eliminiert:

$$\sin(c+F) = \cos\delta \sin\varphi \cos T - \sin\delta \cos\varphi - \cos z_0 \sin i \pm \sin z_0 \sin k$$
$$\sin(c+F) = \sin(\varphi-\delta) - 2\cos\delta \sin\varphi \sin\tfrac{1}{2}T^2 - \cos z_0 \sin i \pm \sin z \sin k,$$

also gleich für alle vier Fälle zusammengestellt

$$\text{(VII)}\quad \begin{aligned} &\text{Kreis Nord:}\quad \sin(\varphi-\delta) = 2\cos\delta \sin\varphi \sin\tfrac{1}{2}T^2 + \sin(c+F)\\ &\qquad\qquad + \sin i \cos z_0 \mp \sin k \sin z_0 \quad \begin{matrix}\text{Ost}\\ \text{West}\end{matrix}\\ &\text{Kreis Süd:}\quad \sin(\varphi-\delta) = 2\cos\delta \sin\varphi \sin\tfrac{1}{2}T^2 - \sin(c+F)\\ &\qquad\qquad + \sin i \cos z_0 \mp \sin k \sin z_0 \quad \begin{matrix}\text{Ost}\\ \text{West}\end{matrix}\end{aligned}$$

Wie man sieht, lassen sich durch geeignete Kombinationen alle Instrumentalfehler eliminieren mit Ausnahme der Neigung, die mit dem

vollen Betrag ins Resultat eingeht; auf deren Bestimmung muß also besondere Sorgfalt verwendet werden.

Obgleich man bei Durchführung dieser Methoden selten genug Durchgänge an Seitenfäden auf den Mittelfaden zu reduzieren haben wird, sei doch die Formel hierfür abgeleitet. Nennt man T und τ die Stundenwinkel des Gestirnes am Seitenfaden und am Mittelfaden, so bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin(c+F) &= -\sin n \sin\delta + \cos n \cos\delta \cos(T-m) \\ \sin c &= -\sin n \sin\delta + \cos n \cos\delta \cos(\tau-m), \end{aligned}$$

deren Differenz auf

$$2\sin\tfrac{1}{2}F\cos(\tfrac{1}{2}F+c) = 2\cos\delta\cos n\sin\tfrac{1}{2}(\tau-T)\sin(\tfrac{1}{2}(\tau+T)-m)$$

führt. Entwickelt man den letzten Faktor und beachtet die Gleichungen (IV), so kommt, da F stets klein ist:

$$2\sin\tfrac{1}{2}(\tau-T) = \frac{\sin F}{\cos\delta\sin(\varphi-i)\sin\tfrac{1}{2}(\tau+T) - \cos\delta\sin k\cos\tfrac{1}{2}(\tau+T)}$$

oder wenn die Reduktion gleich f gesetzt wird,

$$\text{(VIII)} \qquad f = \frac{F}{\cos\delta\sin(\varphi-i)\sin(\tau-\tfrac{1}{2}f) - \cos\delta\sin k\cos(\tau-\tfrac{1}{2}f)}.$$

Das Glied mit $\sin k$ wird außer in nächster Nähe des Zenits zu vernachlässigen sein; die Auflösung erfolgt indirekt.

Die Bestimmung der Neigung geschieht stets durch die Libelle; das Azimut erhält man durch Verbindung der Durchgänge zweier Sterne, von denen der eine eine größere Zenitdistanz im I. Vertikal haben muß.

Die Beobachtungen im I. Vertikal gehören zu den genauesten der heutigen Astronomie und sind ausgezeichnet durch ihre Unabhängigkeit von Unvollkommenheiten des Instrumentes, insbesondere von Kreisteilungsfehlern; eine gute Libelle, eine Uhr, deren Gang genau bekannt ist, und eine konstante Aufstellung des Instrumentes auf kurze Zeit sind alles, was vorhanden sein muß. Von besonderer Wichtigkeit sind sie für Ermittelung der Änderungen der Deklinationen der Gestirne durch die Aberration und Nutation, weil aus diesen die Aberrationskonstante und die Nutationskonstante abgeleitet werden können, falls die Beobachtungen über ein Jahr bzw. über 19 Jahre ausgedehnt werden.

§ 98. Messungen am Horizontalkreis.

11. Zur Messung des Winkels zwischen den Vertikalkreisen zweier Objekte, also zur Messung von Azimutdifferenzen, bedient man sich eines fest aufgestellten horizontalen Kreises, der mit der Visierlinie und dem Ableseindex in folgende Verbindung gebracht ist. Durch den Mittelpunkt des Kreises geht senkrecht zu seiner Ebene eine vertikale Drehungsachse, an der die übrigen Teile des Instrumentes angebaut sind: ein Index (Ablesemikroskop oder Nonius) mittelst dessen die Größe der Drehung der Achse am Kreis abgelesen werden kann; dann ein auf der Achse senkrechtes Lager, in welches die horizontale Drehungsachse eingelegt wird; endlich senkrecht zu dieser Achse und fest damit verbunden die Visierlinie. Letztere beschreibt also bei völlig berichtigtem Instrument einen Vertikalkreis und kann in jede Höhe und bei Drehung der Vertikalachse in jedes Azimut eingestellt werden. Man kann jedes Objekt auf zwei Arten einstellen, indem man die Achse um 180° dreht und das Fernrohr durchschlägt. Wir wollen die beiden Lagen mit Kreisende der Achse links und rechts unterscheiden. Die Differenz der Ablesungen für zwei eingestellte Objekte gibt den Winkel zwischen den Vertikalkreisen, oder wenn das eine Objekt der Meridian ist, das Azimut des anderen. — Die Teilung des Kreises läuft stets im Sinn der Azimutzählung; ihr Nullpunkt und der Index können an beliebiger Stelle liegen, da es sich stets um die Differenz zweier Ablesungen handelt. — Wir wollen nun wieder annehmen, daß die genannten Bedingungen im Bau des Instrumentes und in seiner Aufstellung nicht streng erfüllt seien und den Einfluß der Abweichungen auf die Messung von Azimutdifferenzen untersuchen.

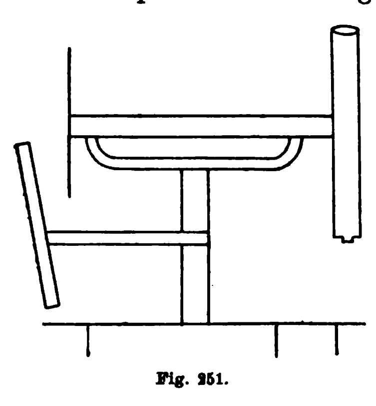


Fig. 251.

Die vertikale Drehungsachse stehe zwar senkrecht zum Kreis, treffe die Sphäre aber nicht im wahren Zenit Z, sondern in der Entfernung J davon in Z'; dieser Punkt, der Pol des Kreises, ist also der Scheitel der an letzterem gemessenen Winkel; bei aufgestelltem Instrument liegt er fest auf der Sphäre und bestimmt mit dem Zenit Z einen festen größten Kreis $Z'ZH$ und dessen Pol L, den Schnitt des Kreises mit dem Horizont. Die Horizontalachse treffe die Sphäre in einem Punkt K; da sie weder genau senkrecht zur Vertikalachse, noch senkrecht zur Richtung der Schwere stehen wird, werden die Winkel KZ und KZ' von 90° um die kleinen Beträge i bzw. i' ver-

schieden sein; i kann direkt mittelst einer auf die Horizontalachse aufgesetzten Libelle gemessen werden und soll positiv gerechnet werden, wenn die Kreisseite der Achse höher liegt; i' kann nur durch Rechnung aus dem Dreieck $ZZ'K$ gefunden werden. Seien die Winkel, welche die Richtungen ZK und $Z'K$ mit der festen Richtung $Z'ZH$ bilden a bzw. a' (im Sinne der Kreisteilung gezählt) so folgt:

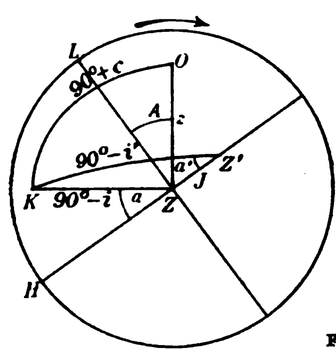
$$\begin{aligned} \sin i &= \cos J \sin i' + \sin J \cos i' \cos a' \\ \cos i \sin a &= \cos i' \sin a' \\ \cos i \cos a &= -\sin J \sin i' + \cos J \cos i' \cos a'. \end{aligned}$$

Wegen der Kleinheit von i, i', J können diese Formeln so geschrieben werden

$$i = i' + J \cos a' \quad \text{oder} \quad i' = i - J \cos a'$$
$$a = a' \quad \text{also} \quad i' = i - J \cos a$$

Kreisende links. Kreisende rechts.





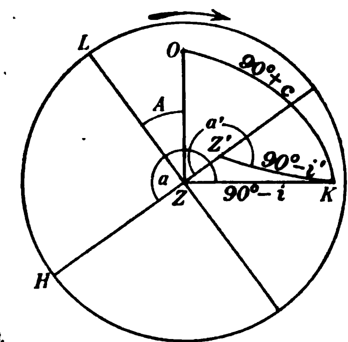


Fig. 252.

und zeigen, daß Winkel gemessen am Scheitel Z' als identisch mit jenen am Scheitel Z angesehen werden können und daß man i' für jede Lage der Achse rechnen kann, wenn J bestimmt ist; übrigens wird sich gleich herausstellen, daß die Kenntnis von i' nicht erforderlich ist.

Es sei nun das Objekt O, dessen Zenitdistanz z und dessen von der Richtung ZL aus gerechnetes Azimut A sei, auf den Mittelfaden der Visierlinie eingestellt und dieser bilde mit dem Kreisende der Horizontalachse den Winkel $90^\circ + c$ (c = Kollimationsfehler); dann gibt das Dreieck KZO

$$-\sin c = \sin i \cos z + \cos i \sin z \sin(a - A),$$

da der Winkel bei Z, wenn das Kreisende der Achse links von dem

nach dem Objekt schauenden Beobachter liegt, gleich ist $90^\circ - a + A$, und wenn es rechts liegt, gleich ist $a - 90^\circ - A$. Aus dieser Gleichung folgt wegen der Kleinheit der Instrumentalfehler

$$\sin(a - A) = -c \operatorname{cosec} z - i \operatorname{cotg} z.$$

Es ist also auch $\sin(a - A)$ klein und daher $a - A$ in der Nähe von 0° oder 180°. Fig. 252 läßt erkennen, daß bei Kreis links A und a nahe gleich und bei Kreis rechts nahe 180° voneinander verschieden sind; man hat also

Kreis links $A = a + c \operatorname{cosec} z + i \operatorname{cotg} z$

„ rechts $A = a - 180^\circ - c \operatorname{cosec} z - i \operatorname{cotg} z.$

Für ein zweites Objekt O_1 hat man ebenso:

Kreis links $A_1 = a_1 + c \operatorname{cosec} z_1 + i_1 \operatorname{cotg} z_1$

„ rechts $A_1 = a_1 - 180^\circ - c \operatorname{cosec} z_1 - i_1 \operatorname{cotg} z_1$

und daher wird die Azimutdifferenz der beiden Objekte

Kreis links $A_1 - A = a_1 - a + c(\operatorname{cosec} z_1 - \operatorname{cosec} z) + (i_1 \operatorname{cotg} z_1 - i \operatorname{cotg} z)$

„ rechts $A_1 - A = a_1 - a - c(\operatorname{cosec} z_1 - \operatorname{cosec} z) - (i_1 \operatorname{cotg} z_1 - i \operatorname{cotg} z).$

Nun ist $a_1 - a = a_1' - a' =$ der Größe der Drehung, die die Horizontalachse um das Drehungszentrum Z' ausgeführt hat und diese ist gleich der Differenz der Ablesungen am Index; bezeichnet man diese letzteren mit $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}_1$, so wird $a_1 - a = \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}$ und daher schließlich die Azimutdifferenz $\Delta A = A_1 - A$ der beiden Objekte

Kreis links / „ rechts $\Delta A = \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A} \pm c(\operatorname{cosec} z_1 - \operatorname{cosec} z) \pm (i_1 \operatorname{cotg} z_1 - i \operatorname{cotg} z).$

Ist $\mathfrak{A}_m$ die Ablesung des Kreises, welche dem Meridian entspricht, so wird das Azimut eines eingestellten Objektes, wenn dafür die Ablesung $\mathfrak{A}$ ist

(A) Kreis links / „ rechts $A = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}_m \pm c \operatorname{cosec} z \pm i \operatorname{cotg} z.$

Um $\mathfrak{A}_m$ zu bestimmen, muß man das Azimut eines bekannten Sternes (am besten des Polarsternes) für die Sternzeit θ berechnen: es ist (Seite 573)

$$\text{(B)} \qquad \operatorname{tg} A_* = -\frac{\sec\varphi \operatorname{cotg}\delta \sin(\theta - \alpha)}{1 - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{cotg}\delta \cos(\theta - \alpha)}.$$

Ist zu dieser Zeit das Gestirn am Mittelfaden eingestellt und die zu-

gehörige Kreisablesung $\mathfrak{A}_*$, dann gibt obige Formel $\mathfrak{A}_m$. Um $\mathfrak{A}_m$ nicht immer neu bestimmen zu müssen, ermittelt man das Azimut A_i eines weit entfernten festen irdischen Objektes (Mire). Ist dessen Zenitdistanz z_i und die Kreisablesung bei seiner Einstellung $\mathfrak{A}_i$, dann wird die Kreisablesung für den Meridian

Kreis links / „ rechts $$\mathfrak{A}_m = \mathfrak{A}_i - A_i \pm c \operatorname{cosec} z_i \pm i_i \operatorname{cotg} z_i$$

und daher das Azimut eines Sternes, bei dessen Einstellung $\mathfrak{A}$ am Kreis abgelesen ist und der die Zenitdistanz z hat:

Kreis links / „ rechts $$A = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}_i + A_i \pm c(\operatorname{cosec} z - \operatorname{cosec} z_i) \pm (i \operatorname{cotg} z - i_i \operatorname{cotg} z_i).$$

Der Kollimationsfehler c wird durch Einstellung eines irdischen Objektes oder eines Fadens in einem Kollimatorfernrohr in beiden Lagen bestimmt. Sind $\mathfrak{B}_l$ und $\mathfrak{B}_r$ die für Neigung korrigierten Ablesungen des Kreises bei Kreis links und rechts, dann wird

$$c = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{B}_r - \mathfrak{B}_l) \sin z_i .$$

Die Neigung i wird stets mittelst einer auf die Horizontalachse aufgesetzten Libelle bestimmt, die bei jeder Einstellung abzulesen ist.

Horizontalkreise werden in der astronomischen Praxis kaum gebraucht; ihre Hauptverwendung finden sie in der Geodäsie als „Theodolite“ zur Ausführung von Triangulationen und Bestimmung von Azimuten irdischer Objekte.

§ 99. Messungen am Vertikalkreis.

12. Um mit einem Vertikalkreis Messungen anzustellen, d. h. um Zenitdistanzen zu bestimmen, befestigt man ihn parallel zur Visierlinie an eine horizontal gelagerte Drehungsachse, deren Lager auf einer drehbaren Vertikalsäule ruht, die zugleich die Ablesungsvorrichtung des Kreises trägt. Durch Drehung um die Vertikalsäule kann der Kreis in jede Vertikalebene eingestellt werden. Die Säule kann auch fest sein oder sie kann durch zwei feste Pfeiler mit Lagern ersetzt sein; dann sind natürlich nur Messungen in einer bestimmten Vertikalebene, gewöhnlich dem Meridian, möglich.

Die Fehler des Instrumentes, welche die Messung von Vertikalwinkeln beeinflussen, sind folgende: 1. Die Vertikalachse geht nicht durch das Zenit Z, sondern durch den Punkt Z' in der Entfernung J von Z. 2. Die Horizontalachse liegt nicht genau horizontal, sondern ihr Kreisende K bildet mit dem Horizont den Winkel i. 3. Ho-

rizontal- und Vertikalachse stehen nicht senkrecht aufeinander, sondern bilden den Winkel $90^\circ - i'$. 4. Der Winkel der Visierlinie mit dem Kreisende der Horizontalachse ist $90^\circ + c$ (Kollimationsfehler). Es könnte auch die Ebene des Kreises von der senkrechten Lage gegen die Horizontalachse abweichen, allein der Mechaniker ist leicht imstande, eine größere Abweichung zu erkennen und zu beseitigen und eine kleine ist ohne Einfluß. Wir können also den geteilten Kreis als den Polkreis von K betrachten und annehmen, daß die sphä-

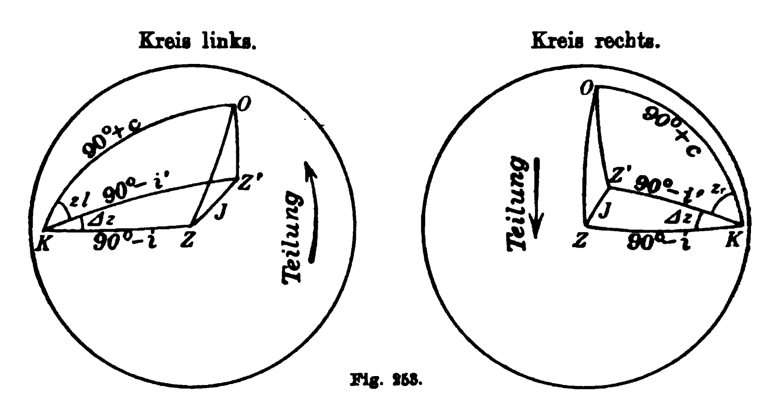


Fig. 253.

rischen Winkel bei K durch den Kreis gemessen werden (Fig. 253). Wird der Horizontalfaden der Visierlinie nacheinander auf die Punkte Z' und O eingestellt und dabei am Kreis $\mathfrak{A}_0$ bzw. $\mathfrak{A}_l$ und $\mathfrak{A}_r$ abgelesen, so ist, wenn die Teilung von rechts nach links läuft

$$\text{Kreis links: } \sphericalangle Z'KO = z_l = \mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_l$$
$$\text{„ rechts: } \sphericalangle Z'KO = z_r = \mathfrak{A}_r - \mathfrak{A}_0.$$

Der kleine Winkel $Z'KZ$, der von i, i' und J abhängt und sich mit der Lage von K ändert, kann ohne Kenntnis dieser Größen durch eine Libelle gemessen werden, die an der Vertikalachse, am besten an der Ablesevorrichtung befestigt ist. Wenn K im größten Kreis $Z'Z$ liegt, dann ist dieser Winkel Null; wir wollen die entsprechende Ablesung für den Mittelpunkt der Blase der Libelle mit b_0 bezeichnen. Liegt der Nullpunkt der Libelle rechts und sind b_l und b_r die Ablesungen der Blasenmitte für eine beliebige Lage von K, so wird

$$\sphericalangle Z'KZ = \begin{cases} b_0 - b_l & \text{Kreis links} \\ b_r - b_0 & \text{Kreis rechts.} \end{cases}$$

Der ganze Winkel $ZKO = Z'KO + ZKZ' = z'$ wird also

$$z' = \begin{cases} \mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_l + b_0 - b_l & \text{Kreis links} \\ \mathfrak{A}_r - \mathfrak{A}_0 + b_r - b_0 & \text{„ rechts} \end{cases}.$$

Bezeichnet man nun die Zenitdistanz ZO mit z, so gibt Dreieck ZOK

$$\cos z = -\sin c \sin i + \cos c \cos i \cos z'$$
$$= -\sin c \sin i(\cos \tfrac{1}{2}z'^2 + \sin \tfrac{1}{2}z'^2) + \cos c \cos i(\cos \tfrac{1}{2}z'^2 - \sin \tfrac{1}{2}z'^2)$$
$$= \cos(c+i)\cos \tfrac{1}{2}z'^2 - \cos(c-i)\sin \tfrac{1}{2}z'^2.$$

Wird dies von $\cos z' = \cos \frac{1}{2}z'^2 - \sin \frac{1}{2}z'^2$ subtrahiert, so folgt:

$$\cos z' - \cos z = 2 \sin \tfrac{1}{2}(z+z') \sin \tfrac{1}{2}(z-z')$$
$$= 2 \cos \tfrac{1}{2}z'^2 \sin \tfrac{1}{2}(c+i)^2 - 2 \sin \tfrac{1}{2}z'^2 \sin \tfrac{1}{2}(c-i)^2.$$

Dies zeigt, daß $\frac{1}{2}(z-z')$ eine kleine Größe von der zweiten Ordnung ist, daß man also setzen darf

$$\sin \tfrac{1}{2}(z+z') = \sin z' = 2 \sin \tfrac{1}{2}z' \cos \tfrac{1}{2}z'.$$

Mithin

$$z - z' = \tfrac{1}{4}(c+i)^2 \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}z' - \tfrac{1}{4}(c-i)^2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}z'$$

und schließlich

Kreis links

$$z = \mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_l + b_0 - b_l + \tfrac{1}{4}(c+i)^2 \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}z' - \tfrac{1}{4}(c-i)^2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}z',$$

Kreis rechts

$$z = \mathfrak{A}_r - \mathfrak{A}_0 + b_r - b_0 + \tfrac{1}{4}(c'+i')^2 \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}z' - \tfrac{1}{4}(c'-i')^2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}z'.$$

Der Einfluß des Kollimationsfehlers und der Neigung i ist also von der zweiten Ordnung; man kann diese Glieder auch so schreiben

$$\tfrac{1}{2}(c^2 + i^2) \operatorname{cotg} z' + ci \operatorname{cosec} z'.$$

Sorgt man für Kleinheit von c und i und macht die Einstellungen immer genau am vertikalen Mittelfaden, wird man außer bei ganz kleinen Zenitdistanzen keinen Anlaß haben, diese Glieder zu berücksichtigen. Nimmt man das Mittel aus obigen Ansätzen und bezeichnet die Korrektionsglieder mit ε_l bzw. ε_r:

$$z = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}_r - \mathfrak{A}_l) + \tfrac{1}{2}(b_r - b_l) + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_r + \varepsilon_l),$$

so erkennt man, daß durch Einstellung in beiden Lagen die Zenitdistanz ohne Kenntnis von $\mathfrak{A}_0$ und b_0 bestimmt werden kann. Man kann die Summe $\mathfrak{A}_0 + b_0$, die allein gebraucht wird, zwar leicht ermitteln, indem die Differenz obiger Gleichungen

$$\mathfrak{A}_0 + b_0 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}_r + \mathfrak{A}_l) + \tfrac{1}{2}(b_r + b_l) + (\varepsilon_r - \varepsilon_l) = Z$$

ergibt, und man würde dann weitere Zenitdistanzen durch die Formeln:

$$\text{Kreis links } z = Z - (\mathfrak{A}_l + b_l) + \varepsilon_l$$
$$\text{„ rechts } z = (\mathfrak{A}_r + b_r) + \varepsilon_r - Z$$

mittels des „Zenitpunktes des Kreises“ Z durch eine einzige Einstellung erhalten, allein bei nicht fest aufgestellten Instrumenten wird das Verfahren, jedes Objekt in beiden Lagen einzustellen, stets vorzuziehen sein. Bei festen Instrumenten, bei denen eine Drehung um 180° nicht ausführbar ist (Meridiankreise), bestimmt man den Zenitpunkt durch Horizontalkollimatoren oder durch den Quecksilberhorizont.

Welche Rolle der Vertikalkreis im Meridian für die Bestimmung der absoluten Koordinaten spielt, ist oben bereits auseinandergesetzt. Hier ist nur hinzuzufügen, daß er in größeren Dimensionen in zwei Formen auftritt, als „Meridiankreis“, wo die Horizontalachse auf zwei festen Pfeilern ruht, und als „Vertikalkreis“, wo diese Achse auf einer drehbaren Vertikalsäule befestigt ist. Das erstere Instrument ist „umlegbar“, was, wie schon auseinandergesetzt, für die Durchgangsbeobachtungen von großer Bedeutung ist, für die Messungen am Vertikalkreis aber nur sekundären Wert hat (indem in beiden Lagen verschiedene Teilstriche des Kreises zur Verwendung kommen), das letztere ist „durchschlagbar“, was für die Messung von Zenitdistanzen wegen der Elimination des Zenitpunktes von entscheidender Wichtigkeit ist. Nur die leichte und sichere Bestimmung des Zenitpunktes beim Meridiankreis durch den Quecksilberhorizont bewirkt es, daß er mit dem anderen Instrument konkurrieren kann.

Im übrigen kommt der vertikal aufgestellte Kreis hauptsächlich bei kleinen Instrumenten vor, die zu Messungen der Geodäsie und der geographischen Ortsbestimmung dienen; gewöhnlich ist er mit dem Horizontalkreis zu einem Instrument verbunden, welches „Universalinstrument“, oder wenn es in größeren Dimensionen ausgeführt und fest aufgestellt ist, „Altazimut“ heißt.

§ 100. Messungen im Äquatorialsystem.

13. Wenn auch, wie schon hervorgehoben, direkte Koordinatenbestimmungen im System des Äquators nicht gemacht werden, so sind doch Instrumente in Gebrauch, deren Achsensystem in bezug auf den Äquator oder die Weltachse orientiert ist oder die die sogenannte „parallaktische Aufstellung“ haben. Die Kreise dienen aber dann nicht zur Messung, sondern zur Einstellung der Gestirne, die hier besonders einfach ist; und der Umstand, daß die eine Koordinate (die Deklination) bei der täglichen Drehung konstant bleibt, die andere (der Stundenwinkel) sich proportional der Zeit ändert, erlaubt die Anbringung eines die Hauptachse gleichmäßig drehenden Uhrwerkes, wodurch



das Gestirn trotz der täglichen Bewegung dauernd in Koinzidenz mit der Visierlinie gehalten werden kann. Dadurch werden Mikrometermessungen im Gesichtsfeld des Fernrohres ermöglicht, die die Koordinatenbestimmuug eines Gestirnes gestatten, wenn die Koordinaten eines benachbarten Gestirnes bekannt sind. Diese Messungen sind von der Aufstellung des Instrumentes nur in beschränktem Maße abhängig und es brauchen daher an die Feinheit und Unveränderlichkeit der Aufstellung nicht die Anforderungen gestellt zu werden, wie bei den Instrumenten zur direkten Koordinatenmessung.

Die Haupt- oder „Stundenachse“ wird zur Weltachse parallel gestellt, d. h. in den Meridian gebracht und gegen den Horizont um den Winkel $\varphi =$ der Polhöhe des Ortes geneigt; der dazu senkrechte Kreis, der „Stundenkreis“ liegt dann parallel zum Äquator und gestattet die Ablesung der Stundenwinkel, wenn diejenige Ablesung am Index bekannt ist, die dem Meridian entspricht. Senkrecht zur Stundenachse ist die zweite, die Deklinationsachse angebracht, zu der senkrecht die Visierlinie und der zweite geteilte Kreis, der Deklinationskreis, stehen. An letzterem kann also die Neigung der Visierlinie gegen den Äquator, d. h. die Deklination abgelesen werden, wenn die Ablesung des Index für die Parallellage der Visierlinie zum Äquator bekannt ist. — Der Stundenkreis trägt in der Regel schon die Zeitteilung, so daß der Stundenwinkel $t =$ Sternzeit — Rektaszension unmittelbar eingestellt werden kann. Wie beim Universalinstrument kann auch hier die Visierlinie auf zweierlei Weise auf das Objekt gebracht werden, einmal mit der Einstellung t, δ und dann mit $t + 12^h$, $180^0 - \delta$; man unterscheidet die beiden Lagen durch „Achse voran“ und „Achse folgt“.

Die strenge Theorie des parallaktisch aufgestellten Instrumentes (Äquatoreals) kann ebenso wie die des Universalinstrumentes durchgeführt werden, ist jedoch nur dann nötig, wenn das Instrument zu direkten Koordinatenmessungen gebraucht wird. Da dies kaum noch der Fall ist, wollen wir hier nur diejenigen Fehler des Instrumentes in Betracht ziehen, die für die Einstellung der Gestirne und für die Durchführung von Differentialbeobachtungen von Belang sind, d. h. die eigentlichen Aufstellungsfehler. Wir nehmen an, daß die beiden Achsen senkrecht aufeinander stehen, ebenso die

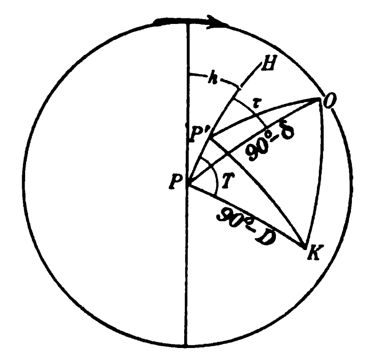


Fig. 254.

Kreise auf diesen und die Visierlinie auf der Deklinationsachse; dagegen weiche die Stundenachse von ihrer richtigen Lage ab, derart, daß der

Punkt P', in dem sie die Sphäre trifft, von dem Weltpol P um λ absteht und den Stundenwinkel h hat; die Nullpunktsfehler der beiden Kreise seien ebenfalls von Null verschieden, d. h. die Ablesungen, die der Einstellung eines im Meridian und im Äquator befindlichen Objektes entsprechen, seien nicht Null, sondern Δt bzw. $\Delta \delta$. Die Aufgabe ist, aus den Ablesungen der Kreise Stundenwinkel t und Deklination δ eines eingestellten Gestirnes abzuleiten.

Es sei K der Punkt, in dem die Kreisseite der Deklinationsachse die Sphäre trifft, wenn die Visierlinie auf das Gestirn O eingestellt ist. Nennt man T den vom größten Kreis PP' aus gezählten Stundenwinkel von K und D dessen Deklination, ferner $\mathfrak{T}_0$ die Ablesung des im Sinne der Stundenwinkel geteilten Stundenkreises, wenn K in dem größten Kreis PP' sich befindet und $\mathfrak{T}$ seine Ablesung, wenn das Objekt O eingestellt ist, dann wird der Winkel $KP'H = \mathfrak{T} - \mathfrak{T}_0$. und das Dreieck $PP'K$ gibt:

$$\cos D \sin T = \sin(\mathfrak{T} - \mathfrak{T}_0)$$
$$\sin D = -\sin\lambda \cos(\mathfrak{T} - \mathfrak{T}_0)$$

oder wenn λ eine kleine Größe ist:

$$(1) \qquad \begin{aligned} D &= -\lambda \cos(\mathfrak{T} - \mathfrak{T}_0) \\ T &= (\mathfrak{T} - \mathfrak{T}_0), \end{aligned}$$

d. h. die sphärischen Winkel um P können direkt am Stundenkreis abgelesen werden.

Ferner erhält man aus Dreieck PKO, wenn der von PP' aus gerechnete Stundenwinkel von O $HPO = \tau$ gesetzt wird:

$$\sin\delta \sin D + \cos\delta \cos D \cos \pm (T - \tau) = 0$$

oder nach Substitution von (1):

$$\cos \pm (\mathfrak{T} - \mathfrak{T}_0 - \tau) = \lambda \operatorname{tg}\delta \cos(\mathfrak{T} - \mathfrak{T}_0).$$

Daraus folgt, daß der Winkel $90^0 \pm (\mathfrak{T} - \mathfrak{T}_0 - \tau)$ klein ist; das obere Zeichen ist zu nehmen, wenn K dem Objekt in der Richtung der täglichen Drehung vorangeht (Achse voran) und das untere, wenn die Achse folgt. Also

$$\text{Achse voran:} \quad \tau = \mathfrak{T} - \mathfrak{T}_0 - 90^0 + \lambda \operatorname{tg}\delta \cos(\mathfrak{T} - \mathfrak{T}_0)$$
$$\text{„ folgt:} \quad \tau = \mathfrak{T} - \mathfrak{T}_0 + 90^0 - \lambda \operatorname{tg}\delta \cos(\mathfrak{T} - \mathfrak{T}_0).$$

Den Stundenwinkel t von O bezogen auf den Meridian erhält man hieraus, wenn man h addiert, also:

$$\text{Achse voran:}\quad t = \mathfrak{T} - \mathfrak{T}_0 - 90^0 + h + \lambda \operatorname{tg}\delta \cos(\mathfrak{T} - \mathfrak{T}_0)$$
$$\text{„ folgt:}\quad t = \mathfrak{T} - \mathfrak{T}_0 + 90^0 + h - \lambda \operatorname{tg}\delta \cos(\mathfrak{T} - \mathfrak{T}_0).$$

Im Korrektionsglied kann man für $\mathfrak{T} - \mathfrak{T}_0$ setzen

$$\text{Achse voran:}\quad \mathfrak{T} - \mathfrak{T}_0 = t + 90^0 - h = 90^0 + (t - h)$$
$$\text{„ folgt:}\quad \mathfrak{T} - \mathfrak{T}_0 = -90^0 - h + t = 90 - (t - h),$$

also schließlich:

$$(2)\quad \begin{aligned} &\text{Achse voran:}\quad t = \mathfrak{T} - \mathfrak{T}_0 - 90^0 + h - \lambda \operatorname{tg}\delta \sin(t - h)\\ &\text{„ folgt:}\quad t = \mathfrak{T} - \mathfrak{T}_0 + 90^0 + h - \lambda \operatorname{tg}\delta \sin(t - h). \end{aligned}$$

Für ein Gestirn im Meridian sei die Ablesung des Stundenkreises bei Achse voran $-\Delta t$, bei Achse folgt $180^0 - \Delta t$, dann wird dafür:

$$t = 0 = -\Delta t - \mathfrak{T}_0 - 90^0 + h + \lambda \operatorname{tg}\delta \sin h$$
$$t = 0 = +180^0 - \Delta t - \mathfrak{T}_0 + 90^0 + h + \lambda \operatorname{tg}\delta \sin h.$$

Subtrahiert man dies unter Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung von (2), so kommt

$$(3)\quad \begin{aligned} &\text{Achse voran:}\quad t = \mathfrak{T} + \Delta t - \lambda \operatorname{tg}\delta \sin(t - h)\\ &\text{„ folgt:}\quad t + 180^0 = \mathfrak{T} + \Delta t - \lambda \operatorname{tg}\delta \sin(t - h). \end{aligned}$$

Δt heißt der Indexfehler des Stundenkreises.

Um die Beziehungen zwischen den Ablesungen am Deklinationskreis und der Deklination δ der Gestirne herzustellen, beachten wir, daß der Bogen $P'O = 90^0 - \delta'$ durch den Deklinationskreis gemessen wird, da wir $KP' = KO = 90^0$ angenommen haben. Aus Dreieck $PP'O$ folgt

$$\sin\delta' = \cos\lambda \sin\delta + \sin\lambda \cos\delta \cos(t - h)$$

oder

$$\sin\delta' = \sin\delta + \lambda \cos\delta \cos(t - h)$$

oder

$$\delta = \delta' - \lambda \cos(t - h).$$

Ist $-\Delta\delta$ bzw. $180^0 - \Delta\delta$ die Ablesung des Deklinationskreises für den Äquator und $\mathfrak{D}$ jene für die Drehung δ' vom Äquator ab, so ist $\delta' = \mathfrak{D} + \Delta\delta$ bzw. $\delta' = 180^0 - \Delta\delta - \mathfrak{D}$, weil in der zweiten Lage die Teilung umgekehrt wie bei der ersten läuft. Man hat daher

$$(4)\quad \begin{aligned} &\text{Achse voran:}\quad \delta = \mathfrak{D} + \Delta\delta - \lambda \cos(t - h)\\ &\text{„ folgt:}\quad \delta = 180^0 - \Delta\delta - \mathfrak{D} - \lambda \cos(t - h). \end{aligned}$$

Um die Fehler λ, h, Δt und $\Delta\delta$ zu bestimmen, verfährt man in

folgender Weise. Man stellt zuerst ein und dasselbe Gestirn (am besten den Polarstern) rasch nacheinander in beiden Lagen ein und liest den Deklinationskreis ab: $\mathfrak{D}_v$ und $\mathfrak{D}_f$; dann gibt die Differenz der Gleichungen (4)

$$\Delta\delta = 90^0 - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{D}_v + \mathfrak{D}_f). \tag{5}$$

Um diesen Betrag korrigiert man den Index am Deklinationskreis. Hierauf stellt man zwei Sterne von bekanntem Stundenwinket t_1 und t_2 und bekannter Deklination δ_1 und δ_2 in derselben Lage ein und liest beide Kreise ab: $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$. Die Gleichungen (3) und (4) geben dann, da $\Delta\delta = 0$ ist:

$$\begin{aligned}
t_1 &= \mathfrak{T}_1 + \Delta t - \lambda \operatorname{tg}\delta_1 \sin(t_1 - h)\\
t_2 &= \mathfrak{T}_2 + \Delta t - \lambda \operatorname{tg}\delta_2 \sin(t_2 - h)\\
\delta_1 &= \mathfrak{D}_1 - \lambda \cos(t_1 - h)\\
\delta_2 &= \mathfrak{D}_2 - \lambda \cos(t_2 - h);
\end{aligned}$$

aus den beiden letzten Gleichungen findet man leicht

$$\begin{aligned}
\lambda \sin\left(\tfrac{1}{2}(t_1 + t_2) - h\right) &= \frac{(\delta_1 - \delta_2) - (\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2)}{2 \sin \frac{1}{2}(t_1 - t_2)}\\
\lambda \cos\left(\tfrac{1}{2}(t_1 + t_2) - h\right) &= \frac{(\delta_1 + \delta_2) - (\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2)}{2 \cos \frac{1}{2}(t_1 - t_2)}
\end{aligned} \tag{6}$$

und damit die Möglichkeit, λ und h zu berechnen; jede der beiden ersten Gleichungen gibt dann Δt. Nimmt man den einen Stern im Stundenwinkel nahe 90^0 und den andern im Stundenwinkel nahe -90^0, dann erhält man das sicherste Resultat.

Durch Verschiebung des Index des Stundenkreises kann man Δt zum Verschwinden bringen. Zur Beseitigung von λ und h rechnet man die rechtwinkligen Koordinaten von P' in bezug auf P

$$\xi = \lambda \cos h, \quad \eta = \lambda \sin h$$

und korrigiert dann durch die beiden Schrauben am Lager der Stundenachse.

Um ein Äquatoreal aufzustellen, bestimmt man zuerst wie oben $\Delta\delta$, stellt die Deklinationsachse horizontal und verschiebt das Instrument in horizontaler Richtung, bis ein Gestirn zur voraus berechneten Kulminationszeit in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheint. Dann steht die Stundenachse genähert im Meridian. Zur feineren Berichtigung stellt man am Deklinationskreis die Deklination eines kulminierenden Sternes ein und ändert die Neigung der Stundenachse gegen den Horizont, bis der Stern in der Mitte des Gesichtsfeldes ist. Dann

stellt man die Deklination eines Sternes ein, der eben durch den ersten Vertikal geht und korrigiert dann die Lage der Stundenachse in horizontaler Richtung, bis wieder der Stern in der Mitte des Gesichtsfeldes ist.

§ 101. Messungen an Mikrometern.

14. Zur Messung der Koordinatendifferenzen zweier benachbarter Gestirne gibt es eine große Zahl von Einrichtungen (Mikrometern), deren gemeinsames Prinzip die Ausmessung des in der Fokalebene des Fernrohres entstehenden Bildes ist. Wir wollen hier nur zwei zur Sprache bringen, das beste und meistgebrauchte, das „Fadenmikrometer", und das einfachste, das „Ringmikrometer".

Das Fadenmikrometer besteht aus zwei aufeinander senkrechten in der Fokalebene befindlichen Fadensystemen und mindestens in der einen Richtung aus einem Faden, der durch eine Schraube bewegt wird; der Betrag der Bewegung in Vielfachen und Teilen einer Schraubenumdrehung kann am Kopf der Schraube abgelesen werden. Meistens ist das ganze System noch um die Fernrohrachse drehbar und der Betrag der Drehung kann an einem geteilten Kreis, dem Positionskreis, abgelesen werden. Man kann auf dreierlei Weise verfahren, um Koordinatendifferenzen zu erhalten. Man bringt dasjenige Fadensystem, das den beweglichen Faden besitzt, parallel zum Äquator, was man leicht erreicht, indem man einen Stern den Faden entlang laufen läßt und das Mikrometer so lange um die Fernrohrachse dreht, bis der Stern den Faden nicht mehr verläßt. Das dazu senkrechte Fadensystem stellt dann Stundenkreise dar, durch welche bei festgestelltem Fernrohr die Durchgänge der beiden Gestirne beobachtet werden. Die Differenz der Durchgangszeiten ist dann unmittelbar die Rektaszensionsdifferenz. Um die Deklinationsdifferenz zu erhalten, stellt man das vorausgehende Gestirn auf einen festen Faden ein und bei unberührtem Fernrohr das folgende auf den beweglichen, und mißt mit der Schraube die Distanz von dieser letzten Stellung bis zum festen Faden. Den Wert einer Schraubenumdrehung in Bogensekunden muß man vorher durch Messung bekannter Deklinationsdifferenzen bestimmen. Dieses Verfahren ist das bequemste bei größeren Abständen der beiden Gestirne, wie sie bei Beobachtungen von Kometen, kleinen Planeten und entfernteren Satelliten auftreten. Bei sehr kleinen Distanzen, wie sie bei Doppelsternen, Planetendurchmessern, Sternhaufen u. dgl. vorkommen, würde es jedoch nicht die erforderliche Genauigkeit geben. Man mißt dann, indem man das Fernrohr durch das die Stundenachse drehende Uhrwerk mitführen läßt, nach einer ersten Methode, die beiden Koordinaten direkt mit der Schraube, indem man

den beweglichen Faden zuerst in die Richtung des Parallels stellt und dann um 90° dreht; die in der letzteren Stellung gemessene Differenz ist dann gleich der Rektaszensionsdifferenz, multipliziert mit dem Kosinus der Deklination. Noch gebräuchlicher ist die zweite Methode, bei welcher der bewegliche Faden senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Gestirne gebracht wird, worauf deren direkte Distanz gemessen werden kann; gleichzeitig bestimmt man mittels des Positionskreises den Winkel der genannten Verbindungslinie mit dem Stundenkreis, den sogenannten Positionswinkel, was leicht geschehen kann, da man die Ablesung des Positionskreises für die Lage des beweglichen Fadens im Stundenkreis durch Bestimmung des Parallels leicht ermitteln kann. Der Positionswinkel wird von Nord über Ost, Süd, West von 0° bis 360° gezählt. Die Umwandlung von Positionswinkel und Distanz in Rektaszensions- und Deklinationsdifferenzen geschieht auf folgende Weise. Es seien (Fig. 255) P der Pol, O_1 und O_2 die beiden Gestirne mit den Koordinaten $\alpha_1 \delta_1$, $\alpha_2 \delta_2$. Nennt man $\varDelta$ den Bogen größten Kreises $O_1 O_2$, p_1 den Positionswinkel $P O_1 O_2$ von O_2 in bezug auf O_1 und p_2 den Positionswinkel von O_1 in bezug auf O_2, dann geben die Gaußschen Formeln für das Dreieck $P O_1 O_2$

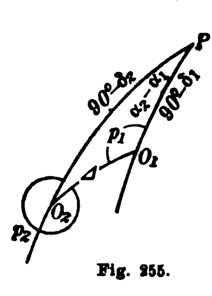


Fig. 255.

$$\sin \tfrac{1}{2} \varDelta \sin \tfrac{1}{2} (p_1 + p_2) = \cos \tfrac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) \sin \tfrac{1}{2} (\delta_2 - \delta_1)$$
$$- \sin \tfrac{1}{2} \varDelta \cos \tfrac{1}{2} (p_1 + p_2) = \sin \tfrac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) \cos \tfrac{1}{2} (\delta_2 + \delta_1)$$

oder für kleinere Distanzen, wo man auch $p_2 = 180^0 + p_1$ setzen kann:

$$(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \tfrac{1}{2} (\delta_2 + \delta_1) = \varDelta \sin p_1$$
$$\delta_2 - \delta_1 = \varDelta \cos p_1 .$$

In Fällen, wo es auf die absoluten Koordinaten des zweiten Gestirnes nicht ankommt, sondern nur auf die relativen zum ersten, wie bei Doppelsternen u. dgl., behält man die Polarkoordinaten Distanz und Positionswinkel bei.

15. Das Ringmikrometer besteht aus einem oder mehreren in die Fokalebene gebrachten Metallringen, an deren Rändern die Durchgänge der beiden Gestirne bei ruhendem Fernrohr beobachtet werden; es sind also nur größere Koordinatendifferenzen damit meßbar. Aus den Ein- und Austrittszeiten $t_1 t_1' t_2 t_2'$ der beiden Gestirne lassen sich deren Koordinatendifferenzen in folgender Weise ableiten. Denkt man sich durch den Mittelpunkt des Ringes den Stundenkreis gelegt, so erhält man als Durchgangszeiten durch ihn unmittelbar $\frac{1}{2}(t_1 + t_1')$ für

das eine und $\frac{1}{2}(t_2 + t_2')$ für das andere Gestirn und die Rektaszensionsdifferenz wird daher

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \tfrac{1}{2}(t_2 + t_2') - \tfrac{1}{2}(t_1 + t_1').$$

Ferner erhält man für die halben Sehnen, die von den Gestirnen beschrieben werden, in Bogensekunden verwandelt:

$$\mu_1 = \tfrac{15}{2}(t_1' - t_1)\cos\delta_1$$
$$\mu_2 = \tfrac{15}{2}(t_2' - t_2)\cos\delta_2 .$$

Ist R der Halbmesser des Ringes und D die Deklination seines Mittelpunktes, so wird

$$R\sin\psi_1 = \mu_1 \qquad R\sin\psi_2 = \mu_2$$
$$R\cos\psi_1 = \delta_1 - D \qquad R\cos\psi_2 = \delta_2 - D$$

und daher

$$\delta_2 - \delta_1 = R(\cos\psi_2 - \cos\psi_1).$$

Fig. 256.

Diese Formel gilt, wenn beide Durchgänge auf derselben Seite vom Mittelpunkte aus gerechnet stattfinden. Finden sie auf entgegengesetzten Seiten statt, so kommt:

$$\delta_2 - \delta_1 = R(\cos\psi_2 + \cos\psi_1).$$

Die Durchgänge zur Ermittlung der Rektaszensionsdifferenzen muß man möglichst durch die Mitte des Ringes wählen, die zur Bestimmung der Deklinationsdifferenzen möglichst weit von dieser entfernt. Der Ringhalbmesser wird aus Durchgängen von Gestirnen mit bekannter Deklinationsdifferenz bestimmt, wozu sich am besten die Plejaden eignen, da sich unter ihnen für jeden Halbmesser passende Objekte befinden.

§ 102. Messungen mit dem Spiegelsextanten.

16. Zur Bestimmung der geographischen Koordinaten eines Ortes aus den astronomischen der Gestirne auf dem Schiff und dem Luftschiff bedarf man behufs Winkelmessung eines Instrumentes, das keine feste Aufstellung verlangt. Das ist wohl nur dadurch zu erreichen, daß die Bilder der beiden Objekte, deren Winkelentfernung gemessen werden soll, durch drehbare reflektierende Spiegel oder Prismen im Fernrohr zur Koinzidenz gebracht werden. In der Tat beruhen hierauf alle diese sogenannten Spiegelinstrumente, sofern an deren Genauigkeit einigermaßen größere Ansprüche gestellt werden. Wir wollen davon das älteste und noch immer am meisten gebrauchte, den New-

tonschen Spiegelsextanten, in Kürze beschreiben, ohne auf eine Fehlertheorie einzugehen, die hier auch nur eine geringe Rolle spielt. Der Spiegelsextant besteht aus einem geteilten Kreissektor, der mit der Hand in jede Winkelebene gebracht werden kann. Um dessen Mittelpunkt ist eine Alhidade drehbar, die am einen Ende den Ableseindex J, am anderen senkrecht zur Sektorebene und durch seinen Mittelpunkt gehend den „großen Spiegel" B trägt, der also dieselbe Drehung wie die Alhidade ausführt. An einem festen Radius des Sektors ist der „kleine Spiegel" A befestigt, ebenfalls senkrecht zur Sektorebene und derartig, daß seine Ebene parallel ist zur Alhidade also auch zu der des großen Spiegels, wenn diese durch den Nullpunkt der Kreisteilung O geht. Seiner spiegelnden Fläche gegenüber ist ebenfalls an einem festen Radius das Fernrohr parallel zur Sektorebene fest angebracht. Die Beobachtungsweise ist nun folgende. Die Sextantenebene wird in die Winkelebene der beiden Objekte O_1 und O_2 gebracht und das eine Objekt O_1 wird mit dem Fernrohr über den kleinen Spiegel hinweg direkt anvisiert, dann die Alhidade derart gedreht, daß das andere Objekt O_2 nach Reflexion an beiden Spiegeln ebenfalls im Fernrohr gesehen wird und mit dem Bild des ersten zur Koinzidenz gebracht werden kann. Die Ablesung γ der Alhidade, die nach dem vorher Gesagten identisch ist mit dem von den beiden Spiegeln gebildeten Winkel, läßt dann sofort den Winkel δ zwischen beiden Objekten ermitteln; in der Tat ist, wenn man die Winkel, unter denen der von O_2 kommende und ins Fernrohr gelangende Strahl auf die beiden Spiegel auffällt, mit β und α bezeichnet, im Dreieck ABC

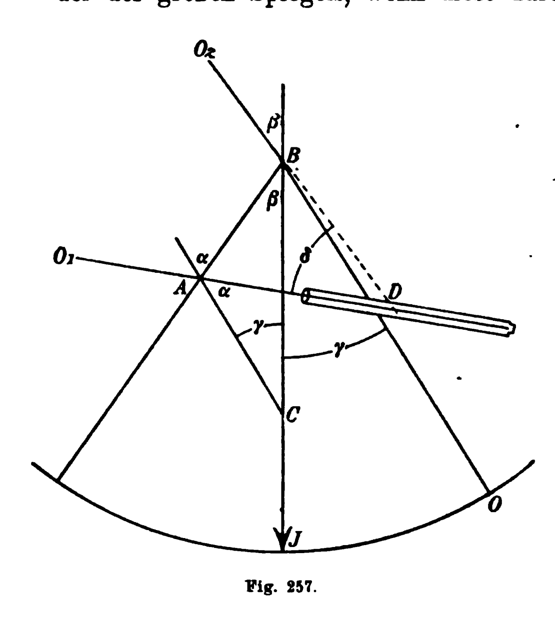


Fig. 257.

$$\alpha = \beta + \gamma$$

und im Dreieck ABD

$$\delta + 2\beta - 2\alpha = 0,$$

also:

$$\delta = 2(\alpha - \beta) = 2\gamma.$$

Wird die Teilung also mit dem doppelten Betrag beziffert, so kann δ unmittelbar darauf abgelesen werden.

Die Hauptbedingung ist, daß der Index die Ablesung Null ergibt, wenn die beiden Spiegel parallel stehen. Dies läßt sich leicht feststellen, wenn man ein direkt anvisiertes Objekt, etwa die Sonne, mit seinem doppelt reflektiertem Bild zur Deckung bringt; es muß dann $\beta = \alpha$, also $\delta = 0$ sein. Die Abweichung, Indexfehler genannt, läßt sich leicht wegschaffen oder in Rechnung stellen. Im übrigen ist nur dafür zu sorgen, daß die Spiegel senkrecht auf der Sektorebene stehen und daß das Fernrohr parallel dazu liege.

Der Winkel β muß mindestens 15^{0} betragen, da sonst das doppelt reflektierte Bild zu undeutlich wird; ebenso kann der konstante Winkel α nicht wohl größer als 75^{0} gewählt werden, da man mit dem Fernrohr nicht näher an den großen Spiegel herankommen kann. Der größte Winkel, der mit dem Sextanten gemessen werden kann, ist also rund:

$$\delta = 2(\alpha - \beta) = 120^{0}.$$

Die Hauptverwendung des Sextanten besteht in der Messung der Höhen der Gestirne. Auf dem Meere hat man hierzu die natürliche Kimmlinie zur Verfügung, die direkt anvisiert wird, während durch die Drehung der Alhidade das Bild des Gestirnes mit ihr in Berührung gebracht wird. Auf dem Lande muß man sich eines künstlichen Horizontes bedienen: eine horizontal gestellte ebene Glasplatte oder eine Schale mit Quecksilber reflektieren ein Bild des Gestirnes, das direkt anvisiert wird, während das Gestirn selbst wieder durch die Drehung der Alhidade in das Fernrohr gebracht wird. Der dann gemessene Winkel ist offenbar die doppelte Höhe. Im Luftschiff versagen beide Methoden; man bedient sich dann zur Messung von Gestirnshöhen eines anderen, allerdings wesentlich ungenaueren Spiegelinstrumentes, des Libellenquadranten. Bei diesem wird das Gestirn direkt anvisiert und die Horizontallage der Nullpunktsrichtung durch eine Libelle angezeigt, deren Blase durch einen Spiegel ins Fernrohr reflektiert wird; das Bild der Blase und des Gestirnes sind dann zur Deckung zu bringen.

Fünfzehnter Abschnitt.

Geographische Ortsbestimmung.

§ 103. Zeit und Breite durch Messung von Zenitdistanzen.

1. Die Darlegungen des vorausgehenden Abschnittes haben gezeigt, in welcher Weise die Koordinaten der Gestirne durch geeignete Instrumente und Beobachtungsmethoden gewonnen werden. Dabei ist die Abhängigkeit der Messungen von den Koordinaten des Beobachtungsortes hervorgetreten und es war zu zeigen, wie durch absolute Methoden die Zeit und die Polhöhe oder geographische Breite bestimmt werden können. Die Methoden erwiesen sich als solche, daß sie nur durch länger dauernde Beobachtungen mit fest aufgestellten Instrumenten auf Sternwarten zum Ziel führen konnten. Ganz anders stellt sich nun das Problem der Zeit- und Breitenbestimmung, wenn man die Koordinaten einer Reihe von Gestirnen als bekannt voraussetzen kann; dann kann man rasch fördernde und einfache Instrumente voraussetzende Methoden entwickeln, wie sie die Praxis der Nautik, der Aeronautik und der Landreisen braucht.

Der Beobachtungsort ist offenbar durch die Lage seines Zenits an der Himmelssphäre bestimmt; gelingt es also, dieses durch Beobachtung eines Gestirnes mit bekannten Äquatorealkoordinaten in Beziehung zum Himmelspol zu setzen, so ist die Aufgabe gelöst. Daraus geht hervor, daß das sphärische Dreieck Pol, Zenit, Gestirn das Fundament für alle Methoden der geographischen Ortsbestimmung bildet. Wir wollen im folgenden die gebräuchlichsten dieser Methoden auseinandersetzen und dabei die Einteilung nach der Art der Beobachtung machen, d. h. je nachdem die Messungen von Zenitdistanzen, von Azimuten oder von Durchgängen herangezogen werden. Eine besondere Besprechung erfordern die Methoden, welche die Vergleichung der Zeiten zweier Orte ermöglichen oder die eigentlichen Längenbestimmungsmethoden.

2. Wird von dem Gestirn O, dessen Rektaszension α und Deklination δ gegeben sind, zur Sternzeit Θ die Zenitdistanz z (korrigiert

für Refraktion) an einem Ort mit der Breite φ gemessen und dabei die Uhrzeit U abgelesen, so kann man durch Auflösung des Dreiecks ZPO den Stand der Uhr oder die Breite φ bestimmen. Die Gleichungen (10) (S. 476) müssen hierzu nur auf eine gebrauchsfähigere Form übergeführt werden. Um zunächst bei bekannter Breite die Zeit zu bestimmen, löst man die Gleichung

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos(\Theta - \alpha)$$

nach $\Theta - \alpha$ auf:

$$\cos(\Theta - \alpha) = \frac{\cos z - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}.$$

Fig. 258.

Durch Bildung von $1 + \cos(\Theta - \alpha)$ und $1 - \cos(\Theta - \alpha)$ und Division der beiden Ausdrücke wird daraus:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\Theta - \alpha)^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(z + \varphi - \delta) \sin\frac{1}{2}(z - \varphi + \delta)}{\cos\frac{1}{2}(z + \varphi + \delta) \cos\frac{1}{2}(z - \varphi - \delta)}$$

oder, wenn

$$S = \tfrac{1}{2}(z + \varphi + \delta)$$

gesetzt wird:

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\Theta - \alpha)^2 = \frac{\sin(S - \varphi)\sin(S - \delta)}{\cos S \cos(S - z)}.$$

Hieraus folgt die Sternzeit Θ für den Moment der Beobachtung und durch

$$\Delta U = \Theta - U$$

die Korrektion der Uhr. Wenn die Sonne beobachtet wurde, dann ist $\Theta - \alpha$ der Stundenwinkel der wahren Sonne, also die wahre Sonnenzeit. Verwandelt man diese durch Addition der „Zeitgleichung“ in mittlere Sonnenzeit, so erhält man, falls die Beobachtung mit einer nach mittlerer Zeit gehenden Uhr geschah, unmittelbar die Korrektion dieser letzteren.

Um die Breite φ zu bestimmen, wenn die Zeit bekannt ist, bedient man sich der Seite 477 eingeführten Umwandlung obiger Gleichung für $\cos z$:

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} \cos k \sin K &= \cos\delta \cos(\Theta - \alpha) \\ \cos k \cos K &= \sin\delta \qquad\qquad -90^\circ < k < +90^\circ. \\ \sin k &= \cos\delta \sin(\Theta - \alpha) \end{aligned}$$

$$\cos z = \cos k \sin(K + \varphi),$$

woraus

$$\sin(K + \varphi) = \cos z \sec k.$$

Zur Entscheidung, in welchem Quadranten $K + \varphi$ zu nehmen ist, beachtet man, daß aus dem rechtwinkligen Dreieck ZOQ

$$\cos z \sec k = \cos ZQ$$

folgt, daß also

$$90^0 - (K + \varphi) = \pm ZQ$$

ist. Nun zeigt die Figur unmittelbar, daß das obere Zeichen zu nehmen ist, wenn Q von Z aus gerechnet auf der Nordseite des Meridians liegt und das untere, wenn es auf der Südseite liegt. Im ersten Falle hat man also $K + \varphi$ im ersten Quadranten zu nehmen und im letzteren im zweiten.

Ist die Zenitdistanz z_m im Meridian gemessen, so wird $k = 0$, $K = 90^0 - \delta$ und daher

$$\sin (90^0 - \delta + \varphi) = \cos z$$

oder

$$\varphi = \delta \mp z_m,$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem das Gestirn nördlich oder südlich vom Zenit kulminiert.

Es ist für die Bestimmung der Zeit oder der Breite offenbar nicht gleichgültig, in welchem Teil seiner scheinbaren Bahn die Zenitdistanz des Gestirnes gemessen wird. Die Differentiation der Hauptformel gibt hierüber Aufschluß; setzt man α und δ konstant, so folgt nach Einführung des Azimutes a:

$$d(\Theta - \alpha) = \frac{dz}{\cos \varphi \sin a} - \frac{d\varphi}{\cos \varphi \operatorname{tg} a}$$

oder

$$d\varphi = \frac{dz}{\cos a} - \cos \varphi \operatorname{tg} a \, d(\Theta - \alpha).$$

Die erste Formel zeigt, daß ein Fehler in der Messung von z den geringsten Einfluß auf die Bestimmung von Θ und damit der Zeit hat, wenn $\sin a$ möglichst groß, also $a = \pm 90^0$ ist; gleichzeitig wird dann auch ein Fehler in der Kenntnis der Breite gänzlich unschädlich gemacht. Die zweite Formel zeigt, daß ein Fehler in der Messung von z den geringsten Einfluß auf die Bestimmung von φ hat, wenn $\cos a$ möglichst groß, also $a = 0^0$ oder 180^0 ist, womit gleichzeitig ein Fehler in der Kenntnis der Zeit unschädlich gemacht wird. Wir haben also die fundamentale Regel:

Zur Bestimmung der Zeit muß man Zenitdistanzen möglichst in der Nähe des ersten Vertikales und zur Bestimmung der Breite in der Nähe des Meridians messen.

Die gegebenen allgemeinen Methoden sind einiger Spezialisierungen fähig, die in Kürze angegeben seien.

3. Zeitbestimmung durch korrespondierende Höhen. Beobachtet man die Uhrzeiten U und U', in denen ein Gestirn von der Rektaszension α östlich und westlich vom Meridian *dieselbe Höhe* hat, so ist $\frac{1}{2}(U + U')$ die Zeit des Meridiandurchganges und daher

$$\varDelta U = \alpha - \tfrac{1}{2}(U + U')$$

die Uhrkorrektion. Man braucht die Höhe gar nicht zu kennen, aber man muß, wenn das Gestirn bewegt ist (wie z. B. die Sonne, die hier am häufigsten angewendet wird), dieser Bewegung Rechnung tragen (Mittagsverbesserung). Natürlich erhält man auch hier die besten Resultate, wenn die Beobachtungen im östlichen und westlichen Zweig des ersten Vertikales ausgeführt werden, da dann die Durchgangszeiten durch den Horizontalfaden am sichersten beobachtet werden können.

4. Breitenbestimmung durch Zirkummeridian-Zenitdistanzen. Da sich die Zenitdistanz eines Gestirnes in der Nähe des Meridians, wo sie ein Minimum erreicht, nur wenig ändert, kann man durch Hinzufügung einer kleinen Korrektion daraus die Zenitdistanz z_m im Meridian ableiten, mittels welcher sich dann $\varphi = \delta \pm z_m$ ergibt. Schreibt man die Hauptgleichung in der Form:

$$\cos z = \cos\left[\pm(\varphi - \delta)\right] - 2\cos\varphi\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}(\Theta - \alpha)^2,$$

so ist das zweite Glied in der Nähe des Meridianes sehr klein; man kann also die bekannte Formel anwenden:

$$\cos y = \cos x + \beta,$$

$$y = x - \frac{\beta}{\sin x} - \frac{1}{2}\operatorname{cotg} x\left(\frac{\beta}{\sin x}\right)^2 - \cdots$$

Diese gibt hier:

$$\varphi = \delta + z - b\; 2\sin\tfrac{1}{2}(\Theta - \alpha)^2 + b^2\operatorname{cotg}(\varphi - \delta)\, 2\sin\tfrac{1}{2}(\Theta - \alpha)^4 \text{ Südseite,}$$

$$\varphi = \delta - z + b'\, 2\sin\tfrac{1}{2}(\Theta - \alpha)^2 - b'^2\operatorname{cotg}(\delta - \varphi)\, 2\sin\tfrac{1}{2}(\Theta - \alpha)^4 \text{ Nordseite,}$$

wo gesetzt ist

$$b = \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)}, \qquad b' = \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\delta - \varphi)}.$$

In den Korrektionsgliedern wird mit einem Näherungswert von φ gerechnet, für die Faktoren $2\sin\frac{1}{2}(\Theta - \alpha)^2$ und $2\sin\frac{1}{2}(\Theta - \alpha)^4$ hat man ausführliche Tafeln.

Am meisten eignet sich für Breitenbestimmungen der **Polarstern**, der die günstige Bedingung eines in der Nähe von 180° liegenden Azimuts stets darbietet. Die bei genaueren Beobachtungen anzuwen-



denden Formeln ergeben sich unmittelbar aus dem vorigen. In der Nautik und Aeronautik, wo man sich mit einer Genauigkeit von 1′ und mehr begnügen kann, wird man ein anderes Verfahren einschlagen, das durch Hilfstafeln rasch zum Ziel führt. Ist h die zur Sternzeit Θ, also im Stundenwinkel $\Theta - \alpha$ gemessene Höhe des Polarsterns, p seine Poldistanz, so erhält man durch Entwicklung nach Potenzen von p leicht:

$$\varphi = h - p\cos(\Theta - \alpha) + \tfrac{1}{2}p^2 \sin(\Theta - \alpha)^2 \operatorname{tg} h + \cdots$$

oder wenn man $p = p_0 + \Delta p$ setzt:

$$\varphi = h - p_0 \cos(\Theta - \alpha) + \tfrac{1}{2}p_0^2 \sin(\Theta - \alpha)^2 \operatorname{tg} h - \Delta p \cos(\Theta - \alpha).$$

Hier lassen sich nun die einzelnen Glieder leicht in Tafeln bringen, die in den nautischen Jahrbüchern mitgeteilt werden.

5. Das Zweihöhenproblem und seine Spezialfälle. Die vorhergehenden Entwicklungen zeigen, daß man durch Messung einer Höhe entweder die Zeit oder die Breite finden kann, wenn die andere Koordinate genähert bekannt ist. Durch Messung von zwei Höhen zu gleichen oder verschiedenen Zeiten von demselben oder von zwei verschiedenen Gestirnen kann man beide Koordinaten nahezu gleichzeitig erhalten. Auf der Lösung dieser Aufgabe basieren verschiedene in der Nautik vielfach angewandte Methoden, von denen wir einige an die Besprechung der allgemeinen Methode anschließen wollen.

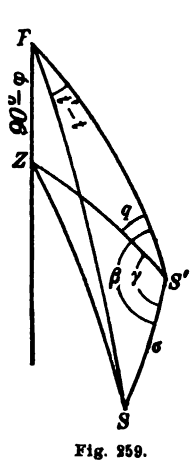


Fig. 259.

Sind die Höhen h und h' der beiden Gestirne S und S' mit den Koordinaten $\alpha\delta$ und $\alpha'\delta'$ zur den Uhrzeiten U und U' (Sternzeit) beobachtet, so kann man zunächst ohne Kenntnis der Uhrkorrektion die Differenz der Stundenwinkel angeben:

$$t' - t = (U' - U) - (\alpha' - \alpha)$$

und dann aus dem Dreieck PSS' die Seite $SS' = \sigma$ und den Winkel $PS'S = \beta$; ferner gibt dann Dreieck ZSS' den Winkel $ZS'S = \gamma$, so daß der parallaktische Winkel von S', nämlich $PS'Z = q = \beta - \gamma$ bekannt wird; endlich löst man das Dreieck PZS' auf und erhält daraus φ und t' und damit in $t' + \alpha'$ die Sternzeit Θ', deren Differenz mit der Uhrzeit U' die Uhrkorrektion gibt: $\Delta U = \Theta' - U'$. Wir verzichten auf die Angabe der leicht hinzuschreibenden Formeln und behandeln gleich den Spezialfall, wo die beiden Höhen von demselben Gestirn zu verschiedenen Zeiten gemessen werden; die strenge Lösung

macht auch hier keine Schwierigkeit, von praktischer Bedeutung für die Nautik ist nur die genäherte, die unter dem Namen der „Douwesschen Methode der doppelten Höhen“ bekannt ist (nach dem holländischen Admiralitätsmathematiker *Douwes*, gest. 1773). Die Differenz $t' - t$ der Stundenwinkel ist hier unmittelbar durch die Differenz der Uhrzeiten gegeben, so daß $t' = t + (U' - U) = t + \lambda$ wird. Aus den beiden Gleichungen

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$
$$\sin h' = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos(t + \lambda)$$

folgt dann durch Subtraktion

$$\sin(t + \tfrac{1}{2}\lambda) = \frac{\cos\frac{1}{2}(h + h') \sin\frac{1}{2}(h - h')}{\cos\varphi \cos\delta \sin\frac{1}{2}\lambda}.$$

Diese Formel, die mit einem genäherten Wert von φ auszurechnen ist, gibt t, dann die Sternzeit $\Theta = t + \alpha$ und endlich die Uhrkorrektion $\Delta U = \Theta - U$. Um die Breite zu bestimmen, schreibt man die erste obiger Formeln so:

$$\cos(\varphi - \delta) = \sin h + 2 \cos\varphi \cos\delta \sin\tfrac{1}{2}t^2,$$

wo wieder das in der Regel kleine zweite Glied mit einem genäherten φ zu berechnen ist. Hat man die erste Höhe h ganz in der Nähe des Meridians beobachtet, so kann man statt der letzten Formel eine bequemere gebrauchen. Nennt man die Meridianhöhe des Gestirnes: $H = 90^0 - (\varphi - \delta)$, so wird

$$\sin H - \sin h = 2 \cos\varphi \cos\delta \sin\tfrac{1}{2}t^2$$

oder

$$\sin\tfrac{1}{2}(H - h) = \frac{\cos\varphi \cos\delta \sin\frac{1}{2}t^2}{\cos\frac{1}{2}(H + h)}.$$

Man kann also bei kleinem Stundenwinkel ($t < 40^m$) die Korrektion $\Delta h = H - h$ aus

$$\Delta h = \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\cos\frac{1}{2}(H + h)} \cdot \frac{2 \sin\frac{1}{2}t^2}{\sin 1''}$$

berechnen und hat dann

$$H = h + \Delta h \quad \text{und} \quad \varphi = 90^0 - H + \delta = 90^0 - h - \Delta h + \delta.$$

Den Faktor $\frac{2 \sin\frac{1}{2}t^2}{\sin 1''}$ entnimmt man aus einer Hilfstafel.

6. Die Methode der Sumnerschen Standlinien ist eine jetzt in der Nautik und Aeronautik fast ausschließlich verwendete graphische Methode der Ortsbestimmung, die ebenfalls auf der Mes-



sung von zwei Höhen beruht und daher an dieser Stelle zur Besprechung kommen muß.

Ein Gestirn mit den Äquatorkoordinaten α und δ steht im Zenit eines Ortes Z, dessen Breite δ und dessen Ortssternzeit α ist. Wird mit Θ_G die gleichzeitige Greenwicher Sternzeit bezeichnet und ist λ die Längendifferenz des Ortes gegen Greenwich (nach Westen zu positiv gerechnet), so entspricht der Ortszeit α die Greenwicher Zeit $\Theta_G = \lambda + \alpha$ und es ist also $\lambda = \Theta_G - \alpha$. Wir haben also das Resultat:

> Ein zur Zeit Θ_G beobachtetes Gestirn (α, δ) steht im Zenit eines Ortes, dessen Länge $\Theta_G - \alpha$ und dessen Breite δ ist.

Schlägt man um diesen Ort mit dem Radius z auf der Erdkugel einen Kreis, so wird für jeden Punkt dieses Kreises zur selben Zeit Θ_G das Gestirn die Zenitdistanz z haben oder umgekehrt:

> „Der geometrische Ort aller Punkte der Erdoberfläche, die ein Gestirn $(\alpha\delta)$ zur Zeit Θ_G in der Zenitdistanz z sehen, ist ein Kreis, der aus dem Mittelpunkt mit den Koordinaten $\Theta_G - \alpha$, δ mit dem Radius z geschlagen wird; dieser Kreis wird Sumnerkreis oder Höhengleiche genannt."

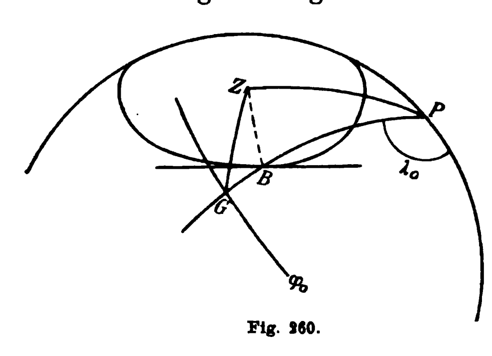


Fig. 260.

Der nach einem Punkt B dieses Kreises gezogene Radius bildet in B mit dem Meridian PB von B einen Winkel, der offenbar gleich ist dem Azimut des Gestirnes in B. Da dieser Winkel gleich ist dem Winkel, welchen die Tangente in B an den Sumnerkreis mit dem Parallel von B bildet, so hat man weiter:

> „Der Sumnerkreis schneidet den Parallel jedes seiner Punkte in Winkeln, welche gleich den Azimuten des Gestirnes in diesen Punkten sind. Diese Azimute (vom Nordmeridian aus gerechnet) können durch
>
> $$\sin a = -\sin t \cos \delta \operatorname{cosec} z$$
>
> berechnet werden."

Der Sumnerkreis schneidet einen bestimmten Parallelkreis φ_0 in der Länge λ_0 westlich von Greenwich, die sich leicht berechnen läßt. Da auf dem Sumnerkreis das Gestirn die Zenitdistanz z hat, so folgt sein Stundenwinkel t in der Breite φ_0 aus der Formel (I) (S. 603)

$$\text{(A)} \qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} t^2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(z - \delta + \varphi_0) \sin \frac{1}{2}(z + \delta - \varphi_0)}{\cos \frac{1}{2}(z + \delta + \varphi_0) \cos \frac{1}{2}(z - \delta - \varphi_0)}$$

oder meist ebenso gut aus

$$\sin \tfrac{1}{2} t^2 = \sin \tfrac{1}{2}(z + \varphi_0 - \delta) \sin \tfrac{1}{2}(z - \varphi_0 + \delta) \sec \varphi_0 \sec \delta$$

und die Ortssternzeit wird daher bekannt: $t + \alpha$; die durch das Schiffschronometer angegebene Greenwicher Zeit Θ_G für den Moment der Beobachtung ist ebenfalls bekannt und es folgt daher: $\lambda_0 = \Theta_G - (t + \alpha)$.

Man kann auch die Breite φ_0 berechnen, in der ein bestimmter Längenkreis λ_0 der Schiffskarte vom Sumnerkreis geschnitten wird; denn durch

$$t = \Theta_G - \alpha - \lambda_0$$

ist der Stundenwinkel gegeben, worauf durch die Formeln (II) (S. 603) die Breite φ_0 folgt:

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{tg} K &= \operatorname{cotg} \delta \cos t & K &< 180^\circ \\ \sin k &= \cos \delta \sin t & -90^\circ &< k < +90^\circ \\ \sin(K + \varphi) &= \sec k \cos z. \end{aligned}$$

Dies vorausgesetzt nehmen wir an, man habe gleichzeitig zur Greenwicher Zeit Θ_G die Zenitdistanzen zweier Gestirne in einem Orte B gemessen. Konstruiert man dann die beiden Sumnerkreise, so muß B auf beiden liegen, also einer der beiden Schnittpunkte derselben sein; welcher zu nehmen ist, ist jeweils leicht zu entscheiden, da ein Schiff über seine Breite niemals stark in Zweifel sein kann. Damit sich B als möglichst scharfer Schnitt ergebe, muß man offenbar Gestirne wählen, deren Azimute nahe 90° voneinander verschieden sind.

In der praktischen Ausführung der Methode kann man sich keines Globus bedienen, sondern man muß die gewöhnlichen Schiffskarten heranziehen, die bekanntlich eine winkeltreue Abbildung der Erdoberfläche in der sogenannten Mercators Projektion geben. Auf diesen werden die Sumnerkreise komplizierte Kurven, die man punktweise konstruieren muß. Da man über die ungefähre Lage des Schiffsortes immer hinreichend informiert ist, genügt die Konstruktion einiger weniger Punkte in der Nähe des mutmaßlichen Schiffsortes, die man durch Gerade verbinden kann: die Sumnerschen Standlinien, deren Schnitt den Schiffsort ergibt.

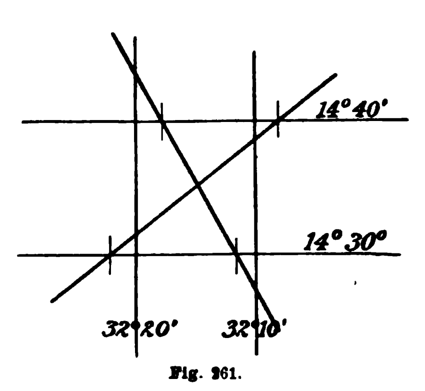


Fig. 261.

So sind in Fig. 261 die beiden Standlinien durch ihre Schnittpunkte mit den Parallelen 14° 30′ und 14° 40′, d. h. durch Errechnung der Längen nach (A) bestimmt.

Man kann die Standlinie auch durch Berechnung eines Punktes und durch Berechnung ihrer Richtung, d. h. durch Bestimmung des Azimutes nach der oben bereits gegebenen Formel bestimmen.

Wird die Breite oder die Länge als bekannt angenommen, so genügt zur Bestimmung des Schiffsortes eine Standlinie, indem dieser durch den Schnitt der Standlinie mit dem Parallel bzw. Meridian gegeben ist.

Ist ein genäherter (gegißter) Schiffsort G (Fig. 260) vorhanden und eine Standlinie konstruiert, so ist der wahrscheinlichste Schiffsort der Fußpunkt des vom gegißten Ort auf die Standlinie gefällten Lotes.

Die Länge dieses Lotes kann man rechnen; denn es ist offenbar gleich der Differenz aus der für den gegißten Ort G berechneten Zenitdistanz des Gestirnes und der beobachteten. Die gerechnete z_0 aber ergibt sich aus dem Dreieck Pol, Gestirn, Zenit (gegißter Ort), in welchem die Deklination, die Breite φ_0 des gegißten Ortes und der Stundenwinkel $t_0 = \Theta_G - \lambda_0 - \alpha$ bekannt sind:

$$\cos z_0 = \cos(\varphi_0 - \delta) - 2 \cos\varphi_0 \cos\delta \sin\tfrac{1}{2}t_0^2.$$

Man kann diese Formel, wie schon früher gezeigt, bequemer einrichten; eine andere Art der Rechnung ist folgende. Bestimmt man den Hilfswinkel w durch den Ansatz:

$$\cos\varphi_0 \cos\delta \sin\tfrac{1}{2}t_0^2 = \cos(\varphi_0 - \delta) \sin\tfrac{1}{2}w^2,$$

so wird:

$$\cos z_0 = \cos(\varphi_0 - \delta) \cos w,$$

wobei

$$\sin\tfrac{1}{2}w^2 = \cos\varphi_0 \cos\delta \sec(\varphi_0 - \delta) \sin\tfrac{1}{2}t_0^2.$$

Mit $z_0 - z$ ist die Entfernung der Standlinie und damit des wahrscheinlichsten Schiffsortes vom gegißten Ort gefunden. Da die Richtung von $z_0 - z$ gegen den Meridian durch das Azimut a_0 gegeben ist, dieses aber aus

$$\sin a_0 = -\sin t_0 \cos\delta \operatorname{cosec} z_0$$

gefunden werden kann, so kann man den wahrscheinlichsten Schiffsort sofort angeben (Höhenmethode von St. Hilaire). Das im Endpunkt von $z_0 - z$ gezogene Lot ist die Standlinie, die also auch durch diese dritte Methode bestimmt werden kann.

7. **Bestimmung der Breite durch die Horrebow-Talcott-Methode.** Diese Methode unterscheidet sich von den bisher besprochenen durch die Anwendung der mikrometrischen Messung. Es wird nämlich dabei die Differenz der Meridian-Zenitdistanzen zweier Sterne gemessen, die in nahezu gleichen Zenitdistanzen, der eine nördlich, der andere südlich vom Zenit kulminieren. Die Teilung des Kreises, die Biegung des Fernrohrs und die Refraktion werden also völlig eliminiert, dagegegen wird eine gute Schraube und eine sicher funktionierende Libelle vorausgesetzt. Diese letztere ist parallel zur Visierebene auf die Horizontalachse derart aufgesetzt, daß sie um diese gedreht und in jeder Stellung mit ihr in feste Verbindung gebracht werden kann.

Der durch die Schraube bewegte Horizontalfaden wird auf den zuerst kulminierenden Stern eingestellt, die Schraubentrommel abgelesen und die Libelle zum Einspielen gebracht. Wird dann das Instrument um die Vertikalachse um 180° gedreht, so wird bei unberührter Visierlinie das einige Minuten später und auf der anderen Seite des Zenits kulminierende zweite Gestirn im Gesichtsfeld erscheinen und der bewegliche Faden kann darauf eingestellt werden. Die Differenz der Trommelablesung mit der vorigen gibt die Differenz der Zenitdistanzen vorausgesetzt, daß die Visierlinie ihre Neigung gegen den Horizont nicht geändert hat, was durch die Libelle kontrolliert wird. Kleine Änderungen der Libelle können natürlich durch Rechnung berücksichtigt werden; ebenso die geringen Unterschiede in den Refraktionen der beiden Sterne. Sind δ_s und δ_n die Deklinationen, z_s und z_n die Zenitdistanzen der beiden Sterne, so ist

$$z_s = \varphi - \delta_s$$

$$z_n = \delta_n - \varphi .$$

also:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(\delta_s + \delta_n) + \tfrac{1}{2}(z_s - z_n) .$$

$z_s - z_n$ wird durch die Schraube gemessen und gegebenen Falles wegen Änderung der Libelle und Refraktionsdifferenz korrigiert.

Diese Methode wird gegenwärtig, da sie, gute Sterndeklinationen vorausgesetzt, die besten Breitenbestimmungen gestattet, auf den internationalen Stationen zur Beobachtung der Schwankungen der Erdachse im Erdkörper verwendet. Als Instrument wird das sogenannte „Zeniteleskop" gebraucht, ein Höhenkreis, der mit einem nur roh geteilten Kreis zur Einstellung, aber mit einer guten Schraube und einer empfindlichen Höhenlibelle (Horrebow-Talcott-Libelle) versehen ist.

§ 104. Zeit und Breite durch Messung von Azimuten.

8. Messungen von Azimuten setzen wegen der Bestimmung des Meridians ein fest aufgestelltes Instrument voraus, kommen also für die Nautik überhaupt nicht, für die Ortsbestimmung auf festem Lande nur in beschränktem Maße in Betracht. Als Hauptgleichung wendet man am besten an:

$$\operatorname{cotg} a \sin(\Theta - \alpha) = \sin\varphi \cos(\Theta - \alpha) - \operatorname{tg}\delta \cos\varphi,$$

die unter Einführung der Hilfsgrößen

$$\begin{array}{ll|ll} m \sin M = \sin\varphi & & n \sin N = \cos(\Theta - \alpha) \\ m \cos M = \operatorname{cotg} a & & n \cos N = \operatorname{tg}\delta \end{array}$$

in die beiden Formen

$$\sin(M - (\Theta - \alpha)) = \frac{1}{m} \cos\varphi \operatorname{tg}\delta$$

$$\cos(N + \varphi) = \frac{1}{n} \operatorname{cotg} a \sin(\Theta - \alpha)$$

übergeht, von denen die erste die Bestimmung der Zeit gestattet, wenn die Polhöhe gegeben ist, die zweite umgekehrt die Polhöhe gibt, wenn die Zeit bekannt ist.

Die günstigsten Beobachtungsbedingungen ergeben sich durch Betrachtung der Gleichung zwischen den Differentialen, die wir in folgenden zwei Formen schreiben:

$$\cos\delta \cos q \cdot d(\theta - \alpha) = \sin z \cdot da + \sin a \cos z \cdot d\varphi$$

$$\sin a \cdot d\varphi = \operatorname{tg} z \cdot da + \cos\delta \cos q \sec z \cdot d(\theta - \alpha).$$

Die erste zeigt, daß die Zeitbestimmung von der Kenntnis der Polhöhe unabhängig wird, wenn sie im Meridian ($a = 0$) ausgeführt wird und daß ein Fehler in der Messung des Azimutes um so geringeren Einfluß hat, je näher man dem Zenit beobachtet. Andererseits ist früher bereits gezeigt, daß der Einfluß der Instrumentalfehler auf die Messung von Horizontalwinkeln mit der Annäherung an das Zenit wächst, so daß hier eine Kompensation eintritt. Ferner zeigt die Formel, daß δ möglichst klein gewählt werden muß. Die zweite Formel zeigt, daß die Breite von der Kenntnis der Zeit umso unabhängiger wird, je größer man δ wählt und je größer der parallaktische Winkel q wird und ferner daß man in der Nähe des ersten Vertikales ($a = \pm 90^0$) beobachten muß.

Da die Gestirne bewegt sind, lassen sich Azimute nicht anders messen, als indem man die Visierlinie mittelst des Horizontalkreises

auf ein bestimmtes Azimut einstellt und dann mittelst der Uhr die Durchgänge der Gestirne durch den Vertikalfaden beobachtet. Man gelangt so zu den Durchgangsbeobachtungen und speziell zu denen im Meridian und im ersten Vertikal, die bereits im vorigen Abschnitt in ihrer Bedeutung für die Bestimmung der Zeit und der Polhöhe besprochen sind.

§ 105. Geographische Ortsbestimmung ohne winkelmessende Instrumente.

9. Zur Anstellung von Durchgangsbeobachtungen behufs Zeit- und Breitenbestimmung genügt eine irgendwie hergestellte Vertikalebene z. B. die senkrechte Kante einer Wand, die von einem bestimmten Punkt aus anvisiert wird. Nach einem Vorschlag von Harzer erhält man mit überall vorhandenen Mitteln eine für die Beobachtungen sehr brauchbare Vertikalebene, wenn man die beiden Enden einer etwa 5 m langen Schnur zusammenknüpft, sie dann über zwei feste Stützpunkte A und B, am besten Rollen, legt und am herabhängenden Teil mit einem Gewicht C straff spannt. Begibt sich der Beobachter in eine solche, stehende, sitzende oder liegende Stellung, daß für sein eines Auge zwei von den drei Dreiecksseiten sich decken, so kann er Durchgänge von Gestirnen durch eine Vertikalebene beobachten, deren Genauigkeit für viele Zwecke ausreicht. Durch geeignete Kombinationen lassen sich Zeit und Breite, ja mit Heranziehung von Mondkulminationen auch Längen bestimmen. Natürlich gelten auch hier die allgemeinen Bedingungen d. h. zur Bestimmung der Breite aus Durchgängen muß das Fadendreieck nahe dem ersten Vertikal und zur Bestimmung der Zeit nahe dem Meridian aufgehängt sein. Ebenso ist klar, daß man immer mindestens zwei Durchgänge kombinieren muß, um die unbekannte Lage des Fadendreiecks zu eliminieren.

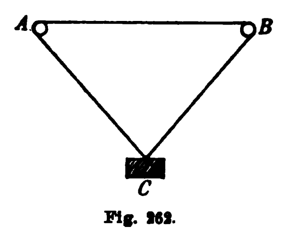


Fig. 262.

10. Bestimmung der Breite, wenn die Zeit bekannt ist. Durch das nahe dem ersten Vertikal aufgehängte Fadendreieck werden die Durchgangszeiten zweier bekannten Gestirne $(\alpha_1\ \delta_1)$ und $(\alpha_2\ \delta_2)$ beobachtet: U_1 und U_2 oder in Sternzeit verwandelt: Θ_1 und Θ_2; dann erhält man durch $\Theta_1 - \alpha_1 = t_1$ und $\Theta_2 - \alpha_2 = t_2$ die Stundenwinkel und kann nun aus dem Dreieck Zenit, Pol, Gestirn die Formeln aufstellen.

$$\operatorname{cotg} A \sin t_1 = -\cos\varphi \operatorname{tg}\delta_1 + \sin\varphi\cos t_1$$
$$\operatorname{cotg} A \sin t_2 = -\cos\varphi \operatorname{tg}\delta_2 + \sin\varphi\cos t_2,$$

aus denen sich das unverändert bleibende Azimut A des Fadendreiecks leicht eliminieren läßt:

$$\frac{\sin t_1}{\sin t_2} = \frac{-\cos\varphi \operatorname{tg}\delta_1 + \sin\varphi\cos t_1}{-\cos\varphi \operatorname{tg}\delta_2 + \sin\varphi\cos t_2}.$$

Durch kreuzweises Ausmultiplizieren folgt hieraus:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin t_1 \operatorname{tg}\delta_2 - \sin t_2 \operatorname{tg}\delta_1}{\sin(t_1 - t_2)}.$$

Man muß nahe dem Zenit, also in liegender Stellung beobachten, um das sicherste Resultat zu erhalten.

11. Bestimmung der Zeit, wenn die Breite bekannt ist. Sind $U_1{}^0$ und $U_2{}^0$ die Durchgangszeiten, beobachtet an einer nach mittlerer Zeit gehenden Uhr, $\Theta_1{}^0$ und $\Theta_2{}^0$ die entsprechenden Sternzeitmomente, so bildet man $t_1{}^0 = \Theta_1{}^0 - \alpha_1$ und $t_2{}^0 = \Theta_2{}^0 - \alpha_2$ und bestimmt zuerst die Korrektion der Sternzeit $\varDelta\Theta$; die wahren Stundenwinkel t_1 und t_2 werden:

$$t_1 = \Theta_1{}^0 + \varDelta\Theta - \alpha_1 = t_1{}^0 + \varDelta\Theta$$
$$t_2 = \Theta_2{}^0 + \varDelta\Theta - \alpha_2 = t_2{}^0 + \varDelta\Theta$$

und es ist daher

$$t_1 - t_2 = t_1{}^0 - t_2{}^0$$

eine bekannte Größe. Wird dies in die vorhin abgeleitete Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi \sin(t_1 - t_2) = \sin t_1 \operatorname{tg}\delta_2 - \sin t_2 \operatorname{tg}\delta_1$$

eingetragen, so folgt:

$$\operatorname{tg}\varphi \sin(t_1{}^0 - t_2{}^0) = \sin(t_1{}^0 + \varDelta\Theta)\operatorname{tg}\delta_2 - \sin(t_2{}^0 + \varDelta\Theta)\operatorname{tg}\delta_1$$

oder nach Auflösung der sin:

$$\operatorname{tg}\varphi \sin(t_1{}^0 - t_2{}^0) = \cos\varDelta\Theta(\operatorname{tg}\delta_2 \sin t_1{}^0 - \operatorname{tg}\delta_1 \sin t_2{}^0)$$
$$+ \sin\varDelta\Theta(\operatorname{tg}\delta_2 \cos t_1{}^0 - \operatorname{tg}\delta_1 \cos t_2{}^0).$$

Nach Einführung der berechenbaren Hilfsgrößen m und M durch

$$m \sin M = \operatorname{tg}\delta_2 \sin t_1{}^0 - \operatorname{tg}\delta_1 \sin t_2{}^0$$

$$m \cos M = \operatorname{tg}\delta_2 \cos t_1{}^0 - \operatorname{tg}\delta_1 \cos t_2{}^0$$

folgt hieraus:

$$\sin(M + \varDelta\Theta) = \frac{1}{m}\operatorname{tg}\varphi \sin(t_1{}^0 - t_2{}^0).$$

Diese Gleichung gibt $\Delta\Theta$ und nach Verwandlung in mittlere Zeit die Korrektion ΔU der benutzten Uhr. Auch hier erhält man bei kleinen Zenitdistanzen das sicherste Resultat.

§ 106. Die Methoden der Längenbestimmung.

12. Durch die Sternzeiten oder durch die mittleren Sonnenzeiten, welche im selben absoluten Moment an zwei Orten der Erdoberfläche gezählt werden, ist der jeweilige Stundenwinkel des Frühlingspunktes bzw. der mittleren Sonne ausgedrückt und der Unterschied der beiden Zeiten gibt also den Unterschied der Meridiane oder die Längendifferenz der beiden Orte. Eine Längenbestimmung zerfällt somit in zwei Operationen, die Zeitbestimmung an beiden Orten und die Vergleichung der beiden Uhren. Nur mit der letzteren haben wir uns noch zu beschäftigen. 1. Man benützt zur Uhrvergleichung Phänomene, welche an beiden Orten gleichzeitig auftreten: Pulver- und Heliotropsignale, Mondfinsternisse, Verfinsterungen der Jupitertrabanten u. dgl. 2. Man überbringt die Zeit des einen Ortes in Gestalt eines oder mehrerer Chronometer, deren Gang genau bekannt ist, nach dem zweiten Ort; 3. man übermittelt die Zeit des einen Ortes durch den elektrischen Telegraphen oder durch drahtlose Telegraphie unter Benutzung eines Chronographen nach dem anderen Ort (Telegraphische Längenbestimmung). 4. Man benutzt Phänomene, welche zwar für die beiden Orte nicht gleichzeitig eintreten, aber durch Rechnung auf einen Moment reduziert werden können, wie Sonnenfinsternisse, Bedeckungen von Fixsternen und Planeten durch den Mond u. dgl. 5. Man macht Gebrauch von der raschen Bewegung des Mondes, indem man ihn gewissermaßen als Zeiger benutzt, dessen Ort am Himmel die Zeit des Nullmeridianes anzeigt, die dann nur mit der Zeit des zweiten Ortes verglichen zu werden braucht.

Die unter 1. und 4. genannten Methoden kommen wegen der ihnen anhaftenden offensichtlichen Mängel heutzutage nur gelegentlich mehr in Betracht. Für Längenbestimmungen in kultivierten Gegenden und auf hoher See benutzt man jetzt ausschließlich Nr. 2 und Nr. 3. Die Mondmethoden Nr. 5 spielen bei Reisen in unerforschten Gegenden noch eine Rolle und eine derselben wird in der Nautik in Notfällen zur Anwendung gebracht. Während über Nr. 2 und 3 weitere Auseinandersetzungen hier überflüssig erscheinen, müssen wir dem Prinzip von Nr. 5 einige Worte widmen.

Der Mond ändert seinen Ort unter den Sternen sehr rasch, in einem siderischen Monat durchläuft er 360°, in einem Tag durchschnittlich 13°, in einer Minute 33″. Dieser Ort wird für jede Stunde Greenwicher Zeit in den Ephemeriden vorausberechnet und man ist



hiernach in der Lage aus dem Ort auf die Greenwicher Zeit zu schließen, zu der er gehört. Wird z. B. der Ort auf 10″ genau bestimmt, so kann hieraus die Greenwicher Zeit mit einer Unsicherheit von durchschnittlich $\frac{60 \times 10}{33} = 18$ Sekunden abgeleitet werden. Die Vergleichung dieser Greenwicher Zeit mit der Ortszeit gibt die Längendifferenz mit Greenwich. Die zu überwindenden Schwierigkeiten sind zweierlei Art: Aufstellung einer so guten Mondtheorie, daß sein Ort auf längere Zeit voraus mit Sicherheit berechnet werden kann und Bestimmung des Mondortes durch geeignete Beobachtungen. Auf die erste einzugehen ist hier nicht der Ort, doch sei erwähnt, daß man immer noch mit Fehlern des berechneten Ortes bis zu 10″ in Länge zu rechnen hat. Genaue Mondbeobachtungen gehören zu den schwierigsten Aufgaben der praktischen Astronomie und diese Schwierigkeiten häufen sich auf Landreisen und zur See. Man hat für Längenbestimmungszwecke drei Methoden: 1. Messung von Monddistanzen; 2. Beobachtung von Mondkulminationen; 3. Messung von Mondhöhen. Bei ersterer werden durch den Spiegelsextanten die Entfernungen des Mondes von der Sonne und einer Anzahl hellerer Gestirne gemessen und mit den vorausberechneten Distanzen verglichen; sie ist die einzige, die zur See verwendbar ist und ist früher viel verwendet worden, in der neueren Nautik ist man davon abgekommen. Bei der Methode der Mondkulminationen mißt man unter Benutzung der sogenannten Mondsterne die Rektaszension des Mondes und vergleicht sie mit der des Nullmeridianes: die Änderung der Rektaszension ergibt einen Maßstab für die zwischen Nullmeridian und Ortsmeridian vorhandene Zeitdifferenz. Mißt man Mondhöhen, so läßt sich daraus der Stundenwinkel und mittelst der Ortszeit die Rektaszension ableiten, mit der man wie vorhin verfährt; natürlich muß man dabei in der Nähe des ersten Vertikals beobachten, da es sich um eine Zeitbestimmung handelt; die Diskussion der Differentialgleichung zeigt auch, daß die Methode die besten Resultate für $\varphi = 0$ gibt; sie wird daher in den Tropen noch viel verwendet.

Sechzehnter Abschnitt.

Die Bahnbestimmung der Planeten und Kometen.

§ 107. Die Bewegung in der Ellipse und Parabel.

1. Die theoretische Astronomie hat die Aufgabe, die Bewegungen der Himmelskörper, wie sie durch die beobachtende Astronomie bekannt werden, in ihren einfachsten Formen darzustellen und aus der gewonnenen Erkenntnis die Vorausberechnung künftiger Bewegungen zu ermöglichen. Die einfachste Form der Darstellung wechselt mit dem Fortschritt der Wissenschaft (Eudoxus, Ptolemäus, Copernicus, Kepler), gegenwärtig wird sie in dem Newtonschen Gravitationsgesetz gesehen, wonach die Himmelskörper unter dem Einfluß von Kräften sich bewegen, die umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung und direkt proportional den Massen ihrer Zentren wirken. Die Prüfung dieses für die physikalische Weltanschauung wichtigen Gesetzes ist daher gegenwärtig die vornehmste Aufgabe der Astronomie, zu der von Seite der theoretischen Astronomie die Mittel soweit geboten werden müssen, daß das Resultat der Theorie mit der Beobachtung verglichen werden kann. Diese Vergleichung vertritt das Experiment, durch das hier wie in den anderen Naturwissenschaften die Natur erforscht wird.

Das angegebene Ziel kann die theoretische Astronomie nur auf dem Wege der sukzessiven Näherung erreichen. Sie muß zuerst die Bewegungen im Sonnensystem für sich betrachten und dabei annehmen, daß sie unabhängig von den Körpern des übrigen Universums erfolgen, die ja auch tatsächlich in für uns fast unmeßbaren Entfernungen sich befinden. Und im Sonnensystem selbst muß sie wieder zuerst die Voraussetzung machen, daß sein dominierender Zentralkörper die Bewegungen der übrigen Körper allein beherrscht und eine gegenseitige Einwirkung nicht stattfindet. Man gelangt dann zu verhältnismäßig einfachen Bewegungen, die nachträglich durch Anbringung von kleinen Korrektionen zu den wahren ergänzt werden können. Diese einfachen Bewegungen aus den Beobachtungen abzuleiten, ist sonach der erste Schritt auf dem Wege, den die Theorie zurückzulegen hat.

Von diesem „Bahnbestimmungsproblem“ eine Vorstellung zu geben, sei in diesem Abschnitt unsere Aufgabe.

2. Die Bewegung der Planeten und Kometen erfolgt in Bahnen, die in einfacher Beziehung zur Sonne stehen, die wir aber nur von der gleichfalls bewegten Erde aus verfolgen können, und zwar können wir direkt nur Richtungen, nicht aber Entfernungen messen, d. h. von den drei Polarkoordinaten eines Punktes fehlt uns immer eine, der Radiusvektor. Es ist Aufgabe der Analyse, den Zusammenhang zu entwickeln zwischen der von der Erde aus beobachteten scheinbaren und naturgemäß komplizierten Bahn und der einfachen Bahn um die Sonne. Die Analyse wird natürlich in erster Linie darnach zu streben haben, die durch die Beobachtung nicht gegebene dritte Koordinate zu ermitteln; dies ist prinzipiell eine Parallaxenbestimmung unter Zugrundelegung der von zwei Positionen der Erde gebildeten Grundlinie. Die ersten Entfernungen hat auf diese Weise Copernicus und nach ihm in größerem Maßstab Kepler bestimmt. Dadurch gelang es letzterem, die Natur der wahren Bewegungen um die Sonne in großer Annäherung zu erkennen und in seinen drei Gesetzen niederzulegen.

Nach dem ersten Gesetz bewegen sich die Planeten in Ellipsen, deren einer Brennpunkt im Mittelpunkt der Sonne liegt. Eine Ellipse ist ihrer Größe und Form nach durch zwei Stücke bestimmt, die große Halbachse a und die Exzentrizität e; nimmt man hierzu die drei Stücke, welche ihre Lage im Raum charakterisieren und welche wir bereits früher (Seite 481) eingeführt haben, so erkennt man, daß eine Planetenbahn als solche durch fünf Stücke gegeben ist. Die Art der Bewegung in ihr lehrt uns das zweite Gesetz, wonach der von der Sonne nach dem Planeten gezogene Radiusvektor Flächenräume überstreicht, die den Zeiten proportional sind. Die Fläche der ganzen Ellipse ist also proportional der Umlaufszeit T, oder, wenn mit b die kleine Halbachse der Ellipse bezeichnet wird:

$$ab\pi = \tfrac{1}{2} cT. \tag{1}$$

Der Proportionalitätsfaktor c wird durch das dritte Gesetz bestimmt, welches lautet: Für verschiedene Planeten verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten, wie die Kuben der großen Achsen:

$$\frac{T^2}{T_1^2} = \frac{a^3}{a_1^3},$$

oder wenn mit K eine für alle Planeten gültige Konstante bezeichnet wird:

$$T^2 = Ka^3. \tag{2}$$

Das dritte Gesetz ist nicht ganz korrekt, wie die spätere Entwicklung gezeigt hat, sondern erfordert einen von der Masse des Planeten abhängigen Faktor. Wird als Einheit der Masse die Sonnenmasse eingeführt und ist darin ausgedrückt m die Masse des Planeten, so lautet das korrekte Gesetz:

$$T^2(1 + m) = Ka^3. \tag{2a}$$

m ist so klein, daß auch (2) eine Annäherung an die Wahrheit ist. Durch Elimination von T aus (1) und (2a) folgt:

$$c = \frac{2b\pi}{\sqrt{\frac{K}{1+m} \cdot a}}.$$

Führt man statt b den Parameter der Ellipse p ein, der bekanntlich mit a und b durch die Gleichung $b = \sqrt{ap}$ zusammenhängt, und setzt ferner $\frac{2\pi}{\sqrt{K}} = k$, so wird der Ausdruck von c einfacher wie folgt geschrieben:

$$c = k\sqrt{p(1 + m)}. \tag{3}$$

Für k, welches ebenso wie K eine allen Planeten gemeinsame Konstante ist, ergibt sich aus (2a) die Formel:

$$k = \frac{2\pi}{T} \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 + m}}, \tag{4}$$

aus der es berechnet werden kann, wenn man die für irgend einen Planeten gültigen Werte einträgt. Am einfachsten nimmt man die Erde, da die große Halbachse der Erdbahn als astronomische Längeneinheit gebraucht wird. Führt man als Zeiteinheit den mittleren Sonnentag ein, so wird T, die Dauer des siderischen Jahres, nach der Annahme von Gauß

$$T = 365.2563835 \text{ Tage},$$

ferner ist

$$m = \frac{1}{354710},$$

also folgt:

$$k = 0.017202099. \tag{5}$$

Man nennt diesen Zahlenwert die Gaußsche Konstante oder k^2 aus hier nicht zu erläuternden Gründen die Attraktionskonstante der Sonne. Man kann natürlich durch Einführung anderer Einheiten herbeiführen,



daß $k = 1$ wird, z. B. wenn man als Zeiteinheit einen Zeitraum von $1 : 0.017202099 = 58.13245$ mittleren Sonnentagen wählt.

Die in (4) auftretende Größe $\frac{2\pi}{T}$ nennt man, wenn T in Tagen ausgedrückt wird, die mittlere tägliche Bewegung des Planeten aus einem naheliegenden Grunde; bezeichnet man sie mit n, so wird aus (4)

$$n^2 a^3 = k^2 (1 + m), \tag{6}$$

d. h. die mittlere Bewegung des Planeten ist vermöge des dritten Keplerschen Gesetzes durch die große Halbachse seiner Bahn gegeben.

3. Wir haben jetzt alle Mittel, um die Bewegung eines Planeten in seiner Bahn verfolgen zu können. Ehe wir die Bewegungsgleichung selbst aufstellen, muß an einige Kurveneigenschaften der Ellipse erinnert werden. Nimmt man die Hauptachsen als Koordinatenachsen, so genügen die Punkte der Ellipse der Gleichung

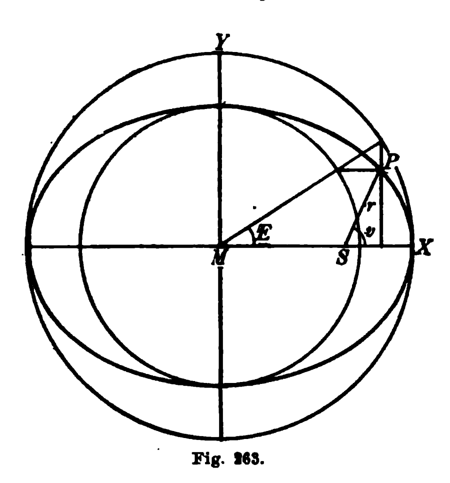


Fig. 263.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Man darf also setzen

$$\frac{x}{a} = \cos E, \frac{y}{b} = \sin E$$

und erkennt die geometrische Bedeutung des Winkels E aus Fig. 263. Wenn man andererseits r den Radiusvektor vom Brennpunkt nach dem Ort des Planeten, v dessen Winkel mit der Apsidenlinie nennt, so wird die Polargleichung bezogen auf den Brennpunkt als Anfangspunkt

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos v}. \tag{7}$$

Man hat ferner:

$$x = a\cos E = ae + r\cos v$$
$$y = b\sin E = r\sin v,$$

oder

$$\begin{aligned} r\sin v &= b\sin E = a\sqrt{1 - e^2}\sin E \\ r\cos v &= a(\cos E - e). \end{aligned} \tag{8}$$

Durch Quadrieren und Addieren erhält man hieraus:

$$r = a(1 - e\cos E). \tag{9}$$

Wenn man die beiden letzten Gleichungen in der Form schreibt:

$$r(\cos\tfrac{1}{2}v^2 - \sin\tfrac{1}{2}v^2) = a(\cos E - e)$$
$$r(\cos\tfrac{1}{2}v^2 + \sin\tfrac{1}{2}v^2) = a(1 - e\cos E)$$

und dann durch Addition bzw. Subtraktion vereinigt, so folgt.

$$\begin{aligned} r\cos\tfrac{1}{2}v^2 &= \tfrac{1}{2}a(1-e)(1+\cos E) = a(1-e)\cos\tfrac{1}{2}E^2 \\ r\sin\tfrac{1}{2}v^2 &= \tfrac{1}{2}a(1+e)(1-\cos E) = a(1+e)\sin\tfrac{1}{2}E^2, \end{aligned} \tag{10}$$

also

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E. \tag{11}$$

Wenn man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sqrt{r}\cos\tfrac{1}{2}v &= \sqrt{a}\sqrt{1-e}\cos\tfrac{1}{2}E \\ \sqrt{r}\sin\tfrac{1}{2}v &= \sqrt{a}\sqrt{1+e}\sin\tfrac{1}{2}E \end{aligned} \tag{10a}$$

durch die Multiplikatoren $-\sin\frac{1}{2}E$ und $\cos\frac{1}{2}E$ miteinander verbindet, dann erhält man noch:

$$\sin\tfrac{1}{2}(v - E) = \sqrt{\frac{a}{r}}(\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e})\tfrac{1}{2}\sin E,$$

oder nach (8)

$$\sin\tfrac{1}{2}(v - E) = \tfrac{1}{2}(\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e})\sqrt{\frac{r}{p}}\sin v. \tag{11a}$$

Man erhält eine einfachere Schreibweise der meisten der vorhergehenden Formeln, wenn man statt e den sogenannten Exzentrizitätswinkel φ, definiert durch $e = \sin\varphi$ einführt; da nämlich

$$1 \pm e = 1 \pm \sin\varphi = \cos\tfrac{1}{2}\varphi^2 + \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 \pm 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cos\tfrac{1}{2}\varphi = (\cos\tfrac{1}{2}\varphi \pm \sin\tfrac{1}{2}\varphi)^2,$$

so wird

$$\sqrt{1-e^2} = \cos\varphi, \quad p = a\cos\varphi^2, \quad \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \operatorname{tg}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)$$

$$\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e} = 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi \quad \text{usf.}$$

Aus (11a) wird z. B.

$$\sin\tfrac{1}{2}(v - E) = \sin\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{\frac{r}{p}}\sin v. \tag{11b}$$

Die Formeln (8) bis (11) gestatten die Berechnung der Polarkoordi-

naten r und v, wenn E bekannt ist; wir werden also zu erstreben haben, E durch die Zeit auszudrücken.

Der vom Radiusvektor in der Zeit dt beschriebene Elementarsektor hat zur Fläche $\frac{1}{2} r^2 dv$; diese ist nach dem zweiten Gesetz proportional dt, oder wir haben wie in (1)

$$r^2 dv = c dt;$$

oder nach (3)

$$r^2 dv = k \sqrt{p(1+m)}\, dt,$$

oder wenn nach (6) $k\sqrt{1+m} = na^{\frac{3}{2}}$ und ferner $p = a(1-e^2)$ gesetzt wird:

$$\frac{r^2}{a^2} dv = n\sqrt{1-e^2}\, dt.$$

Die Integration dieser Gleichung gestaltet sich am einfachsten, wenn statt v als Variable E eingeführt wird. Aus (11) folgt aber mit Rücksicht auf (10)

$$dv = \frac{a}{r}\sqrt{1-e^2}\, dE$$

und ferner ist nach (9)

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos E;$$

die Gleichung geht also in

$$(1 - e\cos E)\, dE = n dt$$

über, deren Integral sofort hingeschrieben werden kann:

$$E - e\sin E = nt + C = M. \tag{12}$$

C ist eine neue Konstante, deren Bedeutung sofort angegeben werden kann. Den Winkel $nt + C = M$ nennt man die „mittlere Anomalie“. Zählt man die Zeit von dem Moment t_0 an, den wir als „Epoche“ bezeichnen wollen, so läßt sich (12) auch schreiben:

$$E - e\sin E = n(t - t_0) + C \tag{12a}$$

und es erscheint hiernach C als „mittlere Anomalie für die Epoche“. Ist diese gegeben, so kann man aus (12a) für jede Zeit t den Winkel E, die sogenannte „exzentrische Anomalie“, berechnen und dann mittelst einer geeigneten Auswahl aus den Formeln (8) bis (11) den Radiusvektor r und die „wahre Anomalie“ v.

Die Gleichung (12a), welche die „Keplersche Gleichung“ genannt wird, ist transzendent und muß daher durch Versuche aufgelöst werden, wofür man viele Methoden hat.

Die Betrachtung der Bewegung hat ein neues, sechstes Element C eingeführt, das bekannt sein muß, wenn man die Bewegung beschreiben will; man erkennt aber auch jetzt, daß mit diesen sechs Elementen für jede Zeit der Ort des Planeten im Raum berechnet werden kann. In der Tat erhält man durch die Elemente a oder n (die durch (6) zusammenhängen) e und C die Polarkoordinaten r und v in der Bahnebene, von denen v vom Perihel aus gezählt wird. Nennt man ω den Abstand des Perihels vom Knoten, so wird $u = \omega + v$ und damit und mit Ω und i lassen sich nach Seite 483 die heliozentrischen rechtwinkligen Koordinaten bezogen auf Ekliptik und Frühlingspunkt berechnen. Obwohl damit natürlich auch die heliozentrischen Polarkoordinaten bekannt sind, wollen wir doch die entsprechenden Formeln wegen ihrer späteren Verwendung besonders ansetzen. Bezeichnen wir mit l und b die heliozentrische Länge und Breite des Planeten, also in Fig. 264 die Bogen $XN = l$, $PN = b$, so kann man die Richtungskosinus $\cos(XP)$, $\cos(YP)$, $\cos(ZP)$ einerseits durch l und b, andererseits durch i, Ω, $\omega + v$ ausdrücken und erhält durch Gleichsetzung derselben:

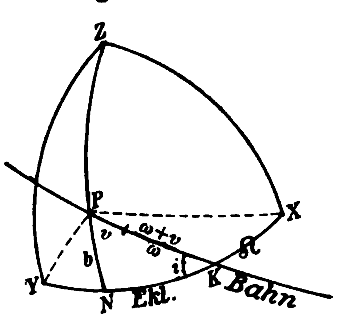


Fig. 264.

$$\cos(XP) = \frac{x}{r} = \cos b \cos l = \cos\Omega \cos(\omega + v) - \sin\Omega \sin(\omega + v) \cos i$$

$$\cos(YP) = \frac{y}{r} = \cos b \sin l = \sin\Omega \cos(\omega + v) + \cos\Omega \sin(\omega + v) \cos i$$

$$\cos(ZP) = \frac{z}{r} = \sin b \qquad = \sin(\omega + v) \sin i.$$

Hieraus folgt leicht:

$$\begin{aligned} \cos b \sin(l - \Omega) &= \sin(\omega + v) \cos i \\ \cos b \cos(l - \Omega) &= \cos(\omega + v) \\ \sin b \qquad &= \sin(\omega + v) \sin i, \end{aligned} \tag{13}$$

oder auch

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(l - \Omega) &= \operatorname{tg}(\omega + v) \cos i \\ \sin b &= \sin(\omega + v) \sin i. \end{aligned} \tag{13a}$$

Die sechs Elemente a, e, i, ω, Ω, C bestimmen also für jede Zeit die Polarkoordinaten r, l, b.

4. Wir schließen hier gleich die Betrachtung der Bewegung in der Parabel an. Setzt man in der Polargleichung der Ellipse die Exzentrizität gleich 1, so ergibt sich die Gleichung der Parabel in Polarkoordinaten:

$$r = \frac{p}{1 + \cos v}.$$

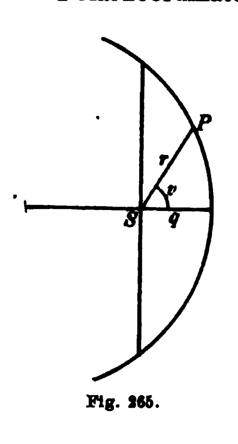


Fig. 265.

Da für $v = 0$ bzw. 90^0 der Radiusvektor gleich $\frac{1}{2}p$ bzw. p wird, so ist die „Periheldistanz“ $q = \frac{1}{2}p$, und wenn sie, wie in der Astronomie üblich, statt des Parameters p als Element eingeführt wird, stellt sich die Gleichung so:

$$(14) \qquad r = \frac{2q}{1 + \cos v} = \frac{q}{\cos \frac{1}{2} v^2}.$$

Wird dies in die auch hier gültige Gleichung

$$r^2 dv = k \sqrt{p}\sqrt{1 + m} = k\sqrt{2q}\sqrt{1 + m}$$

eingetragen, so erhält man

$$\frac{q^2}{\cos \frac{1}{2} v^4} dv = k\sqrt{2q}\sqrt{1 + m},$$

und kann nun sofort integrieren:

$$2q^2 (\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{3} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v^3) = k\sqrt{2q}\sqrt{1 + m} \,.\, t + C.$$

Zählt man die Zeit von dem Moment T, wo der Komet durch das Perihel geht, so wird für $t = 0$ auch $v = 0$, also auch $C = 0$. m ist hier stets so klein, daß es gleich 0 gesetzt werden kann. Damit wird die Gleichung für die Bewegung in der Parabel, die der Keplerschen Gleichung entspricht:

$$(15) \qquad \frac{\sqrt{2}}{k} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v + \frac{\sqrt{2}}{3k} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v^3 = \frac{t - T}{q^{\frac{3}{2}}} = M.$$

Man kann sie durch einen einfachen Kunstgriff direkt auflösen, doch bedient man sich meist einer Hilfstafel, der sogenannten Barkerschen Tafel, welche mit dem Argument v den Wert von M oder von $\frac{75k}{\sqrt{2}} M$ gibt. Rechnet man also M oder $\frac{75k}{\sqrt{2}} M$ mit der seit dem Periheldurchgang verflossenen Zeit, so kann man damit v der Tafel entnehmen; umgekehrt erhält man mit dem Wert v das zugehörige M und daraus t.

Bei der Parabel wird die Bahn und die Bewegung in ihr durch fünf Stücke gegeben, nämlich durch q und T, welche die Bewegung in der Bahnebene bestimmen und durch ω, i, Ω, welche wie bei der Ellipse den Ort im Raum festsetzen.

§ 108. Beziehungen zwischen zwei und drei Örtern der Bahn.

Zur Bestimmung der sechs Elemente der elliptischen und der fünf Elemente der parabolischen Bewegung aus den Beobachtungen braucht man, da jede vollständige Beobachtung zwei Winkel repräsentiert, mindestens drei zu verschiedenen Zeiten gehörige Örter des Planeten oder Kometen. Ehe wir daher die Aufgabe der Elementenbestimmung d. h. der Bahnbestimmung selbst in Angriff nehmen, müssen wir uns mit den Beziehungen zwischen mehreren Örtern der Bahn beschäftigen, nachdem wir bisher immer nur einen Punkt in Betracht gezogen haben.

5. Das Verhältnis Sektor zu Dreieck. Indem wir zuerst zwei Punkte der Ellipse ins Auge fassen, suchen wir einen Ausdruck für das Verhältnis des elliptischen Sektors, der durch die nach den beiden Punkten vom Brennpunkt aus gezogenen Radienvektoren r und r' und dem Ellipsenbogen begrenzt wird, zu dem Dreieck, dessen Seiten r, r' und die Sehne s zwischen den beiden Punkten sind. Dieses Verhältnis ist, wie zuerst Lambert und dann Gauß erkannt haben, deshalb von besonderer Wichtigkeit, weil der Sektor proportional der Zeit ist und das Dreieck, wie wir sehen werden, in den Grundgleichungen der Bahnbestimmung auftritt.

Sind t und t' die zu den beiden Punkten gehörigen Zeiten, also $t'-t$ die zur Beschreibung des Sektors gebrauchte Zeit, ferner $2f$ der von den Radienvektoren eingeschlossene Winkel, so wird das genannte Verhältnis:

$$y = \frac{k\sqrt{1+m}\sqrt{p}\,(t'-t)}{rr'\sin 2f}. \tag{1}$$

Aus diesem Ausdruck muß der Parameter p eliminiert werden, was in geschlossener Form nur durch Einführung einer neuen Unbekannten, der Differenz der exzentrischen Anomalien gelingt, zu deren Elimination dann eine zweite Gleichung aufgestellt werden muß. Diese beiden Gleichungen wollen wir zuerst ableiten. Aus (10) (S. 621) folgt für die beiden Zeitpunkte t und t'

$$\begin{aligned}
\sqrt{r}\cos\tfrac{1}{2}v &= \sqrt{a(1-e)}\cos\tfrac{1}{2}E\\
\sqrt{r}\sin\tfrac{1}{2}v &= \sqrt{a(1+e)}\sin\tfrac{1}{2}E\\
\sqrt{r'}\cos\tfrac{1}{2}v' &= \sqrt{a(1-e)}\cos\tfrac{1}{2}E'\\
\sqrt{r'}\sin\tfrac{1}{2}v' &= \sqrt{a(1+e)}\sin\tfrac{1}{2}E'
\end{aligned}$$



und daraus durch eine leicht erkenntliche Operation:

$$\sqrt{rr'}\cos\tfrac{1}{2}(v'-v)=a\cos\tfrac{1}{2}(E'-E)-ae\cos\tfrac{1}{2}(E'+E)$$

oder wenn

$$v'-v=2f\qquad E'-E=2g$$
$$v'+v=2F\qquad E'+E=2G$$

gesetzt wird

$$\sqrt{rr'}\cos f=a\cos g-ae\cos G.$$

Ähnlich wird gefunden:

$$\sqrt{rr'}\cos F=a\cos G-ae\cos g.$$

Aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen folgt

$$\sqrt{rr'}\cos f+e\sqrt{rr'}\cos F=a(1-e^2)\cos g=p\cos g,$$

oder:

$$e\cos F=-\cos f+\frac{p}{\sqrt{rr'}}\cos g.$$

Ganz ähnlich findet man

$$e\cos G=\cos g-\frac{\sqrt{rr'}}{a}\cos f.$$

Ferner gibt die Addition der Polargleichungen

$$\frac{p}{r}=1+e\cos v,\quad \frac{p}{r'}=1+e\cos v',$$

nach kurzer Umformung

$$\frac{p(r+r')}{rr'}=2+2e\cos f\cos F,$$

oder wenn das eben gefundene $e\cos F$ eingetragen wird:

$$p=\frac{2\sin f^2\, rr'}{r+r'-2\sqrt{rr'}\cos f\cos g}.$$

Mit diesem Wert läßt sich (1) so schreiben:

$$y^2=\frac{k^2(1+m)(t'-t)^2}{2rr'\cos f^2(r+r'-2\sqrt{rr'}\cos f\cos g)};\tag{2}$$

da aber g als unbekannt angenommen werden muß, ist noch eine zweite Gleichung zwischen y und g erforderlich. Zunächst folgt aus:

$$r=a(1-e\cos E),\quad r'=a(1-e\cos E')$$
$$r+r'=2a-2ae\cos g\cos G,$$

oder mit Rücksicht auf obigen Wert von $e \cos G$

$$r + r' - 2\sqrt{rr'} \cos f \cos g = 2a \sin g^2;$$

es kann also (2) auch so geschrieben werden:

$$\frac{1}{a} = \frac{4 \sin g^2 \, rr' \cos f^2}{k^2 (1+m)(t'-t)^2} \, y^2 .$$

Dies vorausgesetzt ergeben die Keplerschen Gleichungen (12) (Seite 622)

$$nt + C = E - e \sin E, \quad nt' + C = E' - e \sin E'$$

durch Subtraktion, wenn für n sein aus (6) (Seite 620) folgender Wert gesetzt wird

$$k\sqrt{1+m}\,\frac{t'-t}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - 2e \cos G \sin g,$$

oder mit Benutzung obigen Wertes für $e \cos G$ und des eben abgeleiteten für a:

$$\text{(3)} \qquad \frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3} = \frac{(2 \cos f \sqrt{rr'})^3}{k^2 (1+m)(t'-t)^2} (y^3 - y^2).$$

Dies ist die zweite Gleichung zwischen y und g. Durch Einführung der Hilfsgrößen

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} m &= \frac{k^2 (1+m)(t'-t)^2}{(2 \cos f \sqrt{rr'})^3} \\ l &= \frac{r + r'}{4 \cos f \sqrt{rr'}} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

die lauter hier als bekannt anzunehmende Stücke enthalten, schreibt man (2) und (3) einfach so:

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} y^2 &= \frac{m}{l + \sin \frac{1}{2} g^2} \\ y^3 - y^2 &= \frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3} \, m . \end{aligned}$$

Die Elimination von g hieraus kann, da die eine Gleichung transzendent ist, nur auf indirektem Wege oder durch Reihenentwicklung erfolgen. Wir gehen auf die vielen Methoden nicht ein, die man zu diesem Zweck entwickelt hat, sondern besprechen nur ein einfaches Verfahren, das für erste Bahnbestimmungen immer ausreichen dürfte, wenn es auch wegen der gemachten Vernachlässigungen eine allgemeine Anwendung nicht zuläßt. Bei ersten Bahnbestimmungen muß man nämlich immer voraussetzen, daß die Zwischenzeit $t' - t$ und in-

folge dessen auch der Winkel $2g$ klein ist, und diese Voraussetzung wollen wir daher hier machen. Wird gesetzt

$$\sin \tfrac{1}{2} g^2 = x,$$

so ergibt sich leicht folgende Reihe

$$\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3} = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{6}{5}x + \frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7}x^2 + \cdots\right),$$

an deren Stelle wir unter Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung in x setzen:

$$\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{6}{5}x}.$$

Bis zu Winkeln von $2g = 30^0$ gibt dieser Ausdruck bei sechsstelliger Rechnung einen völlig strengen Wert. Wird er in (5) eingetragen, so wird daraus:

$$\frac{m}{y^2} = l + x$$

$$y - 1 = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{6}{5}x} \frac{m}{y^2}.$$

Wird nun der aus der ersten Gleichung folgende Wert von x in die zweite eingesetzt, so folgt:

$$y - 1 = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{6}{5}\left(\frac{m}{y^2} - l\right)} \frac{m}{y^2} = \frac{\frac{10}{9}}{\frac{5}{6} + l - \frac{m}{y^2}} \frac{m}{y^2}$$

oder mit der Abkürzung

(6)
$$h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l}$$

schließlich:

(7)
$$\frac{(y-1)\,y^2}{y + \frac{1}{9}} = h.$$

Die einzige positive Wurzel dieser kubischen Gleichung erhält man mit hinreichender Näherung wie folgt: Die Substitution $y = 1 + z$ führt auf

$$\frac{z(1+z)^2}{1 + \frac{9}{10}z} = \frac{10}{9}h,$$

oder da

$$(1+z)^2 = \left(1+\frac{9}{10}z\right)\left(1+\frac{11}{10}z\right)+\frac{1}{100}z^2$$

auf:

$$z\left(1+\frac{11}{10}z\right)+\frac{1}{100}\frac{z^3}{1+\frac{9}{10}z} = \frac{10}{9}h.$$

Da z bei kleinen Winkeln klein ist, kann das Glied dritter Ordnung vernachlässigt werden, und die Gleichung geht über in

$$z\left(1+\frac{11}{10}z\right) = \frac{10}{9}h,$$

oder

$$z = \frac{\frac{10}{9}h}{1+\frac{11}{10}z} = \cfrac{\frac{10}{9}h}{1+\cfrac{\frac{11}{9}h}{1+\frac{11}{9}h\ldots}}$$

und daher

$$y = 1+\frac{10}{11}\cfrac{\frac{11}{9}h}{1+\cfrac{\frac{11}{9}h}{1+\frac{11}{9}h\ldots}} \tag{8}$$

Sind also mit (4) und (6) die Hilfsgrößen m, l, h gerechnet, die ausschließlich von der Zwischenzeit, den Radienvektoren und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel abhängen, so gibt der Kettenbruch (8), der ungemein bequem mit Additionslogarithmen berechnet werden kann, die Größe y.

6. Wir können uns nun sofort überzeugen, daß damit die Elementenbestimmung der Ellipse aus den genannten Stücken $t'-t$, r, r' und $2f = v'-v$ überhaupt geleistet ist. In der Tat gibt die Gleichung (1) (S. 625) jetzt den Parameter

$$p = \left(\frac{rr'\sin 2f\cdot y}{k\sqrt{1+m}\,(t'-t)}\right)^2. \tag{9}$$

Nennen wir ferner die Abstände der beiden Planetenörter vom Knoten u und u', so wird

$$u-\omega = v \qquad u'-\omega = v'$$
$$u'-u = v'-v = 2f$$

und daher die Polargleichungen für die beiden Punkte

$$\frac{p}{r} - 1 = e\cos(u - \omega)$$

$$\frac{p}{r'} - 1 = e\cos(u' - \omega).$$

Setzt man darin die bekannten Größen

$$\frac{p}{r} - 1 = q, \quad \frac{p}{r'} - 1 = q' \tag{10}$$

und

$$u' - \omega = u - \omega + u' - u = u - \omega + 2f,$$

so wird daraus, wenn $\cos(u - \omega + 2f)$ aufgelöst wird,

$$\text{(11)} \left\{ \begin{aligned} e\cos(u - \omega) &= q \\ e\sin(u - \omega) &= \frac{q\cos 2f - q'}{\sin 2f}. \end{aligned} \right.$$

Hieraus berechnet man $e = \sin\varphi$ und $u - \omega = v$ und sodann $v' = v + 2f$. Dann gibt

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{p}{\cos\varphi^2}$$

die große Halbachse und Gleichung (11) (Seite 621) oder besser die nach (11b) (Seite 621) gebildeten Gleichungen

$$\text{(12)} \qquad \begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}(v - E) &= \sin\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{\frac{r}{p}}\sin v \\ \sin\tfrac{1}{2}(v' - E') &= \sin\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{\frac{r'}{p}}\sin v' \end{aligned}$$

führen zur Kenntnis der exzentrischen Anomalien E und E'. Aus diesen ergeben sich die mittleren Anomalien

$$\text{(13)} \qquad \begin{aligned} nt + C &= E - e\sin E = M \\ nt' + C &= E' - e\sin E' = M' \end{aligned}$$

und daher die mittlere tägliche Bewegung:

$$n = \frac{M' - M}{t' - t}, \tag{14}$$

die mit der aus

$$n = \frac{k\sqrt{1 + m}}{a^{\frac{3}{2}}} \tag{15}$$

berechneten übereinstimmen muß.

Ist auch noch die Lage der Radienvektoren gegen die Ekliptik bekannt geworden, so übersieht man leicht, daß daraus u, u', i und Ω

sich ergeben müssen; wir wollen die hierher gehörigen Formeln aber erst später anführen und hier nur noch bemerken, daß aus u und u' sich als letztes Element ω ergibt, da

$$\omega = u - v = u' - v'$$

ist. Wir ersehen jetzt, daß aus zwei ihrer Größe und Lage nach gegebenen Radienvektoren und aus den zugehörigen Zeiten alle sechs Elemente abgeleitet werden können und wissen nun, worauf das Hauptaugenmerk bei Aufstellung und Behandlung der Grundgleichungen geworfen werden muß.

7. Der Lambertsche Satz über die Sehne. Wir haben in der vorigen Nummer, deren Bezeichnungen wir hier beibehalten, bereits folgende Gleichungen für die Zwischenzeit und für die Summe der Radienvektoren in den exzentrischen Anomalien abgeleitet:

$$\text{(1)} \qquad k\sqrt{1+m}\,\frac{t'-t}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - 2e\cos G\sin g$$

$$\text{(2)} \qquad \frac{r+r'}{a} = 2 - 2e\cos G\cos g.$$

Wir wollen hierzu einen ähnlichen Ausdruck für die Sehne s zwischen den beiden Punkten der Ellipse suchen; es ist

$$s^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos 2f = (r+r')^2 - 4rr'\cos f^2,$$

oder

$$\left(\frac{s}{a}\right)^2 = \left(\frac{r+r'}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{\sqrt{rr'}\cos f}{a}\right)^2.$$

Wird hier (2) und der bereits oben (Seite 626) abgeleitete Ausdruck

$$\frac{\sqrt{rr'}\cos f}{a} = \cos g - e\cos G$$

eingetragen, so kommt nach kurzer Reduktion:

$$\text{(3)} \qquad \left(\frac{s}{a}\right)^2 = 4\sin g^2(1 - e^2\cos G^2).$$

Durch Einführung eines Hilfswinkels h lassen sich (1), (2), (3) noch einfacher schreiben; macht man

$$\cos h = e\cos G$$

und setzt fest, daß h zwischen 0 und π liegt, also $\sin h$ stets positiv ist und beachtet, daß $\sin g$ ebenfalls stets positiv ist, wenn die beiden

Örter einem und demselben Umlauf des Planeten angehören, so kann über das Zeichen von (3) nach Ausziehung der Wurzel keine Zweideutigkeit entstehen und man erhält:

$$\frac{k\sqrt{1+m}\,(t'-t)}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - 2\sin g \cos h$$

$$\frac{r+r'}{a} = 2 - 2\cos g \cos h$$

$$\frac{s}{a} = 2\sin g \sin h.$$

Da sich die drei Größen links durch zwei, g und h, ausdrücken lassen, muß zwischen ihnen eine Relation bestehen, d. h. wir erhalten durch Elimination von g und h einen Ausdruck für die Zwischenzeit durch die Sehne und die Summe der Radienvektoren. Um diesen zu ermitteln, setzen wir

$$h+g=\varepsilon, \quad h-g=\delta, \quad 2g=\varepsilon-\delta$$

und schreiben damit die drei Gleichungen so:

$$\frac{k\sqrt{1+m}\,(t'-t)}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - \sin(h+g) + \sin(h-g) = (\varepsilon - \sin\varepsilon) - (\delta - \sin\delta)$$

$$(4) \qquad \frac{r+r'+s}{a} = 2(1-\cos(h+g)) = 4\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon^2$$

$$\frac{r+r'-s}{a} = 2(1-\cos(h-g)) = 4\sin\tfrac{1}{2}\delta^2.$$

In den beiden letzten Gleichungen bleibt beim Ausziehen der Wurzel eine Zweideutigkeit bestehen, die zuerst geregelt werden muß. Gehören die beiden Örter einem Umlauf an, dann ist $g<\pi$ und $G<2\pi$; ferner haben wir festgesetzt $h<\pi$; also ist $h+g=\varepsilon<2\pi$ und $\frac{1}{2}\varepsilon<\pi$; somit $\sin\frac{1}{2}\varepsilon$ stets positiv. Dagegen sind bei $\sin\frac{1}{2}\delta$ zwei Vorzeichen möglich; denn zieht man obige Gleichung

$$\frac{\sqrt{rr'}}{a}\cos f = \cos g - e\cos G,$$

oder

$$\frac{\sqrt{rr'}}{a}\cos\tfrac{1}{2}(v'-v) = \cos g - \cos h = 2\sin\tfrac{1}{2}(h+g)\sin\tfrac{1}{2}(h-g)$$
$$= 2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin\tfrac{1}{2}\delta$$

heran, so zeigt sich, daß $\sin\frac{1}{2}\delta$ immer dasselbe Zeichen haben muß

wie $\cos \frac{1}{2}(v' - v)$, d. h.

$$\sin \tfrac{1}{2}\delta \text{ ist positiv, wenn } v' - v < \pi$$
$$\sin \tfrac{1}{2}\delta \text{ ist negativ, wenn } v' - v > \pi.$$

Es ist also zu setzen

$$(5) \qquad \begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2}\varepsilon &= +\sqrt{\frac{r + r' + s}{4a}} \\ \sin \tfrac{1}{2}\delta &= \pm\sqrt{\frac{r + r' - s}{4a}} \quad \begin{matrix} v' - v < 180^0 \\ v' - v > 180^0. \end{matrix} \end{aligned}$$

Um diese Werte in die erste Gleichung (4) eintragen zu können, muß man $\varepsilon - \sin \varepsilon$ und $\delta - \sin \delta$ nach Potenzen von $\sin \frac{1}{2}\varepsilon$ bzw. $\sin \frac{1}{2}\delta$ entwickeln; die bekannte Reihe

$$\varepsilon - \sin \varepsilon = 4\left(\frac{\sin \frac{1}{2}\varepsilon^3}{3} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin \frac{1}{2}\varepsilon^5}{5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,\frac{\sin \frac{1}{2}\varepsilon^7}{7} + \cdots\right)$$

leistet dies und gibt nach Eintragung in die erste Gleichung (4) unter Beachtung von (5)

$$(6) \qquad \begin{aligned} k\sqrt{1 + m}\,(t' - t) = \frac{1}{6}&\left((r + r' + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r + r' - s)^{\frac{3}{2}}\right) \\ &+ \frac{1}{80}\,\frac{1}{a}\left((r + r' + s)^{\frac{5}{2}} \mp (r + r' - s)^{\frac{5}{2}}\right) \\ &+ \frac{3}{1792}\,\frac{1}{a^2}\left((r + r' + s)^{\frac{7}{2}} \mp (r + r' - s)^{\frac{7}{2}}\right) + \cdots. \end{aligned}$$

Hierin gilt das obere Zeichen für $v' - v < 180^0$ und das untere für $v' - v > 180^0$. Die Gleichung (6) ist die gesuchte Relation und stellt den Lambertschen Satz dar. Für die Parabel $\left(\frac{1}{a} = 0\right)$ erhält man einen geschlossenen Ausdruck:

$$(7) \quad k\sqrt{1 + m}\,(t' - t) = \frac{1}{6}\left[(r + r' + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r + r' - s)^{\frac{3}{2}}\right] \quad \begin{matrix} v' - v < 180^0 \\ v' - v > 180^0 \end{matrix}$$

der für die Bahnbestimmung von großer Wichtigkeit ist, während die Benutzung von (6) für die elliptische Bahnbestimmung im allgemeinen an der geringen Konvergenz der Reihenentwicklung scheitert. Auch (7) ist bei kleinen Zwischenzeiten in dieser Form nicht brauchbar und bedarf einer Umgestaltung, die wir gleich an dieser Stelle vornehmen wollen. Wir beschränken uns dabei auf das obere Zeichen, das bei ersten Bahnbestimmungen allein in Betracht kommt. Führt man den Winkel γ durch

$$\sin \gamma = \frac{s}{r + r'}$$

ein (γ stets $< 90^0$), so wird aus (7)

$$\frac{6k\sqrt{1+m}\,(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} = (1+\sin\gamma)^{\frac{3}{2}} - (1-\sin\gamma)^{\frac{3}{2}}$$

oder, da

$$1 \pm \sin\gamma = (\cos\tfrac{1}{2}\gamma \pm \sin\tfrac{1}{2}\gamma)^2$$

$$\frac{6k\sqrt{1+m}\,(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} = (\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \sin\tfrac{1}{2}\gamma)^3 - (\cos\tfrac{1}{2}\gamma - \sin\tfrac{1}{2}\gamma)^3$$

$$= 6\sin\tfrac{1}{2}\gamma - 4\sin\tfrac{1}{2}\gamma^3.$$

Dividiert man beiderseits mit $2^{\frac{3}{2}}$ und setzt

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{2}} = \sin\tfrac{1}{3}\theta,$$

so folgt

$$\frac{6k\sqrt{1+m}\,(t'-t)}{2^{\frac{3}{2}}(r+r')^{\frac{3}{2}}} = 3\sin\tfrac{1}{3}\theta - 4\sin\tfrac{1}{3}\theta^3 = \sin\theta.$$

Die Durchrechnung des Systems

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{6k\sqrt{1+m}}{2^{\frac{3}{2}}}\;\frac{t'-t}{(r+r')^{\frac{3}{2}}}\\ \sin\tfrac{1}{2}\gamma &= \sqrt{2}\,\sin\tfrac{1}{3}\theta\\ s &= (r+r')\sin\gamma \end{aligned}\right.$$

führt also zu einem Wert der Sehne in der Parabel und zeigt, daß dieser lediglich von der Zwischenzeit und der Summe der Radienvektoren abhängig ist, nicht aber von einem Element der Parabel. Die Berechnung von (8) kann noch durch eine Tafel erleichtert werden, worauf hier nicht eingegangen werden soll.

8. Die Dreiecksflächen und ihre Verhältnisse als Funktionen der Zeit. Indem wir jetzt zur Betrachtung von drei Punkten übergehen, fassen wir den Umstand ins Auge, daß in den bald aufzustellenden Grundgleichungen der Bahnbestimmung die Verhältnisse der Flächen der von den drei heliozentrischen Radienvektoren gebildeten Dreiecke auftreten. Hierfür müssen, um zu einer Lösung des Problems zu gelangen, Ausdrücke substituiert werden, die außer von vorneherein bekannten Größen nur solche unbekannte enthalten, die auch sonst als Unbekannte des Problems eingeführt werden; das sind die Radienvektoren. Wir wollen hier diese Ausdrücke aufstellen, sehen aber, um die unvermeidlichen langen Rechnungen der allgemeinen Be-

handlung zu vermeiden, von dieser ab und wählen eine Methode, die nur das liefert, was unumgänglich gebraucht wird. Einige Entwicklungen müssen vorausgeschickt werden.

Bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Anfangspunkte in der Sonne, dessen X-Achse durch das Perihel der Bahnellipse geht, sind die Koordinaten eines Punktes der Ellipse

$$x = r\cos v \qquad y = r\sin v, \tag{1}$$

wo v die wahre Anomalie ist. Wir zählen die Zeit in Einheiten von $\frac{1}{k}$ Tagen und bezeichnen sie als solche mit $kt = \tau$. Wird (1) nach τ differenziert:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \cos v\frac{dr}{d\tau} - r\sin v\frac{dv}{d\tau} = \frac{x}{r}\frac{dr}{d\tau} - y\frac{dv}{d\tau} \\ \frac{dy}{d\tau} &= \sin v\frac{dr}{d\tau} + r\cos v\frac{dv}{d\tau} = \frac{y}{r}\frac{dr}{d\tau} + x\frac{dv}{d\tau}, \end{aligned} \tag{2}$$

so folgt wegen $x^2 + y^2 = r^2$

$$x\frac{dy}{d\tau} - y\frac{dx}{d\tau} = r^2\frac{dv}{d\tau}.$$

Nun hatten wir als Ausdruck des zweiten Keplerschen Satzes

$$r^2\frac{dv}{dt} = k\sqrt{p}\sqrt{1+m},$$

oder wenn die Masse m zu Null angenommen wird:

$$r^2\frac{dv}{d\tau} = \sqrt{p};$$

also

$$x\frac{dy}{d\tau} - y\frac{dx}{d\tau} = \sqrt{p}.$$

Wird dies nochmals differenziert, so ergibt sich

$$x\frac{d^2y}{d\tau^2} - y\frac{d^2x}{d\tau^2} = 0. \tag{3}$$

Durch Quadrieren und Addieren von (2) erhält man ferner:

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2\left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2,$$

oder wenn der aus der Differentiation der Ellipsengleichung

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}$$

hervorgehende Ausdruck

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{e}{p}\sin v \cdot r^2 \cdot \frac{dv}{d\tau} = \frac{e}{\sqrt{p}}\sin v$$

darin eingetragen wird:

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 = \frac{e^2}{p}\sin v^2 + \frac{p}{r^2} = \frac{1}{p}\left(2\frac{p}{r} + e^2 - 1\right).$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$(4) \qquad \frac{dx}{d\tau}\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{dy}{d\tau}\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\tau}.$$

Aus der Vereinigung von (3) und (4) durch die Multiplikatoren $x, -\frac{dy}{d\tau}$ und $y, \frac{dx}{d\tau}$ folgt nun leicht, wenn noch die aus $x^2 + y^2 = r^2$ hervorgehende Gleichung

$$x\frac{dx}{d\tau} + y\frac{dy}{d\tau} = r\frac{dr}{d\tau}$$

beachtet wird:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} &= -\frac{x}{r^3} \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} &= -\frac{y}{r^3}. \end{aligned}$$

Dies ist der Ausdruck des Newtonschen Gravitationsgesetzes, das wir also durch obige Analyse aus den Keplerschen Gesetzen abgeleitet haben.

Wir betrachten jetzt drei Punkte der Ellipse mit den Koordinaten x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 bzw. r_1v_1, r_2v_2, r_3v_3, die zu den Zeiten t_1, t_2, t_3 gehören; die in der oben eingeführten Zeiteinheit ausgedrückten Zwischenzeiten $k(t_3 - t_2)$, $k(t_3 - t_1)$, $k(t_2 - t_1)$ bezeichnen wir mit τ_1, τ_2, τ_3 und nehmen an, daß diese im Verhältnis zu den Umlaufszeiten sehr klein sind, d. h. daß die drei Punkte nahe beieinander liegen. Die doppelten Dreiecksflächen, die von den Radienvektoren und den Sehnen gebildet werden, seien mit $[r_2r_3]$, $[r_1r_3]$, $[r_1r_2]$ bezeichnet; man hat dann z. B.

$$\begin{aligned}[r_2r_3] = r_2r_3\sin(v_3 - v_2) &= r_2\cos v_2 \cdot r_3\sin v_3 - r_2\sin v_2 \cdot r_3\cos v_3 \\ &= x_2y_3 - x_3y_2\end{aligned}$$

und ebenso:

$$\begin{aligned}[r_1r_3] &= x_1y_3 - x_3y_1 \\ [r_1r_2] &= x_1y_2 - x_2y_1.\end{aligned}$$

Wird nun angenommen, daß man die Koordinaten eines Punktes xy der Ellipse, ausgehend von einem nahegelegenen Punkt derselben in

eine Potenzreihe nach Potenzen der Zeit entwickeln kann:

$$(6)\qquad \begin{aligned} x &= a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 \\ y &= b_0 + b_1 \tau + b_2 \tau^2 \end{aligned}$$

und daß die Zwischenzeiten so klein sind, daß man mit den Gliedern zweiter Ordnung in τ die Entwicklung abschließen kann, so wird man die Koordinaten obiger drei Punkte, wenn man vom mittleren ausgeht, in folgender Weise darstellen können:

$$(7)\qquad \begin{aligned} x_1 &= a_0 - a_1 \tau_3 + a_2 \tau_3^2 & y_1 &= b_0 - b_1 \tau_3 + b_2 \tau_3^2 \\ x_2 &= a_0 & y_2 &= b_0 \\ x_3 &= a_0 + a_1 \tau_1 + a_2 \tau_1^2 & y_3 &= b_0 + b_1 \tau_1 + b_2 \tau_1^2. \end{aligned}$$

Da ferner aus (6) folgt:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = 2 a_2, \quad \frac{d^2 y}{d\tau^2} = 2 b_2,$$

so hat man nach (5)

$$-\frac{x}{r^3} = 2 a_2, \quad -\frac{y}{r^3} = 2 b_2$$

und kann daher den Gleichungen (7) noch folgende hinzufügen:

$$(8)\qquad \begin{aligned} -\frac{x_1}{r_1^3} &= 2 a_2 & -\frac{y_1}{r_1^3} &= 2 b_2 \\ -\frac{x_2}{r_2^3} &= 2 a_2 & -\frac{y_2}{r_2^3} &= 2 b_2 \\ -\frac{x_3}{r_3^3} &= 2 a_2 & -\frac{y_3}{r_3^3} &= 2 b_2. \end{aligned}$$

Wenn man aus den sechs Gleichungen (7) und (8) für x und dann aus jenen für y die fünf Größen $a_0\, a_1\, a_2\, r_1\, r_3$ bzw. $b_0\, b_1\, b_2\, r_1\, r_3$ eliminiert, so entstehen folgende zwei Gleichungen

$$(9)\qquad \begin{aligned} x_1 \tau_1 - x_2 \tau_2 \left(1 - \frac{\tau_1 \tau_3}{2 r_2^3}\right) + x_3 \tau_3 &= 0 \\ y_1 \tau_1 - y_2 \tau_2 \left(1 - \frac{\tau_1 \tau_3}{2 r_2^3}\right) + y_3 \tau_3 &= 0. \end{aligned}$$

Verbindet man sie durch die Multiplikatoren $-y_1$, $+x_1$ und $+y_3$, $-x_3$, so kommt:

$$\begin{aligned} \tau_3 (x_1 y_3 - x_3 y_1) &= \tau_2 (x_1 y_2 - x_2 y_1) \left(1 - \frac{\tau_1 \tau_3}{2 r_2^3}\right) \\ \tau_1 (x_1 y_3 - x_3 y_1) &= \tau_2 (x_2 y_3 - x_3 y_2) \left(1 - \frac{\tau_1 \tau_3}{2 r_2^3}\right) \end{aligned}$$

oder:

$$(10)\qquad n_1 = \frac{[r_2\,r_3]}{[r_1\,r_3]} = \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(1 + \frac{\tau_1\,\tau_3}{2\,r_2^{\,3}}\right); \qquad n_3 = \frac{[r_1\,r_2]}{[r_1\,r_3]} = \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(1 + \frac{\tau_1\,\tau_3}{2\,r_2^{\,3}}\right).$$

Man hat hieraus:

$$(11)\qquad \begin{aligned} n_1 + n_3 - 1 &= \frac{[r_1\,r_2] + [r_2\,r_3]}{[r_1\,r_3]} - 1 = \frac{\tau_1\,\tau_3}{2\,r_2^{\,3}} \\ \frac{n_3}{n_1} &= \frac{[r_1\,r_2]}{[r_2\,r_3]} = \frac{\tau_3}{\tau_1}. \end{aligned}$$

Diese wichtigen Formeln bilden die Grundlage der Bahnbestimmung.

Die erste Formel (11) zeigt, daß das kleine von den drei Planetenörtern selbst gebildete Dreieck $[r_1\,r_2] + [r_2\,r_3] - [r_1\,r_3]$ von der zweiten Ordnung in Bezug auf die Zwischenzeiten ist. Daraus folgt, daß man Glieder zweiter Ordnung unbedingt berücksichtigen muß, wenn man nicht das genannte Dreieck als verschwindend klein annehmen, d. h. auf jede Bestimmung der Ellipse verzichten will. Man kann auch leicht die geometrische Bedeutung von $n_1 + n_3 - 1$ angeben. Denn fällt man vom mittleren Planetenort und von der Sonne die Lote auf die Sehne zwischen dem ersten und dritten Ort, so verhalten sich diese einerseits wie die Flächen der Dreiecke

$$[r_1\,r_2] + [r_2\,r_3] - [r_1\,r_3] \quad \text{und} \quad [r_1\,r_3],$$

da diese die Sehne $\overline{13}$ gemeinsam haben und andererseits wie die Abschnitte, in die r_2 von der Sehne zerlegt wird. Der am Planetenort liegende Abschnitt f ist der Pfeil der Kurve, man hat also streng:

$$(12)\qquad \frac{f}{r_2 - f} = \frac{[r_1\,r_2] + [r_2\,r_3] - [r_1\,r_3]}{[r_1\,r_3]} = n_1 + n_3 - 1$$

und nach (11) genähert

$$(13)\qquad \frac{f}{r_2 - f} = \frac{\tau_1\,\tau_3}{2\,r_2^{\,3}},$$

oder etwas ungenauer:

$$(14)\qquad f = \frac{\tau_1\,\tau_3}{2\,r_2^{\,2}}.$$

Eine genauere Untersuchung, auf die wir hier nicht eingehen können, zeigt, daß an Stelle der Formeln (10) besser folgende verwendet werden:

$$(15)\qquad \begin{aligned} n_1 &= \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(1 + \frac{1}{6}\,\frac{\tau_2^{\,2} - \tau_1^{\,2}}{r_2^{\,3}} + \cdots\right) \\ n_3 &= \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(1 + \frac{1}{6}\,\frac{\tau_2^{\,2} - \tau_3^{\,2}}{r_2^{\,3}} - \cdots\right) \end{aligned}$$

Der Unterschied zwischen (10) und (15) ist:

$$\frac{1}{6}\frac{\tau_1}{\tau_2}\frac{\tau_3}{r_2^3}(\tau_3-\tau_1) \quad \text{bzw.} \quad -\frac{1}{6}\frac{\tau_3}{\tau_2}\frac{\tau_1}{r_2^3}(\tau_3-\tau_1)$$

und verschwindet also bei gleichen Zwischenzeiten τ_1 und τ_3. Man hat hierauf bei der Auswahl der zu einer Bahnbestimmung zu benutzenden Beobachtungen zu achten.

Die zweite Formel (11) zeigt, daß die beiden Dreiecke $[r_1 r_2]$ und $[r_2 r_3]$ sich wie die Zwischenzeiten verhalten. Da aber diese Dreiecke, die r_2 gemeinsam haben, sich wie die Lote von Punkt 1 und 3 auf r_2 oder wie die Abschnitte der Sehne $\overline{13}$ verhalten, so ergibt sich der Satz: Die Sehne zwischen dem ersten und dritten Ort wird vom mittleren Radiusvektor im Verhältnis der Zwischenzeiten geteilt.

9. Wir leiten an dieser Stelle noch einen merkwürdigen Ausdruck für den Parameter p der Ellipse ab, der die Bedeutung obiger Formeln beleuchtet. Man hat für die drei Örter

$$\frac{p}{r_1} = 1 + e\cos v_1$$

$$\frac{p}{r_2} = 1 + e\cos v_2$$

$$\frac{p}{r_3} = 1 + e\cos v_3\,.$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\sin(v_3 - v_2)$, $-\sin(v_3 - v_1)$, $+\sin(v_2 - v_1)$ und addiert, so kommt mit Beachtung der Identität

$$\sin(v_3 - v_2)\cos v_1 - \sin(v_3 - v_1)\cos v_2 + \sin(v_2 - v_1)\cos v_3 = 0$$

eine Formel, in der nach Multiplikation mit $r_1 r_2 r_3$ auf beiden Seiten sich sofort die Dreiecksflächen einführen lassen:

$$p([r_2 r_3] + [r_1 r_2] - [r_1 r_3]) = r_1 [r_2 r_3] + r_3 [r_2 r_3] - r_2 [r_1 r_3],$$

oder

$$(16) \qquad p = \frac{r_1 n_1 + r_3 n_3 - r_2}{n_1 + n_3 - 1}.$$

Man erkennt hier wieder, daß die Bestimmung des Hauptelementes der Ellipse von dem kleinen Dreieck $[r_2 r_3] + [r_{12}] - [r_1 r_3]$ bzw. vom Pfeil f abhängt. Auch folgender Ausdruck ergibt sich leicht:

$$p = 4 r_1 r_2 r_3 \frac{\sin\frac{1}{2}(v_3 - v_2)\sin\frac{1}{2}(v_2 - v_1)\sin\frac{1}{2}(v_3 - v_1)}{[r_1 r_2] + [r_2 r_3] - [r_1 r_3]},$$

oder folgender:

$$\frac{1}{p} = 2 r_1 r_2 r_3 \frac{\cos\frac{1}{2}(v_3 - v_2)\cos\frac{1}{2}(v_2 - v_1)\cos\frac{1}{2}(v_3 - v_1)}{[r_2 r_3][r_1 r_2]}(n_1 + n_3 - 1).$$

§ 109. Allgemeine Betrachtungen über Bahnbestimmung.

10. Um die sechs Bahnelemente eines in einer Ellipse um die Sonne laufenden Planeten oder Kometen bestimmen zu können, braucht man sechs Beobachtungsdaten, die der Natur der Sache nach nichts anderes sein können, als drei Paar zu verschiedenen Zeiten von der Erde aus gemessene Koordinaten. Wir wollen daher drei solche geozentrische Örter und ihr Verhältnis zu den heliozentrischen ins Auge fassen.

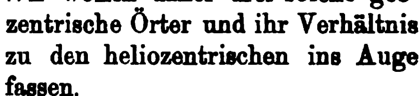


Fig. 266.

Es seien E_1, E_2, E_3 die drei zu den Beobachtungszeiten t_1, t_2, t_3 gehörigen Örter der Erde, von denen aus die Beobachtungen des Planeten angestellt sind; dieser befinde sich zu denselben Zeiten in den Punkten C_1, C_2, C_3. Die drei Erdörter sowohl, wie die drei Planetenörter liegen in je einer durch die Sonne S gehenden Ebene. Als bekannt sind anzunehmen die Erdörter und die Richtungen E_1C_1, E_2C_2, E_3C_3. Gesucht wird die durch S gehende Ebene, welche diese drei Richtungen in Punkten schneidet, die in einer Ellipse liegen, deren einer Brennpunkt S ist und die die Bedingung erfüllt, daß die elliptischen Sektoren

$$SC_1C_2 = k\sqrt{1+m}\sqrt{p}(t_2 - t_1)$$
$$SC_2C_3 = k\sqrt{1+m}\sqrt{p}(t_3 - t_2)$$

werden, d. h. daß das zweite und dritte Keplersche Gesetz erfüllt sind; hierin ist p der Parameter der Ellipse; die Masse m kann zu Null angenommen werden.

Zur besseren Übersicht schlagen wir um die Sonne eine Sphäre von beliebigem Radius und verzeichnen darauf die Punkte B_1, B_2, B_3, wo sie von den Richtungen SE_1, SE_2, SE_3 getroffen wird, ferner die Punkte H_1, H_2, H_3, wo sie von den Richtungen SC_1, SC_2, SC_3 getroffen wird; dann liegen E_1, E_2, E_3 in einem größten Kreis, der von der Erdbahn oder der Ekliptik ausgeschnitten wird, und H_1, H_2, H_3 liegen ebenfalls in einem größten Kreis, der von der Bahnebene des Planeten ausgeschnitten wird. Wir ziehen ferner durch S Parallele

zu den Richtungen E_1C_1, E_2C_2, E_3C_3 und nennen deren Schnitte mit der Sphäre G_1, G_2, G_3; die Koordinaten dieser Punkte, etwa bezogen auf die Ekliptik, sind bekannt. Die drei Punkte B_1, H_1, G_1, liegen auf einem größten Kreis, nämlich dem von der Ebene SC_1E_1 ausgeschnittenen; ebenso B_2, H_2, G_2 und B_3, H_3, G_3. Dagegen bilden G_1, G_2, G_3 ein sphärisches Dreieck, welches, wie wir jetzt nachweisen wollen, die Grundlage der Bahnbestimmung ist.

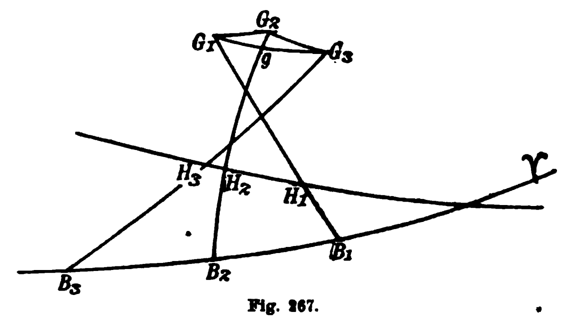


Fig. 267.

Nach dem zweiten Keplerschen Gesetz bewegt sich sowohl die Erde als der Planet so, daß vom Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Sektoren überstrichen werden. Unter der Voraussetzung kleiner Zwischenzeiten, also kleiner Bewegungen, die bei der ersten Bahnbestimmung immer gemacht werden muß, verhalten sich nun diese Sektoren sehr nahe wie die zugehörigen Dreiecksflächen, d. h. diese verhalten sich wie die Zwischenzeiten (Seite 618). Zieht man E_1E_3 (Fig. 266), das vom mittleren Radiusvektor der Erde $SE_2 = R_2$ in Q getroffen werde, ebenso C_1C_3, das vom mittleren Radiusvektor des Planeten $SC_2 = r_2$ in P getroffen werde, so verhalten sich die Dreiecke SE_1E_2 und SE_2E_3 einerseits und SC_1C_2 und SC_2C_3 andererseits wie $t_2 - t_1$ zu $t_3 - t_2$, und da die Dreiecke die Grundlinien SE_2 bzw. SC_2 gemeinsam haben, verhalten sie sich wie die Höhen oder wie die Abschnitte der Sehne: E_1Q zu QE_3 bzw. C_1P zu PC_3. Daraus folgt, daß diese Sehnenabschnitte in der Erdbahn und in der Planetenbahn sich wie die Zeiten $t_2 - t_1$ und $t_3 - t_2$ verhalten, und daß also die Punkte Q und P die Sehnen E_1E_3 und C_1C_3 in demselben Verhältnis teilen:

$$\frac{E_1Q}{QE_3} = \frac{C_1P}{PC_3}.$$

Wir können dies auch so ausdrücken: die Punkte Q und P bewegen sich auf der Sehne E_1E_3 bzw. C_1C_3 mit gleichförmiger Geschwindigkeit, wenn die Erde und der Planet die Kurventeile $E_1E_2E_3$ bzw. $C_1C_2C_3$ mit veränderlicher Geschwindigkeit durchlaufen.

Dies vorausgesetzt, denken wir uns die Sehne C_1C_3, indem wir den Punkt P auf der Geraden PQ gleiten lassen, parallel zu sich selbst verschoben, bis sie die Sehne E_1E_3 in Q schneidet, und die Lage $C_1'C_3'$ annimmt (Fig. 268). Dann haben wir in den beiden Dreiecken QE_1C_1' und QE_3C_3':

$$\frac{QE_1}{QE_3} = \frac{QC_1'}{QC_3'}$$

und folglich ist $E_1 C_1'$ parallel zu $E_3 C_3'$. Da auch $C_1 C_1'$ parallel $C_3 C_3'$ und parallel PQ ist, so sind die beiden Ebenen $E_1 C_1 C_1'$ und $E_3 C_3 C_3'$ zueinander und zur Linie QP parallel. Verschiebt man jetzt beide Ebenen und QP parallel zu sich, bis sie durch den Mittelpunkt der oben betrachteten Sphäre gehen, so schneiden sie auf dieser den größten Kreis aus, der die Richtungen $E_1 C_1$ und $E_3 C_3$ enthält, d. h. den größten Kreis $G_1 G_3$ und auf diesem selben Kreis muß der Punkt liegen, der die Richtung QP anzeigt. Der die Richtung QP anzeigende Punkt muß aber ferner auch auf dem größten Kreis $B_2 G_2$ liegen, da die Linie QP in der Ebene $S C_2 E_2$ liegt. Folglich wird durch den Schnittpunkt g der beiden größten Kreise $G_1 G_3$ und $B_2 G_2$ die Richtung der Verbindungslinie der Sehnenschnittpunkte QP angezeigt und da G_2 die Richtung $E_2 C_2$ anzeigt, so ist der Bogen $G_2 g$ Fig. 267 identisch mit dem Winkel $QRE_2 = \sigma$ (Fig. 266). Wir werden nachher sehen, wie hiermit die geozentrische Distanz $E_2 C_2 = \varrho_2$ bestimmt werden kann, und heben hier nur hervor, daß wenn G_2 mit g zusammenfällt, d. h. wenn G_1, G_2, G_3 auf einem größten Kreis liegen, dies identisch ist mit der Annahme, daß Erde und Planet sich geradlinig mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen, d. h. mit dem Verzicht auf jede Bahnbestimmung.

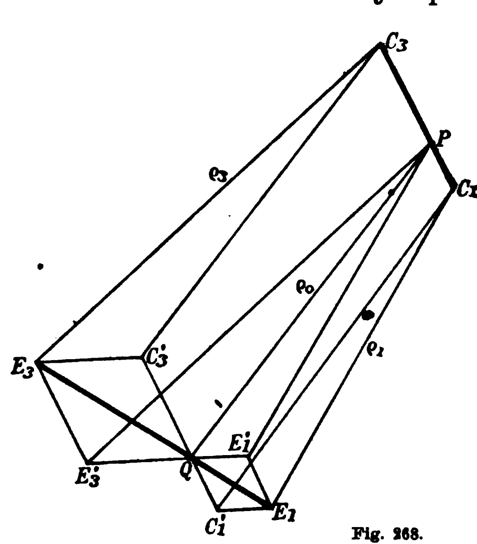


Fig. 268.

Aus obiger Konstruktion (Fig. 268) können noch weitere Schlüsse gezogen werden. Zunächst der, daß aus unserer Hypothese von der Proportionalität der Dreiecksflächen mit der Zeit notwendig folgt, daß die Richtung der Sehne $E_1 E_3$ in den größten Kreis $G_1 G_3$ fällt. Wir werden dies später auf analytischem Wege bestätigt finden. Weiter verschieben wir die parallelen Ebenen $C_1 E_1 C_1'$ und $C_3 E_3 C_3'$ parallel zu sich selbst, bis sie durch den Punkt Q hindurchgehen; in dieser Ebene liegt dann auch $QP = \varrho_0$ und es gelangen C_1 und C_3 nach P, C_1' und C_3' nach Q, E_1 nach E_1', E_3 nach E_3'; ferner ist

$$E_1'P = E_1 C_1 = \varrho_1$$
$$E_3'P = E_3 C_3 = \varrho_3;$$

endlich bilden $E_1'Q$ und $E_3'Q$ eine Gerade, da Winkel $C_1C_1'E_1 = 180^\circ - E_3C_3'C_3$, und die Abschnitte derselben $E_1'Q$ und $E_3'Q$ verhalten sich wie $t_2 - t_1$ zu $t_3 - t_2$. In dem Dreieck $E_1'PE_3'$ haben nun aber auch noch die Winkel, welche ϱ_1 und ϱ_3 mit ϱ_0 bilden eine einfache Bedeutung; denn man sieht sofort, daß sie die Bögen $G_1g = \omega_1$ und $G_3g = \omega_3$ der Fig. 267 sind, die auf trigonometrischem Wege aus den gegebenen Daten berechnet werden können. Folglich hat man erstens:

$$\frac{\varrho_1}{E_1'Q} = \frac{\sin PQE_1'}{\sin\omega_1}, \qquad \frac{\varrho_3}{E_3'Q} = \frac{\sin E_3'QP}{\sin\omega_3},$$

oder

$$\frac{\varrho_3}{\varrho_1} = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}\,\frac{\sin\omega_1}{\sin\omega_3},$$

d. h. man hat für das Verhältnis der beiden äußeren geozentrischen Distanzen einen völlig bekannten Ausdruck. Diese schon von Lambert aufgestellte, gewöhnlich nach Olbers benannte Relation spielt in der parabolischen Bahnbestimmung eine große Rolle. Zweitens ergeben sich Ausdrücke von ϱ_1 und ϱ_3 in ϱ_0. Nennt man die Winkel bei E_1' und E_3' bzw. ε_1 und ε_3, so hat man zu deren Bestimmung:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = 180^\circ - (\omega_1 + \omega_3)$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varepsilon_3 + \varepsilon_1)} = \frac{\varrho_1 - \varrho_3}{\varrho_1 + \varrho_3} = \frac{1 - \frac{\varrho_3}{\varrho_1}}{1 + \frac{\varrho_3}{\varrho_1}}$$

und dann:

$$\varrho_1 = \varrho_0 \cdot \frac{\sin(\omega_1 + \varepsilon_1)}{\sin\varepsilon_1}, \quad \varrho_3 = \varrho_0 \cdot \frac{\sin(\omega_3 + \varepsilon_3)}{\sin\varepsilon_3}.$$

Man kann zwar ϱ_0 aus ϱ_2 bestimmen, oder man kann es mit geringer Vernachlässigung gar damit identifizieren; man macht aber von diesen Formeln doch nur wenig Gebrauch, da man in dem Ausdruck für die Sehne ein besseres Mittel besitzt, die richtigen ϱ_1 und ϱ_3 abzuleiten.

Wir gehen jetzt dazu über, die gewonnenen Einsichten für die Bahnbestimmung zu verwerten und beginnen mit der Ellipse. Dabei wollen wir zuerst ein ganz einfaches Verfahren einschlagen und dann erst zu den strengeren Entwicklungen übergehen.

§ 110. Bahnbestimmung der Ellipse.

11. Da die Punkte $B_1, B_2, B_3, G_1, G_2, G_3$ (Fig. 267) durch ihre Koordinaten gegeben sind, so kann daraus durch ein trigonometrisches Verfahren die Größe des Bogens $gG_2 = \sigma$ abgeleitet werden, wie

nachher gezeigt werden soll; ferner kann der Winkel $B_2 G_2 = \delta_2 = 180^0 - SE_2 C_2$ (Fig. 266) bestimmt werden, und endlich ergibt die bekannte Erdbewegung die Strecke QE_2. Daraus folgt, daß im ebenen Dreieck $QE_2 R$ die Winkel und eine Seite als bekannt angenommen werden dürfen und daß folglich die Seite $E_2 R$, die wir gleich k setzen wollen, durch Rechnung gefunden werden kann. Nun hat man weiter (Fig. 269)

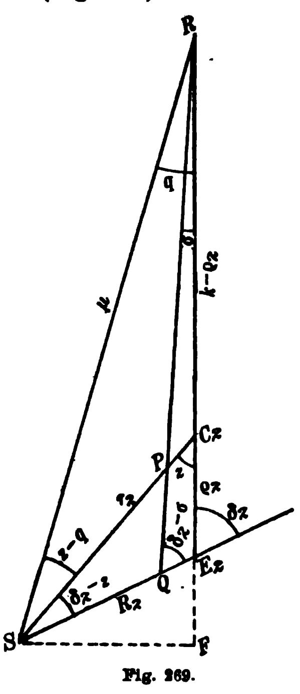


Fig. 269.

$$\text{(A)} \qquad \frac{RC_2}{RE_2} = \frac{PC_2 \sin SPQ}{QE_2 \sin SQP} = \frac{PC_2}{QE_2} \cdot \frac{SQ}{SP}$$

und nach Seite 638 ist genähert, wenn $SC_2 = r_2$, $SE_2 = R_2$ gesetzt wird:

$$\frac{PC_2}{SP} = \frac{\tau_1 \tau_3}{2 r_2^3}$$

$$\frac{QE_2}{SQ} = \frac{\tau_1 \tau_3}{2 R_2^3};$$

folglich wird

$$\frac{RC_2}{RE_2} = \frac{R_2^3}{r_2^3}$$

oder wenn man die geozentrische Distanz des Planeten $E_2 C_2 = \varrho_2$ setzt:

$$\text{(1)} \qquad \frac{k - \varrho_2}{k} = \frac{R_2^3}{r_2^3}.$$

Ferner hat man aus dem Dreieck $SC_2 E_2$

$$\text{(2)} \qquad r_2^2 = R_2^2 + \varrho_2^2 + 2 R_2 \varrho_2 \cos \delta_2 .$$

Die aus den Gesetzen der Planetenbewegung folgende Gleichung (1) verbunden mit der rein geometrischen Beziehung (2) gestattet die Bestimmung der beiden Unbekannten ϱ_2 und r_2, d. h. der geozentrischen und heliozentrischen Distanz des Planeten. Wenn man (1) so schreibt

$$\varrho_2 = k\left(1 - \frac{R_2^3}{r_2^3}\right)$$

und diesen Wert von ϱ_2 in (2) einträgt, so erscheint die Gleichung achten Grades in r_2:

$$\text{(3)} \qquad R_2^2 + k^2 \left(1 - \frac{R_2^3}{r_2^3}\right)^2 + 2 R_2 k \left(1 - \frac{R_2^3}{r_2^3}\right) \cos \delta_2 - r_2^2 = 0,$$

aus der r_2 ermittelt werden kann. Sie reduziert sich auf den siebenten Grad, da sie offenbar durch $r_2 = R_2$ befriedigt wird. Daß die Erdbahn selbst als eine Lösung des Problems erscheinen muß, versteht sich von selbst.

Die Auflösung von (1) und (2) nach r_2 und ϱ_2 kann auf eine elegantere Weise geleistet werden, so daß man der Gleichung (3) nicht bedarf. Führt man nämlich im Dreieck SC_2E_2 (Fig. 269) den Winkel $SC_2E_2 = z$ ein, so kann man die Gl. (2) durch folgende einfachere ersetzen:

$$r_2 = \frac{R_2 \sin \delta_2}{\sin z} \qquad \varrho_2 = \frac{R_2 \sin(\delta_2 - z)}{\sin z} \tag{4}$$

und muß nun nur noch (1) zur Bestimmung von z umgestalten. Nennt man $SR = \mu$ und Winkel $SRE_2 = q$ und fällt SF senkrecht auf RE_2, so hat man sofort

$$\begin{aligned} \mu \sin q &= R_2 \sin \delta_2 \\ \mu \cos q &= R_2 \cos \delta_2 + k, \end{aligned} \tag{5}$$

woraus μ und q berechnet werden können; ferner gibt das Dreieck SC_2R, in welchem $C_2R = k - \varrho_2$ ist:

$$k - \varrho_2 = \mu \frac{\sin(z - q)}{\sin z} = r_2 \frac{\sin(z - q)}{\sin q}.$$

Trägt man dies in (1) ein, so kommt:

$$k \frac{R_2{}^3}{r_2{}^3} = \mu \frac{\sin(z - q)}{\sin z}$$

oder wenn nach (4) r_2 durch seinen Wert in z ersetzt wird:

$$\sin(z - q) = \frac{k R_2{}^3}{\mu (R_2 \sin \delta_2)^3} \sin z^4.$$

Setzt man also die bekannte Größe

$$\frac{k R_2{}^3}{\mu (R_2 \sin \delta_2)^3} = m, \tag{6}$$

so hat man zur Bestimmung von z die einfache Gleichung

$$\sin(z - q) = m \sin z^4, \tag{7}$$

die gewöhnlich nach Gauß, der sie zuerst aufstellte, benannt wird. Sie muß durch Versuche aufgelöst werden, wobei q als erster Näherungswert von z dienen kann, da bei ersten Bahnbestimmungen z meist ein kleiner Winkel ist.

Ist z durch (7) ermittelt, so erhält man durch (4) r_2 und ϱ_2 und damit ist der erste und wichtigste Schritt der Bahnbestimmung getan. Ehe wir weitergehen, wollen wir die liegengebliebenen Bestimmungen von σ, δ_2, $\overline{QE_2}$ und k nachholen.

Wir bezeichnen die gegebenen geozentrischen Koordinaten des Planeten bezogen auf die Ekliptik für die drei Zeitpunkte mit $\lambda_1 \beta_1$ $\lambda_2 \beta_2$ $\lambda_3 \beta_3$; für die Erde seien die den Jahrbüchern entnommenen Radienvektoren $R_1\, R_2\, R_3$ und die Längen $L_1\, L_2\, L_3$; die Breiten werden Null gesetzt. Hierdurch sind die Punkte $G_1\, G_2\, G_3\, B_1\, B_2\, B_3$ auf der Sphäre festgelegt. Der durch G_1 und G_3 gelegte größte Kreis treffe

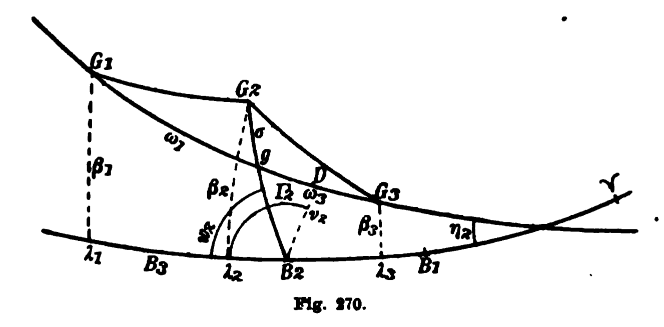


Fig. 270.

die Ekliptik in der Länge H_2 und bilde mit ihr den Winkel η_2; man hat dann:

$$\operatorname{tg} \eta_2 \sin(\lambda_1 - H_2) = \operatorname{tg} \beta_1$$
$$\operatorname{tg} \eta_2 \sin(\lambda_3 - H_2) = \operatorname{tg} \beta_3$$

und kann diese Gleichungen leicht so umgestalten, daß daraus η_2 und H_2 berechnet werden können; schreibt man die zweite so:

$$\operatorname{tg} \beta_3 = \operatorname{tg} \eta_2 \sin(\lambda_1 - H_2 + \lambda_3 - \lambda_1) = \operatorname{tg} \eta_2 \sin(\lambda_1 - H_2) \cos(\lambda_3 - \lambda_1) + \operatorname{tg} \eta_2 \cos(\lambda_1 - H_2) \sin(\lambda_3 - \lambda_1)$$

oder

$$\operatorname{tg} \beta_3 = \operatorname{tg} \beta_1 \cos(\lambda_3 - \lambda_1) + \operatorname{tg} \eta_2 \cos(\lambda_1 - H_2) \sin(\lambda_3 - \lambda_1),$$

so erhält man die zweite der folgenden Gleichungen

$$(8) \qquad \begin{cases} \operatorname{tg} \eta_2 \sin(\lambda_1 - H_2) = \operatorname{tg} \beta_1 \\ \operatorname{tg} \eta_2 \cos(\lambda_1 - H_2) = \dfrac{\operatorname{tg} \beta_3 - \operatorname{tg} \beta_1 \cos(\lambda_3 - \lambda_1)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)}, \end{cases}$$

welche η_2 und H_2 mit Sicherheit ermitteln lassen.

Zieht man den Bogen größten Kreises: $\overline{G_2 B_2} = \delta_2$ und nennt dessen Winkel mit der Ekliptik w_2, so ergeben sich δ_2 und w_2 aus:

$$(9) \qquad \begin{cases} \sin w_2 \sin \delta_2 = \sin \beta_2 \\ \cos w_2 \sin \delta_2 = \cos \beta_2 \sin(\lambda_2 - L_2) \\ \cos \delta_2 = \cos \beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2); \end{cases}$$

man kann $\sin \delta_2$ immer positiv nehmen, wenn man w_2 von 0° bis 360° laufen läßt.

Fällt man vom zweiten Erdort das Lot $\overline{B_2 D} = \nu_2$ auf den durch den ersten und dritten Planetenort gelegten größten Kreis und nennt dessen Neigung gegen die Ekliptik Γ_2, so ergeben sich diese Größen aus dem Dreieck $H_2 B_2 D$:

$$(10) \qquad \begin{cases} \cos \nu_2 \sin \Gamma_2 = \cos \eta_2 \\ \cos \nu_2 \cos \Gamma_2 = -\sin \eta_2 \cos (L_2 - H_2) \\ \sin \nu_2 = \sin \eta_2 \sin (L_2 - H_2) \end{cases}$$

(ν_2 kann man zwischen -90° und $+90^\circ$ annehmen).

Schließlich gibt das Dreieck $B_2 g D$, in welchem $\overline{B_2 g} = \delta_2 - \sigma$ ist:

$$\begin{aligned} \sin (\delta_2 - \sigma) \sin (B_2 g D) &= \sin \nu_2 \\ \cos (\delta_2 - \sigma) \sin (B_2 g D) &= \cos \nu_2 \cos (\Gamma_2 - w_2) \\ \cos (B_2 g D) &= \cos \nu_2 \sin (\Gamma_2 - w_2) \end{aligned}$$

also:

$$(11) \qquad \operatorname{tg} (\delta_2 - \sigma) = \operatorname{tg} \nu_2 \sec (\Gamma_2 - w_2),$$

womit nun der Winkel σ berechnet werden kann. $\delta_2 - \sigma$ kann kleiner als 180° angenommen werden.

Für den Pfeil $QE_2 = f$ der Erdbahn kann ein rein geometrischer, strenger Wert abgeleitet werden.

Setzt man im Dreieck SE_1E_3 (Fig. 266), in welchem der Winkel bei S gleich $L_3 - L_1$ ist, die Winkel bei E_1 und E_3 beziehungsweise γ_1 und γ_3, so erhält man hierfür:

$$(12) \qquad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_3) &= 90^\circ - \tfrac{1}{2}(L_3 - L_1) \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_3) &= \frac{R_3 - R_1}{R_3 + R_1} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_3) \end{aligned}$$

und hat dann

$$(13) \qquad f = R_2 - \frac{R_1 \sin \gamma_1}{\sin (\gamma_1 + L_2 - L_1)} = R_2 - \frac{R_3 \sin \gamma_3}{\sin (\gamma_3 + L_3 - L_2)}.$$

Schließlich gibt das Dreieck QE_2R (Fig. 269):

$$(14) \qquad k = \frac{f \sin (\delta_2 - \sigma)}{\sin \sigma},$$

womit sämtliche oben eingeführte Größen ermittelt sind.

12. Der zweite Schritt, den die Lösung des Problems zu machen hat, ist die Ableitung der beiden äußeren geozentrischen Distanzen ϱ_1 und ϱ_3.



Wir haben hierfür oben bereits ein Verfahren angegeben und wollen nun ein zweites, weit schärferes kennen lernen, das uns zugleich den Übergang zu einer genaueren Behandlung des Problems überhaupt verschafft. Wir stellen hierzu die analytische Bedingung dafür auf, daß die drei Planetenörter in einer Ebene mit der Sonne liegen. Wir wählen ein Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt in der Sonne, dessen xy-Ebene in die Ekliptik fällt und dessen x-Achse durch den Frühlingspunkt geht. Die rechtwinkligen Koordinaten der drei Planetenörter lassen sich dann nach Seite 483 in folgender Form darstellen:

$$\begin{array}{l|l|l}
x_1 = r_1 \sin a \sin(A+u_1) & x_2 = r_2 \sin a \sin(A+u_2) & x_3 = r_3 \sin a \sin(A+u_3), \\
y_1 = r_1 \sin b \sin(B+u_1) & y_2 = r_2 \sin b \sin(B+u_2) & y_3 = r_3 \sin b \sin(B+u_3), \\
z_1 = r_1 \sin c \sin(C+u_1) & z_2 = r_2 \sin c \sin(C+u_2) & z_3 = r_3 \sin c \sin(C+u_3),
\end{array}$$

wo A, B, C, a, b, c lediglich Funktionen der Bestimmungsstücke Ω und i der Bahnebene sind, und diese Form drückt eben aus, daß die drei Örter in der genannten, durch den Anfangspunkt gehenden Ebene liegen. Multipliziert man die ersten Gleichungen der drei Gruppen der Reihe nach mit $\sin(u_3-u_2)$, $-\sin(u_3-u_1)$, $\sin(u_2-u_1)$ und addiert, so erhält man unter Beachtung der bekannten Identität

$$\sin(A+u_1)\sin(u_3-u_2) - \sin(A+u_2)\sin(u_3-u_1) + \sin(A+u_3)\sin(u_2-u_1) = 0$$

die Gleichung

$$\frac{x_1}{r_1}\sin(u_3-u_2) - \frac{x_2}{r_2}\sin(u_3-u_1) + \frac{x_3}{r_3}\sin(u_2-u_1) = 0$$

oder wenn man mit $r_1 r_2 r_3$ multipliziert und beachtet, daß

$$\begin{aligned}
r_2 r_3 \sin(u_3-u_2) &= [r_2 r_3] \\
r_1 r_3 \sin(u_3-u_1) &= [r_1 r_3] \\
r_1 r_2 \sin(u_2-u_1) &= [r_1 r_2]
\end{aligned}$$

die doppelten von den Radienvektoren gebildeten Dreiecksflächen sind:

$$x_1 [r_2 r_3] - x_2 [r_1 r_3] + x_3 [r_1 r_2] = 0.$$

Setzt man noch

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = n_1, \quad \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = n_3,$$

so erscheint die erste der drei folgenden Gleichungen; die beiden anderen ergeben sich aus derselben Behandlung der zweiten und dritten Gleichungen obiger Gruppen:

$$x_2 = n_1 x_1 + n_3 x_3,$$
$$y_2 = n_1 y_1 + n_3 y_3,$$
$$z_2 = n_1 z_1 + n_3 z_3.$$

Jede dieser Gleichungen stellt die Bedingung der Ebene dar; sie werden aber unabhängig voneinander, wenn man für n_1 und n_3 nicht ihre geometrischen Ausdrücke, sondern die aus den Gesetzen der Planetenbewegung hervorgehenden substituiert.

Führt man jetzt statt der rechtwinkligen Koordinaten die Polarkoordinaten ein:

$$x = r \cos b \cos l, \quad y = r \cos b \sin l, \quad z = r \sin b$$

wo l und b die heliozentrischen Längen und Breiten bedeuten, so wird nach (26) Seite 486:

$$(15) \quad \begin{aligned}
(\varrho_2 \cos\beta_2 \cos\lambda_2 + R_2 \cos L_2) &= n_1 (\varrho_1 \cos\beta_1 \cos\lambda_1 + R_1 \cos L_1) \\
&\quad + n_3 (\varrho_3 \cos\beta_3 \cos\lambda_3 + R_3 \cos L_3) \\
(\varrho_2 \cos\beta_2 \sin\lambda_2 + R_2 \sin L_2) &= n_1 (\varrho_1 \cos\beta_1 \sin\lambda_1 + R_1 \sin L_1) \\
&\quad + n_3 (\varrho_3 \cos\beta_3 \sin\lambda_3 + R_3 \sin L_3) \\
\varrho_2 \sin\beta_2 &= n_1 \varrho_1 \sin\beta_1 \\
&\quad + n_3 \varrho_3 \sin\beta_3 .
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen bezeichnet man als die Grundgleichungen des Problems und man kann in der Tat von ihnen ausgehend die vollständige Lösung durchführen. Wir haben oben einen anderen Weg eingeschlagen, der uns zunächst geeigneter erschien, das innere Wesen des Problems zu durchschauen; wir wollen aber hier anführen, daß man durch Elimination von ϱ_1 und ϱ_3 aus (15) eine Gleichung für ϱ_2 erhält, die mit der oben (Seite 644) direkt aufgestellten im wesentlichen identisch ist und die uns weiter unten noch ausführlicher beschäftigen wird. Zunächst sollen uns die Gl. (15) dazu dienen, die geozentrischen Distanzen ϱ_1 und ϱ_3 zu ermitteln. Hierzu bietet sich als einfachster und sicherster Weg der dar, ϱ_1 und ϱ_3 durch ϱ_2 auszudrücken; es können dann erstere am schnellsten den mit den Hypothesen wechselnden Werten von ϱ_2 angepaßt werden. Der Eliminationsprozeß ergibt ohne Mühe

$$(16) \quad \begin{aligned}
n_1 \varrho_1 \cos\beta_1 &= M_1 \varrho_2 \cos\beta_2 + M_1' (N_1 - n_1) \\
n_3 \varrho_3 \cos\beta_3 &= M_3 \varrho_2 \cos\beta_2 + M_3' (N_3 - n_3)
\end{aligned}$$

Hierin ist gesetzt:



$$Z_1 = \sin(\lambda_3 - L_3)\,\mathrm{tg}\,\beta_2 - \sin(\lambda_2 - L_3)\,\mathrm{tg}\,\beta_3$$
$$D_1 = \sin(\lambda_3 - L_3)\,\mathrm{tg}\,\beta_1 - \sin(\lambda_1 - L_3)\,\mathrm{tg}\,\beta_3$$
$$Z_3 = \sin(\lambda_2 - L_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_1 - \sin(\lambda_1 - L_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2$$
$$D_3 = \sin(\lambda_3 - L_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_1 - \sin(\lambda_1 - L_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_3$$

$$M_1 = \frac{Z_1}{D_1} \qquad M_3 = \frac{Z_3}{D_3}$$

$$M_1' = \frac{\sin(L_3 - L_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_3}{D_1} R_1 \qquad M_3' = \frac{\sin(L_3 - L_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{D_3} R_3$$

$$N_1 = \frac{R_2 R_3 \sin(L_3 - L_2)}{R_1 R_3 \sin(L_3 - L_1)} \qquad N_3 = \frac{R_1 R_2 \sin(L_2 - L_1)}{R_1 R_3 \sin(L_3 - L_1)}.$$

Diese Größen sind völlig bekannt und von jeder Hypothese unabhängig. Für n_1 und n_3 werden nach der ersten Berechnung von ϱ_2 und r_2 die Ausdrücke gebraucht (Seite 638)

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(1 + \frac{1}{6}\,\frac{\tau_2^2 - \tau_1^2}{r_2^3}\right)$$
$$n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(1 + \frac{1}{6}\,\frac{\tau_2^2 - \tau_3^2}{r_2^3}\right),$$

die man behufs bequemerer Berechnung wie folgt umgestalten kann:

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2} + \frac{\tau_1\tau_3}{6}\,\frac{1 + \frac{\tau_1}{\tau_2}}{r_2^3} \tag{17}$$
$$n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2} + \frac{\tau_1\tau_3}{6}\,\frac{1 + \frac{\tau_3}{\tau_2}}{r_2^3}.$$

Die verbesserten Werte von n_1 und n_3, die man nach Durchrechnung der ersten Hypothese, d. h. nach Ermittelung der

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\quad u_3 - u_2 = 2f_1,\quad u_2 - u_1 = 2f_3,\quad u_3 - u_1 = 2f_2,\quad y_1,\ y_2,\ y_3$$

zu benutzen hat, wollen wir hier gleich angeben. Es ist (s. unten)

$$n_1 = \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = \frac{\tau_1}{\tau_2}\,\frac{y_2}{y_1} = \frac{\tau_1}{\tau_2} + \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(\frac{y_2}{y_1} - 1\right) \tag{18}$$
$$n_3 = \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = \frac{\tau_3}{\tau_2}\,\frac{y_2}{y_3} = \frac{\tau_3}{\tau_2} + \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(\frac{y_2}{y_3} - 1\right),$$

wo mit $y_1\, y_2\, y_3$ die Verhältnisse Sektor durch Dreieck bezeichnet sind, deren Berechnung wir in Nr. 5 gezeigt haben.

13. Die Auflösung von (16) gibt ϱ_1 und ϱ_3 und es sind also jetzt die vollständigen geozentrischen Koordinaten $\varrho\,\lambda\,\beta$ für alle drei Örter in erster Näherung bekannt geworden. Die heliozentrischen Koordinaten r, l, b sind daraus leicht abzuleiten; man bedient sich am besten der Gl. (28) (Seite 487)

$$(19)\qquad \begin{aligned} r\cos b\cos(l-L) &= \varrho\cos\beta\cos(\lambda-L)+R\\ r\cos b\sin(l-L) &= \varrho\cos\beta\sin(\lambda-L)\\ r\sin b &= \varrho\sin\beta. \end{aligned}$$

Aus irgend zwei von den drei Punkten $r\,l\,b$, am sichersten natürlich aus den beiden äußeren, läßt sich die Lage der Bahnebene bestimmen; in der Tat entnimmt man den Gl. (29) (Seite 487)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} i\sin(l_1-\Omega) &= \operatorname{tg} b_1\\ \operatorname{tg} i\sin(l_3-\Omega) &= \operatorname{tg} b_3, \end{aligned}$$

woraus

$$(20)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg} i\sin(l_1-\Omega) = \operatorname{tg} b_1\\ \operatorname{tg} i\cos(l_1-\Omega) = \dfrac{\operatorname{tg} b_3-\operatorname{tg} b_1\cos(l_3-l_1)}{\sin(l_3-l_1)}. \end{cases}$$

Die Argumente der Breite $u_1\,u_2\,u_3$ ergeben sich dann aus denselben Formeln (29) (S. 487):

$$(21)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg} u_1 = \operatorname{tg}(l_1-\Omega)\sec i\\ \operatorname{tg} u_2 = \operatorname{tg}(l_2-\Omega)\sec i\\ \operatorname{tg} u_3 = \operatorname{tg}(l_3-\Omega)\sec i. \end{cases}$$

14. Durch die Radienvektoren r_1, r_2, r_3, die von ihnen eingeschlossenen Winkel u_2-u_1, u_3-u_2, u_3-u_1 und durch die Zwischenzeiten t_2-t_1, t_3-t_2, t_3-t_1 kann man die Verhältnisse Sektor durch Dreieck bestimmen. Wie man von ihnen zu den Elementen gelangt ist bereits Seite 629 gezeigt. Es ist jedoch nicht am Platz, diese Bestimmung schon jetzt auszuführen, sondern man wird die erlangten y zunächst dazu benutzen, die in der ersten Näherung gemachten Annahmen zu verbessern. In erster Linie wird man die Beobachtungszeiten für Planetenaberration korrigieren, d. h. man wird statt $t_1\,t_2\,t_3$ benutzen:

$$t_1^0 = t_1 - A\varrho_1, \ldots$$

wo A die Lichtzeit ist. Sodann gingen wir behufs erster Ermittelung von ϱ_2 und r_2 von den Formeln aus:

$$\frac{PC_2}{SP} = \frac{\tau_1\tau_3}{2r_2^3} \qquad \frac{QE_2}{SQ} = \frac{\tau_1\tau_3}{2R_2^3}$$

die nur genähert richtig sind, während die strengen Formeln lauten (Seite 638)

$$\frac{PC_2}{SP} = \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} + \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} - 1 = n_1 + n_3 - 1$$

$$\frac{QE_2}{SQ} = \frac{[R_1 R_2]}{[R_1 R_3]} + \frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_3]} - 1 = N_1 + N_3 - 1.$$

Die y gestatten, für $n_1 + n_3 - 1$ einen verbesserten Wert einzuführen. Nennt man (12) den doppelten von den Radienvektoren r_1 und r_2 begrenzten elliptischen Sektor, so ist

$$\frac{(12)}{[r_1 r_2]} = y_3$$

und ebenso:

$$\frac{(23)}{[r_2 r_3]} = y_1 \qquad \frac{(13)}{[r_1 r_3]} = y_2.$$

Beachtet man nun, daß streng

$$\frac{(12)}{(13)} = \frac{\tau_3}{\tau_2} \qquad \frac{(23)}{(13)} = \frac{\tau_1}{\tau_2},$$

so wird

$$(22) \qquad \begin{cases} n_1 = \dfrac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = \dfrac{(23)}{y_1} \dfrac{y_2}{(13)} = \dfrac{\tau_1}{\tau_2} \dfrac{y_2}{y_1} \\ n_3 = \dfrac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = \dfrac{(12)}{y_3} \dfrac{y_2}{(13)} = \dfrac{\tau_3}{\tau_2} \dfrac{y_2}{y_3} \end{cases}$$

und daher:

$$(23) \qquad \frac{PC_2}{SP} = n_1 + n_3 - 1 = \frac{\tau_1}{\tau_2} \frac{y_2}{y_1} + \frac{\tau_3}{\tau_2} \frac{y_2}{y_3} - 1$$

$$= \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(\frac{y_2}{y_1} - 1\right) + \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(\frac{y_2}{y_3} - 1\right),$$

da $\tau_1 + \tau_3 = \tau_2$ ist.

Für $QE_2 : SQ$ hätten wir von Anfang an den strengen Wert statt des genäherten benutzen können. Wir wollen dies jetzt tun und gelangen zu einer Formel, die auch für die erste Näherung der früher gegebenen vorzuziehen ist. Man hat nach (13) (Seite 638)

$$(24) \qquad \frac{SQ}{QE_2} = \frac{R_2 - f}{f} = \frac{R_1 \sin \gamma_1}{f \sin(\gamma_1 + L_2 - L_1)} = \frac{R_3 \sin \gamma_3}{f \sin(\gamma_3 + L_3 - L_2)}.$$

Stellt man nun die Gleichung (A) (Seite 644) den Ausdrücken (23) und (24) gemäß zusammen, so folgt statt (1) (Seite 644) jetzt streng:

$$\frac{k - \varrho_2}{k} = (n_1 + n_3 - 1) \frac{R_1 \sin \gamma_1}{f \sin(\gamma_1 + L_2 - L_1)}$$

oder nach (14)

$$\varrho_2 = k - \frac{\sin(\delta_2 - \sigma)}{\sin\sigma} \frac{R_1 \sin\gamma_1}{\sin(\gamma_1 + L_2 - L_1)}(n_1 + n_3 - 1).$$

Mit Einführung der konstanten und bekannten Größe

$$h = \frac{\sin(\delta_2 - \sigma)}{\sin\sigma} \frac{R_1 \sin\gamma_1}{\sin(\gamma_1 + L_2 - L_1)} \tag{25}$$

haben wir kurz:

$$\varrho_2 = k - h(n_1 + n_3 - 1). \tag{26}$$

Man überzeugt sich sofort, daß diese Gleichung für die erste Näherung sowohl als für die folgenden verwendet werden kann. Denn schreibt man sie in der Form

$$\varrho_2 = k - \frac{\frac{1}{2} h\, 2 r_2^3 (n_1 + n_3 - 1)}{r_2^3}, \tag{26a}$$

so hat man für $Q = 2r_2^3(n_1 + n_3 - 1)$ nach Seite 638 vom Anfang an den Näherungswert $\tau_1 \tau_3$, für alle folgenden aber nach (23)

$$Q = 2r_2^3\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\left(\frac{y_2}{y_1} - 1\right) + \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(\frac{y_2}{y_3} - 1\right)\right) \tag{27}$$

und hat in jedem Falle die Gleichung

$$\varrho_2 = k - \frac{l}{r_2^3} \tag{28}$$

weiter zu behandeln, in der gesetzt ist:

$$l = \tfrac{1}{2} h Q. \tag{29}$$

Die Verbindung von (28) mit der geometrischen Beziehung zwischen r_2 und ϱ_2 geschieht ganz in der Seite 645 auseinandergesetzten Weise; wir stellen ohne weitere Erläuterung die Formeln zusammen:

$$\begin{aligned} \mu \sin q &= R_2 \sin \delta_2 \\ \mu \cos q &= R_2 \cos \delta_2 + k \\ \frac{l}{\mu (R_2 \sin \delta_2)^3} &= m \\ \sin(z - q) &= m \sin z^4 \end{aligned} \tag{30}$$

$$r_2 = \frac{R_2 \sin \delta_2}{\sin z} \qquad \varrho_2 = \frac{R_2 \sin(\delta_2 - z)}{\sin z}.$$

Hieran schließt sich die Berechnung von ϱ_1 und ϱ_3 nach (16) (17) (18), dann die Berechnung von $r l b$ nach (19) und von $u_1 u_2 u_3$



nach (20) und (21). Damit werden die Werte von $y_1\, y_2\, y_3$, beziehungsweise neue Werte derselben berechnet und das Verfahren wiederholt. Es ist abgeschlossen, wenn der Wert von Q sich nicht mehr ändert. In der Regel ist dies schon nach der zweiten Hypothese über Q der Fall. Mit den zuletzt erhaltenen Werten bestimmt man die Elemente, wie schon Seite 629 auseinandergesetzt. Wir begnügen uns, die Formeln hier nochmals zusammenzustellen:

$$\sqrt{p} = \frac{r_2\, r_3 \sin(u_3 - u_2)}{\tau_1}\, y_1 = \frac{r_1\, r_3 \sin(u_3 - u_1)}{\tau_2}\, y_2 = \frac{r_1\, r_2 \sin(u_2 - u_1)}{\tau_3}\, y_3$$

$$\frac{p}{r_1} - 1 = q_1 \qquad \frac{p}{r_3} - 1 = q_3$$

$$e \cos v_1 = q_1$$

$$e \sin v_1 = \frac{q_1 \cos(u_3 - u_1) - q_3}{\sin(u_3 - u_1)}$$

$$e = \sin\varphi \qquad a = p \sec\varphi^2$$

$$\omega = u_1 - v_1\,, \quad v_2 = u_2 - \omega\,, \quad v_3 = u_3 - \omega$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(v_1 - E_1) = \sqrt{\frac{r_1}{p}}\, \sin\tfrac{1}{2}\varphi \sin v_1$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(v_3 - E_3) = \sqrt{\frac{r_3}{p}}\, \sin\tfrac{1}{2}\varphi \sin v_3$$

$$M_1 = E_1 - e'' \sin E_1$$

$$M_3 = E_3 - e'' \sin E_3$$

$$n = \frac{M_3 - M_1}{t_3 - t_1} = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Elemente i und Ω wurden schon bei der letzten Hypothese aus (20) erhalten. Als Epoche kann man t_1 einführen und hat dann in M_1 die zugehörige mittlere Anomalie. Auf einen runden Zeitpunkt t_0 kann man durch

$$M_0 = M_1 + n(t_0 - t_1)$$

übergehen.

15. Die bis jetzt zur Darstellung gebrachte Methode der Bahnbestimmung ist von der Voraussetzung ausgegangen, daß die Sehnenabschnitte sich wie die Zwischenzeiten verhalten; dann führten uns einfache Überlegungen darauf, daß der Bogen $G_2 g = \sigma$ identisch ist mit dem Winkel bei R im Dreieck QE_2R (Fig. 269), wodurch die direkte Aufstellung eines Ausdruckes für ϱ_2 ermöglicht wurde. Wir leiten jetzt einen strengen Wert von ϱ_2 ab, der von der genannten Voraus-

setzung frei ist. Eliminiert man aus den Grundgleichungen (15) ϱ_1 und ϱ_3, so ergibt sich, wie hier nicht weiter begründet werden soll, die Gleichung:

$$K\varrho_2 = n_1 R_1 M_1 + n_3 R_3 M_3 - R_2 M_2, \tag{32}$$

in der die Koeffizienten K, M_1, M_2, M_3 der Reihe nach in den Dreiecken (Fig. 270) $G_1 G_2 G_3$, $B_1 G_1 G_3$, $B_2 G_1 G_3$, $B_3 G_1 G_3$ die Produkte der sin zweier Seiten in den sin des eingeschlossenen Winkels sind. Daraus folgt, daß sie den gemeinsamen Faktor $\sin \overline{G_1 G_3}$ haben, nach dessen Streichung die übrig bleibenden Faktoren sich durch die früher eingeführten η_2, H_2, σ, δ_2 wie folgt ausdrücken lassen:

$$\frac{\sin\sigma}{\sin(\delta_2-\sigma)} \sin\eta_2 \sin(L_2 - H_2),\; -\sin\eta_2 \sin(L_1 - H_2),$$
$$-\sin\eta_2 \sin(L_2 - H_2),\; -\sin\eta_2 \sin(L_3 - H_2).$$

Wird auch noch der Faktor $\sin\eta_2$ unterdrückt, so nimmt die Gleichung (32) folgende Gestalt an:

$$\frac{\sin\sigma}{\sin(\delta_2-\sigma)} \sin(L_2 - H_2)\,\varrho_2 = -R_1 \sin(L_1 - H_2)\,n_1 - R_3 \sin(L_3 - H_2)\,n_3 + R_2 \sin(L_2 - H_2)$$

oder:

$$\varrho_2 = \frac{\sin(\delta_2-\sigma)}{\sin\sigma}\left(R_2 - \frac{R_1 \sin(L_1 - H_2)}{\sin(L_2 - H_2)}\,n_1 - \frac{R_3 \sin(L_3 - H_2)}{\sin(L_2 - H_2)}\,n_3\right). \tag{33}$$

Es ist von Interesse, diesen exakten Wert von ϱ_2 mit dem früher erlangten zu vergleichen. Wir hatten Seite 653:

$$\varrho_2 = k - \frac{\sin(\delta_2-\sigma)}{\sin\sigma}\,\frac{R_1 \sin\gamma_1}{\sin(\gamma_1 + L_2 - L_1)}\,(n_1 + n_3 - 1)$$

oder nach (13) und (14)

$$\varrho_2 = \frac{\sin(\delta_2-\sigma)}{\sin\sigma}\left(R_2 - \frac{R_1 \sin\gamma_1}{\sin(\gamma_1 + L_2 - L_1)}\,(n_1 + n_3)\right),$$

wofür man, da $R_1 \sin\gamma_1 = R_3 \sin\gamma_3$, $\sin(\gamma_1 + L_2 - L_1) = \sin(\gamma_3 + L_3 - L_2)$, auch schreiben kann:

$$\varrho_2 = \frac{\sin(\delta_2-\sigma)}{\sin\sigma}\left(R_2 - \frac{R_1 \sin\gamma_1}{\sin(\gamma_1 + L_2 - L_1)}\,n_1 - \frac{R_3 \sin\gamma_3}{\sin(\gamma_1 + L_2 - L_1)}\,n_3\right). \tag{34}$$

Die Gleichung (33) geht also in (34) über, wenn

$$L_1 - H_2 = \gamma_1$$

(es wird dann wegen $\gamma_1 + \gamma_3 + L_3 - L_1 = 180^0$ von selbst

$$L_3 - H_2 = 180^0 - \gamma_3.),$$

d. h. wenn die Richtung der Sehne zwischen dem ersten und dritten Ort der Erdbahn in den größten Kreis $G_1 G_3$ fällt. Wir haben schon oben gesehen, daß dies eine Folge der Hypothese ist, auf der die Gleichung (34) beruht.

Wir behandeln jetzt (33) weiter. Wenn man die Identität

$$0 = \sin(L_3 - L_2)\sin(L_1 - H_2) + \sin(L_2 - L_1)\sin(L_3 - H_2) \\ - \sin(L_3 - L_1)\sin(L_2 - H_2)$$

mit $R_1 R_2 R_3$ multipliziert und mit N_1, N_3 die Verhältnisse der Dreiecksflächen der Erdbahn bezeichnet, so folgt daraus

$$N_1 R_1 \sin(L_1 - H_2) + N_3 R_3 \sin(L_3 - H_2) - R_2 \sin(L_2 - H_2) = 0,$$

was zu (33) addiert, auf

$$\varrho_2 = \frac{\sin(\delta_2 - \sigma)}{\sin\sigma}\left(\frac{R_1 \sin(L_1 - H_2)}{\sin(L_2 - H_2)}(N_1 - n_1) + R_3 \frac{\sin(L_3 - H_2)}{\sin(L_2 - H_2)}.(N_3 - n_3)\right)$$

führt.

(Beiläufig bemerkt, kann man (34) auf die Form bringen:

$$\varrho_2 = \frac{\sin(\delta_2 - \sigma)}{\sin\sigma}((N_1 - n_1) + (N_3 - n_3)),$$

was wieder das Maß der darin gemachten Vernachlässigungen erkennen läßt.)

Setzt man:

$$(35) \qquad \frac{\sin(\delta_2 - \sigma)}{\sin\sigma} R_1 \frac{\sin(L_1 - H_2)}{\sin(L_2 - H_2)} = c_1$$

$$\frac{\sin(\delta_2 - \sigma)}{\sin\sigma} R_3 \frac{\sin(L_3 - H_2)}{\sin(L_2 - H_2)} = c_3$$

$$c_1 N_1 + c_3 N_3 = c_2,$$

so kommt:

$$(36) \qquad \varrho_2 = c_2 - (c_1 n_1 + c_3 n_3).$$

Die Vergleichung mit (26) läßt die Zusammensetzung dieser Fundamentalgleichung des Problems durchschauen. Zugleich bemerken wir einen wichtigen Unterschied. Dort war es möglich, die Hypothesenrechnung auf eine einzige Größe $n_1 + n_3$ zu gründen. Dies ist in (36) offenbar nicht möglich: man muß zwei einführen. Es können dies n_1 und n_3 selbst sein, denn in (17) hat man die Werte für die erste

Hypothese und in (18) die Formeln für ihre Verbesserung. Man kann aber auch zwei andere Größen P und Q einführen und hat dann folgenden Weg, den zuerst Gauß eingeschlagen hat. Die Gleichung (36) läßt sich so schreiben:

$$\rho_2 = c_2 - \frac{c_1 + c_3 \frac{n_3}{n_1}}{1 + \frac{n_3}{n_1}} (n_1 + n_3). \tag{37}$$

Dann hat man für die erste Hypothese die Näherungen (Seite 638)

$$n_1 + n_3 = 1 + \frac{1}{2} \frac{\tau_1 \tau_3}{r_2^3}$$

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{\tau_3}{\tau_1}.$$

Setzt man allgemein:

$$n_1 + n_3 = 1 + \frac{1}{2} \frac{Q}{r_2^3}$$

$$\frac{n_3}{n_1} = P,$$

so wird aus (37)

$$\rho_2 = c_2 - \frac{c_1 + c_3 P}{1 + P} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{Q}{r_2^3}\right),$$

oder, wenn

$$\frac{c_1 + c_3 P}{1 + P} = c, \quad c_2 - c = k$$

$$\frac{1}{2} c Q = l \tag{38}$$

gemacht wird:

$$\rho_2 = k - \frac{l}{r_2^3}. \tag{39}$$

Nun kann man (38) und (39) für alle Hypothesen gebrauchen; in der ersten Hypothese setzt man

$$P = \frac{\tau_3}{\tau_1}, \quad Q = \tau_1 \tau_3$$

und für alle folgenden

$$P = \frac{n_3}{n_1} \qquad Q = 2 r_2^3 (n_1 + n_3 - 1),$$

worin für r_2, n_1, n_3 die in der vorhergehenden Hypothese gefundenen Werte zu verwenden sind. Man hat:

$$P = \frac{\tau_3}{\tau_1} \frac{y_1}{y_3}$$

$$Q = 2 r_2^3 \frac{\tau_1}{\tau_3} \left(\frac{y_2}{y_1} - 1\right) + 2 r_2^3 \frac{\tau_3}{\tau_1} \left(\frac{y_2}{y_3} - 1\right). \tag{40}$$

Mit der Gleichung (39) wird ganz wie früher verfahren, um r_2 und ϱ_2 daraus abzuleiten (siehe Formeln (30)) und ebenso bleibt natürlich die Berechnung der äußeren Örter und die Elementenbestimmung bestehen.

§ 111. Bahnbestimmung der Parabel.

16. Die Erfahrung zeigt, daß die Mehrzahl der Kometen sich in Ellipsen um die Sonne bewegt, deren Exzentrizität wenigstens in dem kleinen Stück ihrer Bahn in der Nähe der Sonne, das wir beobachten können, so nahe gleich eins ist, daß ein Unterschied nicht wahrgenommen werden kann. Man berechnet daher für Kometen von Anfang an Parabeln und geht zu einem andern Kegelschnitt erst über, wenn Unterschiede der gerechneten Örter von den beobachteten sich ergeben.

Die parabolische Bahnbestimmung vollzieht sich wesentlich einfacher als die elliptische; nicht weil ein Element weniger zu bestimmen ist, sondern erstens weil man in der Lambertschen Gleichung, die bei der Parabel eine geschlossene Form hat, ein bequemes Kriterium zur Ermittelung der richtigen Entfernung besitzt, und zweitens weil bei den geringen Zwischenzeiten, mit denen erste Kometenbahnen berechnet zu werden pflegen, die Anwendung des einfachen Ausdruckes für das Verhältnis der äußeren geozentrischen Distanzen ganz unbedenklich ist. So baut sich auf diesen beiden Hilfsmitteln folgende einfache Methode auf. Man macht eine Annahme (Hypothese) über ϱ_1 und berechnet daraus ϱ_3 (Seite 643):

$$\varrho_3 = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \frac{\sin \omega_1}{\sin \omega_3} \varrho_1 . \tag{1}$$

Aus den vollständigen geozentrischen Polarkoordinaten $\lambda_1 \beta_1 \varrho_1$ und $\lambda_3 \beta_3 \varrho_3$ für die beiden äußeren Örter lassen sich dann die heliozentrischen Koordinaten und die Sehne berechnen. Stimmt letzterer (geometrischer) Wert der Sehne mit dem dynamischen überein, den der Lambertsche Satz ergibt (Seite 634)

$$s = (r_1 + r_3) \sin \gamma , \tag{2}$$

so ist mit der Annahme über ϱ_1 das Richtige getroffen; wenn nicht, so variiert man ϱ_1 und setzt die Hypothesenrechnung unter Benutzung der regula falsi so lange fort, bis Übereinstimmung erzielt ist. Mit den richtigen Werten von ϱ_1 und ϱ_3 werden dann ein letztes Mal die heliozentrischen Koordinaten der beiden äußeren Örter berechnet und daraus in bekannter Weise die Elemente. Das Verfahren führt rasch zum Ziel und ist keineswegs so roh, als es für den ersten Anblick

scheinen möchte; auch wenn man eine Gleichung höheren Grades in ϱ_1 aufstellt, was leicht möglich ist, muß man diese durch Probieren auflösen; bei der auseinandergesetzten Methode ist das Probieren nur an die Stelle verlegt, wo es sich am raschesten erledigt.

17. Es sind nun die nötigen Rechenformeln aufzustellen. Die geozentrischen Koordinaten des Kometen seien wieder mit $\lambda_1\beta_1$, $\lambda_2\beta_2$, $\lambda_3\beta_3$ bezeichnet, die Koordinaten der Erde mit L_1R_1, L_2R_2, L_3R_3, ihre Breiten werden 0 gesetzt. Da nur fünf Elemente zu bestimmen sind, sind sechs Daten zu viel; wir werden gleich sehen, wie man, ohne die Symmetrie zu beeinträchtigen, nur fünf gegebene Stücke in das Problem einführen kann. Wir behandeln zuerst die Gleichung (1) und drücken das Verhältnis

$$\frac{\sin\omega_1}{\sin\omega_3} = \frac{\sin G_1 g}{\sin G_3 g}$$

Fig. 271.

durch die gegebenen Stücke aus. Verbindet man den mittleren Erdort B_2 mit den geozentrischen Örtern G_1, G_2, G_3 des Kometen durch größte Kreise und nennt deren Neigungen gegen die Ekliptik J_1, J_2, J_3, so hat man:

$$\frac{\sin\omega_1}{\sin B_2 G_1} = \frac{\sin(J_1 - J_2)}{\sin B_2 g G_1} \qquad \frac{\sin\omega_3}{\sin B_2 G_3} = \frac{\sin(J_2 - J_3)}{\sin B_2 g G_3},$$

also:

$$\frac{\sin\omega_1}{\sin\omega_3} = \frac{\sin(J_1 - J_2)}{\sin(J_2 - J_3)} \cdot \frac{\sin B_2 G_1}{\sin B_2 G_3}$$

und ferner:

$$\sin B_2 G_1 \sin J_1 = \sin\beta_1$$

$$\sin B_2 G_1 \cos J_1 = \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_2)$$

$$\sin B_2 G_2 \sin J_2 = \sin\beta_2$$

$$\sin B_2 G_2 \cos J_2 = \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - L_2)$$

$$\sin B_2 G_3 \sin J_3 = \sin\beta_3$$

$$\sin B_2 G_3 \cos J_3 = \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2).$$

Folglich ist

$$\frac{\sin\omega_1}{\sin\omega_3} = \frac{\sin\beta_1 \cos J_2 - \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_2)\sin J_2}{-\sin\beta_3 \cos J_2 + \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2)\sin J_2}$$

lediglich von J_2 abhängig und man hat:

(I) $$\operatorname{tg} J_2 = \frac{\operatorname{tg} \beta_2}{\sin(\lambda_2 - L_2)}$$

$$\frac{\sin \omega_1}{\sin \omega_3} = \frac{\sin \beta_1 - \cos \beta_1 \sin(\lambda_1 - L_2) \operatorname{tg} J_2}{-\sin \beta_3 + \cos \beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2) \operatorname{tg} J_2}.$$

Die beiden Daten $\lambda_2 \beta_2$ sind also durch eine einzige Größe J_2 ersetzt und damit die Zahl der Daten auf fünf reduziert; mit andern Worten kann man sagen: man macht vom zweiten Ort $\lambda_2 \beta_2$ nur insoweit Gebrauch, als man verlangt, er müsse auf dem durch J_2 bestimmten größten Kreis liegen. Setzt man

(II) $$M = \frac{\sin \beta_1 - \cos \beta_1 \sin(\lambda_1 - L_2) \operatorname{tg} J_2}{-\sin \beta_3 + \cos \beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2) \operatorname{tg} J_2} \cdot \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1},$$

so wird

$$\varrho_3 = M \varrho_1$$

Wir stellen ferner die Ausdrücke für die heliozentrischen Radienvektoren r_1 und r_3, die in (2) gebraucht werden, und für den geometrischen Wert der Sehne auf, alle als Funktionen von ϱ_1. Aus den Dreiecken Sonne—Erde—Komet ergibt sich (Seite 644 und 646)

$$r_1^2 = R_1^2 + \varrho_1^2 + 2 R_1 \varrho_1 \cos \beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1)$$
$$r_3^2 = R_3^2 + \varrho_3^2 + 2 R_3 \varrho_3 \cos \beta_3 \cos(\lambda_3 - L_3)$$

oder da $\varrho_3 = M \varrho_1$:

$$r_3^2 = R_3^2 + \varrho_1^2 M^2 + 2 R_3 \varrho_1 M \cos \beta_3 \cos(\lambda_3 - L_3).$$

Für die Sehne hat man in rechtwinkligen Koordinaten

$$s^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2,$$

oder wenn man die heliozentrischen Erdkoordinaten X, Y, Z, die geozentrischen Kometenkoordinaten ξ, η, ζ nennt, wegen $x = \xi + X, \ldots$

$$s^2 = (\xi_3 - \xi_1 + X_3 - X_1)^2 + \cdots$$

Nun ist:

$$\xi_1 = \varrho_1 \cos \beta_1 \cos \lambda_1 \qquad \xi_3 = M \varrho_1 \cos \beta_3 \cos \lambda_3$$
$$\eta_1 = \varrho_1 \cos \beta_1 \sin \lambda_1 \qquad \eta_3 = M \varrho_1 \cos \beta_3 \sin \lambda_3$$
$$\zeta_1 = \varrho_1 \sin \beta_1 \qquad \zeta_3 = M \varrho_1 \sin \beta_3$$

und

$$X_1 = R_1 \cos L_1 \qquad X_3 = R_3 \cos L_3$$
$$Y_1 = R_1 \sin L_1 \qquad Y_3 = R_3 \sin L_3$$
$$Z_1 = 0 \qquad Z_3 = 0,$$

also:

$$\xi_3 - \xi_1 = \varrho_1 (M \cos\beta_3 \cos\lambda_3 - \cos\beta_1 \cos\lambda_1)$$
$$\eta_3 - \eta_1 = \varrho_1 (M \cos\beta_3 \sin\lambda_3 - \cos\beta_1 \sin\lambda_1)$$
$$\zeta_3 - \zeta_1 = \varrho_1 (M \sin\beta_3 - \sin\beta_1)$$

und

$$X_3 - X_1 = R_3 \cos L_3 - R_1 \cos L_1$$
$$Y_3 - Y_1 = R_3 \sin L_3 - R_1 \sin L_1$$
$$Z_3 - Z_1 = 0.$$

Schreibt man diese Gleichungen kurz so:

$$\xi_3 - \xi_1 = \varrho_1 h \cos\zeta \cos H$$
$$\eta_3 - \eta_1 = \varrho_1 h \cos\zeta \sin H$$
$$\zeta_3 - \zeta_1 = \varrho_1 h \sin\zeta$$
$$X_3 - X_1 = g \cos G$$
$$Y_3 - Y_1 = g \sin G,$$

so ergeben sich offenbar die Hilfsgrößen h, ζ, H, g, G aus

$$\text{(III)} \quad \begin{aligned} h \cos\zeta \cos(H - \lambda_1) &= M \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - \lambda_1) - \cos\beta_1 \\ h \cos\zeta \sin(H - \lambda_1) &= M \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - \lambda_1) \\ h \sin\zeta &= M \sin\beta_3 - \sin\beta_1 \\ g \cos(G - L_1) &= R_3 \cos(L_3 - L_1) - R_1 \\ g \sin(G - L_1) &= R_3 \sin(L_3 - L_1) \end{aligned}$$

(h und g positiv)

und für die Sehne s erscheint dann der Ausdruck

$$s^2 = \varrho_1^2 h^2 + g^2 + 2\varrho_1 hg \cos\zeta \cos(H - G),$$

der denselben Bau aufweist, wie die Ausdrücke von r_1^2 und r_3^2. Setzt man noch

$$\text{(IV)} \quad \begin{aligned} \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1) &= \cos\psi_1 \\ \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - L_3) &= \cos\psi_3 \\ \cos\zeta \cos(H - G) &= \cos\varphi, \end{aligned}$$

so nehmen die geometrischen Werte von r_1, r_3, s folgende Formen an

$$r_1^2 = \varrho_1^2 + R_1^2 + 2\varrho_1 R_1 \cos\psi_1$$
$$r_3^2 = M^2 \varrho_1^2 + R_3^2 + 2\varrho_1 M R_3 \cos\psi_3$$
$$s^2 = h^2 \varrho_1^2 + g^2 + 2\varrho_1 hg \cos\varphi,$$

deren Berechnung sich nach einem Kunstgriff von Gauß noch weiter vereinfachen läßt. Es ist nämlich

$$r_1^2 = (\varrho_1 + R_1 \cos\psi_1)^2 + (R_1 \sin\psi_1)^2$$

oder wenn

$$R_1 \cos\psi_1 = f_1$$

$$R_1 \sin\psi_1 = l_1$$

gesetzt wird:

$$r_1^2 = l_1^2\left(1 + \left(\frac{\varrho_1 + f_1}{l_1}\right)^2\right).$$

Wird also noch ϑ_1 aus

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{\varrho_1 + f_1}{l_1}$$

bestimmt, so folgt:

$$r_1 = l_1 \sec\vartheta_1.$$

Ähnlich behandelt man r_3 und s. Werden also folgende Gruppen berechnet

$$\text{(V)}\quad \begin{array}{l|l|l} R_1 \cos\psi_1 = f_1 & \frac{R_3}{M}\cos\psi_3 = f_3 & \frac{g}{h}\cos\varphi = f \\ R_1 \sin\psi_1 = l_1 & \frac{R_3}{M}\sin\psi_3 = l_3 & \frac{g}{h}\sin\varphi = l \end{array}$$

$$\text{(VI)}\quad \operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{\varrho_1 + f_1}{l_1} \qquad \operatorname{tg}\vartheta_3 = \frac{\varrho_1 + f_3}{l_3} \qquad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\varrho_1 + f}{l},$$

so ergibt sich

$$\text{(VII)}\quad \begin{aligned} r_1 &= l_1 \sec\vartheta_1 \\ r_3 &= M l_3 \sec\vartheta_3 \\ s &= h l \sec\vartheta. \end{aligned}$$

Der dynamische Wert von s folgt aus der Gleichung (8) (Seite 634) nämlich

$$\text{(VIII)}\quad \begin{aligned} \sin\theta &= \frac{6k}{2^{\frac{3}{2}}} \frac{t_3 - t_1}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}} \\ \sin\tfrac{1}{2}\gamma &= \sqrt{2}\sin\tfrac{1}{3}\theta \\ s &= (r_1 + r_3)\sin\gamma. \end{aligned}$$

Die Vergleichung der aus (VII) und (VIII) erlangten Werte von s zeigt, ob mit ϱ_1 die richtige Annahme gemacht wurde. Offenbar sind die Formeln I—V von jeder Hypothese unabhängig und brauchen nur einmal gerechnet zu werden. Die Hypothesenrechnung erstreckt sich nur auf die einfachen Formeln VI—VIII. Erfahrungsgemäß werden neue Kometen in den Entfernungen von 1 bis 3 astronomi-

schen Einheiten von der Sonne entdeckt; man wird also im Mittel als beste erste Hypothese denjenigen Wert von ϱ_1 nehmen, der der Annahme $r_1 + r_3 = 2$ entspricht; dieser ergibt sich leicht aus obigen Formeln zu

$$(s) = \frac{2k(t_3 - t_1)}{\sqrt{2}}, \quad \sec(\vartheta) = \frac{(s)}{hl}, \quad (\varrho_1) = l \operatorname{tg}(\vartheta) - f.$$

Die Anwendung der regula falsi gestaltet sich so: hat man mit den beiden ersten Hypothesen über ϱ_1, nämlich ϱ und $\varrho + \Delta\varrho$ die Unterschiede der Sehnen $s(\mathrm{VII}) - s(\mathrm{VIII}) = p$ bzw. $p + \Delta p$ festgestellt, so wird die dritte Hypothese mit $\varrho + \Delta\varrho + \Delta'\varrho$ zu rechnen sein, wo

$$\Delta'\varrho = -\frac{p + \Delta p}{\dfrac{\Delta p}{\Delta\varrho}}$$

usf. —

18. Ist der richtige Wert von ϱ_1 ermittelt, so hat man die drei vollständigen geozentrischen Polarkoordinaten $\lambda\beta\varrho$ und kann daraus die heliozentrischen rlb ableiten (siehe Seite 487):

$$(\mathrm{IX}) \quad \begin{aligned} r_1 \cos b_1 \cos(l_1 - L_1) &= \varrho_1 \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1) + R_1 \\ r_1 \cos b_1 \sin(l_1 - L_1) &= \varrho_1 \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_1) \\ r_1 \sin b_1 &= \varrho_1 \sin\beta_1 \\[1ex] r_3 \cos b_3 \cos(l_3 - L_3) &= \varrho_3 \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - L_3) + R_3 \\ r_3 \cos b_3 \sin(l_3 - L_3) &= \varrho_3 \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_3) \\ r_3 \sin b_3 &= \varrho_3 \sin\beta_3 . \end{aligned}$$

Mit diesen wird nun zur Elementenbestimmung geschritten. Zunächst hat man ebenso wie bei der Ellipse für Knoten und Neigung

$$(\mathrm{X}) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} i \sin(l_1 - \Omega) &= \operatorname{tg} b_1 \\ \operatorname{tg} i \cos(l_1 - \Omega) &= \frac{\operatorname{tg} b_3 - \operatorname{tg} b_1 \cos(l_3 - l_1)}{\sin(l_3 - l_1)} . \end{aligned}$$

Ist $l_3 - l_1 > 0$, dann ist $i < 90^0$ zu nehmen, ist $l_3 - l_1 < 0$, dann ist $i > 90^0$ zu nehmen.

Ferner werden die Argumente der Breite u_1 und u_3 aus

$$(\mathrm{XI}) \qquad \operatorname{tg} u_1 = \operatorname{tg}(l_1 - \Omega) \sec i \qquad \operatorname{tg} u_3 = \operatorname{tg}(l_3 - \Omega) \sec i$$

gefunden.



Nun hat man nach Gleichung (14) (Seite 624)

$$\frac{\cos\frac{1}{2}v_1}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}}$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}v_3}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}}$$

und $v_3 = v_1 + (u_3 - u_1)$; folglich wird die letzte Gleichung:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}v_1 \cos\frac{1}{2}(u_3 - u_1) - \sin\frac{1}{2}v_1 \sin\frac{1}{2}(u_3 - u_1)}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}}$$

oder:

$$\text{(XII)} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{q}} \sin\frac{1}{2}v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{r_1}} \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(u_3 - u_1) - \dfrac{1}{\sqrt{r_3}} \operatorname{cosec}\frac{1}{2}(u_3 - u_1) \\ \dfrac{1}{\sqrt{q}} \cos\frac{1}{2}v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{r_1}} \end{cases}.$$

Hieraus erhält man die wahre Anomalie v_1 und dann $v_3 = v_1 + (u_3 - u_1)$. Der Abstand des Perihels vom Knoten wird damit:

$$\text{(XIII)} \qquad \omega = u_1 - v_1 = u_3 - v_3;$$

ferner gibt (XII) die Periheldistanz q. Um endlich die Durchgangszeit durchs Perihel T zu erhalten, ziehen wir die Gleichung (15) (Seite 624) heran; diese gibt:

$$\text{(XIV)} \quad \begin{cases} t_1 - T = \dfrac{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}{k} (\operatorname{tg}\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v_1{}^3) \\ t_3 - T = \dfrac{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}{k} (\operatorname{tg}\frac{1}{2}v_3 + \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v_3{}^3), \end{cases}$$

wobei man sich der Barkerschen Tafel bedienen kann.

19. Die dargelegte Methode der parabolischen Bahnbestimmung beruht auf der Gl. (1), die wie wir wissen (Seite 643) von der Hypothese abhängt, daß die Sehne zwischen dem ersten und dritten Kometenort vom mittleren Radiusvektor im Verhältnis der Zwischenzeiten geteilt wird. Sind diese klein und nahezu gleich, so ist diese Hypothese gewiß geeignet, zu guten Bahnelementen zu führen. Ist dies aber nicht der Fall, dann muß man ebenso wie bei der Ellipse zu einer strengen Gleichung greifen. Man erhält diese, indem man aus den Grundgleichungen (15) (Seite 649) ϱ_2 eliminiert; es bleibt dann eine Gleichung zwischen ϱ_1 und ϱ_3 von der Form

$$\text{(3)} \qquad \varrho_3 = \overline{M}\varrho_1 + m = \left(\overline{M} + \frac{m}{\varrho_1}\right)\varrho_1,$$

wo $\overline{M}$ denselben Wert hat wie M, nur daß $\frac{[r_2\, r_3]}{[r_1\, r_2]}$ an Stelle von $\frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}$ tritt, und m folgenden Wert hat:

$$m = \frac{R_1 \sin (L_2 - L_1) \operatorname{tg} J_2}{-\sin \beta_2 + \cos \beta_2 \sin (\lambda_2 - L_2) \operatorname{tg} J_2} \left(\frac{[R_2\, R_3]}{[R_1\, R_2]} - \frac{[r_2\, r_3]}{[r_1\, r_2]}\right).$$

Man erkennt hieraus, daß m tatsächlich sehr klein sein muß, da man mit demselben Recht, mit dem man das Verhältnis der Dreiecksflächen der Kometenbahn durch das Verhältnis der Zwischenzeiten ersetzt, dies auch für die Erdbahn tun kann. Hat man durch eine erste Rechnung die Möglichkeit erlangt, $\frac{[r_2\, r_3]}{[r_1\, r_2]}$ sei es trigonometrisch, sei es unter Benutzung der Reihenentwicklung, sei es endlich unter Verwendung des Verhältnisses Sektor durch Dreieck zu berechnen, so kann man sich bei der zweiten Bahnbestimmung der Gl. (3) statt (1) bedienen, also mit

$$M' = \overline{M} + \frac{m}{\varrho_1}$$

statt mit M die obigen Formeln durchrechnen.

Alphabetisches Register.

(Die Zahlen geben die Seiten an.)

